

NAVEGACIÓN DE VEHÍCULOS AEROESPACIALES CON SEÑALES GNSS

Tesis de Maestría

Jorge Cogo

Presentada ante la Facultad de Ingeniería de la
Universidad Nacional de La Plata
como requisito para la obtención del grado académico de

MAGÍSTER EN INGENIERÍA

Dirección de Tesis: Dr. Carlos H. Muravchik
Ing. Javier G. García

Jurado de Tesis: Dr. Livio R. Gratton
Dr. Favio R. Masson
Ing. José M. Relloso

Fecha de la defensa oral y pública: 16 de Diciembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todxs aquellxs que me acompañaron incondicionalmente en este recorrido. Principalmente a Vane, *mi compañera*, por todos los sentidos que le damos a esta palabra, y las cosas con que llenamos cada uno de ellos.

A mis viejos y hermanas por haber estado siempre, y a mis abuelos que ya no están... A Juan Carlos, donde esté...

A mis directores, Carlos y Javier, por la confianza, el apoyo y la guía que me brindaron durante la realización de la tesis. Más aún, a pesar de haberme soportado como proyectista final, reincidieron *como gurises* en el posgrado...

A mis compañeros de trabajo, Agustín, Javito, Gerard, Reimon, Juan, Santi, Ernesto, Germán, Lucas y Simón, porque a pesar de que estamos *como perejil en maceta*, cada uno pone lo mejor para lograr un excelente clima de trabajo...

A lxs compañerxs y amigxs de la docencia, Adrián, Juan Pablo y Caro, con quienes compartimos muchos mates e ideales...

A lxs compañerxs del LEICI y del GrIDComD. A las instituciones FI-UNLP, CONAE, VENG y CETT que es una forma sinecdótica de agradecer a las personas que las habitan...

A lxs compañerxs y amigxs de la militancia y de la vida...

A todxs lxs que sumaron su empuje para que esta tesis llegara a su órbita...

A lxs que luchan...

ÍNDICE GENERAL

Abstract	XI
Resumen	XIII
Lista de Figuras	XV
Lista de Tablas	XLIII
Abreviaturas y Definiciones	XLV
1. Introducción	1
1.1. Satélites LEO	4
1.2. Utilización de GNSS en satélites LEO	5
1.3. Desarrollos argentinos	10
1.4. Objetivos	12
1.5. Estructura	13
1.6. Producido de la Tesis	14
2. Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS)	17
2.1. Segmento Espacial	18
2.1.1. GPS	19
2.1.2. GLONASS	24
2.2. Segmento de Control	29
2.2.1. GPS	30
2.2.2. GLONASS	31
2.3. Segmento de Usuario	31
2.4. Descripción de la señal	32
2.4.1. GPS	33
2.4.2. GLONASS	34
2.5. Principio de Determinación de la Posición	36
2.6. Tiempo de Transmisión	37
2.7. Pseudo-Rango	39
2.8. Principio de Determinación de la Velocidad	40
2.9. Delta-Rango	41

2.10. A Modo de Conclusión	42
3. Marcos de Referencia	43
3.1. Marcos de Referencia Temporal	44
3.1.1. GPS	44
3.1.2. GLONASS	45
3.2. Marcos de Referencia Espacial	45
3.2.1. Equinoccio Vernal	45
3.2.2. Marco de Referencia Inercial Centrado en la Tierra (ECI)	46
3.2.3. Marco de Referencia Centrado en la Tierra, Fijo con la Tierra (ECEF)	46
3.2.4. Marco de Referencia del Cuerpo	48
3.2.5. Marco de Referencia de la Antena	49
3.3. Transformación entre Marcos de Referencia	50
3.3.1. Vinculación entre los sistemas ECI y ECEF	53
3.3.2. Vinculación del sistema del cuerpo con los demás	55
3.3.3. Vinculación del sistema de la antena con los demás	56
3.4. A Modo de Conclusión	56
4. Vehículos Aeroespaciales	57
4.1. Enfoque Cinemático	58
4.2. Enfoque Dinámico	60
4.3. Movimiento Orbital	61
4.4. Perturbaciones a la Órbita	62
4.4.1. Potencial Gravitatorio Terrestre	63
4.4.2. Atracción Gravitatoria de Otros Cuerpos Celestes	64
4.4.3. Arrastre Atmosférico (<i>Drag</i>)	65
4.4.4. Fuerzas de Empuje o <i>Thrust</i>	66
4.5. Movimiento Orbital Perturbado	67
4.6. Formulación en Coordenadas ECEF	68
4.7. Linealización del Modelo Dinámico	69
4.8. A Modo de Conclusión	71
5. Navegación	73
5.1. Filtro de Kalman (KF)	74
5.2. Propiedades del Filtro de Kalman	78
5.3. Filtro de Kalman Extendido (EKF)	79
5.4. Filtro de Kalman de Posición (PKF)	82
5.5. A Modo de Conclusión	83
6. Aspectos de Implementación de Receptores GNSS	85
6.1. Demodulación del Mensaje de Navegación	85
6.1.1. Sincronización a Nivel de Palabra/Línea	88
6.1.2. Detección de Errores	89
6.1.3. Sincronización a Nivel de Subtrama/Trama	93
6.1.4. Parámetros de Interés del Mensaje de GPS	93
6.1.5. Parámetros de Interés del Mensaje GLONASS	97
6.2. Armado de Mediciones	100
6.2.1. Información Provista por los Lazos	100
6.2.2. Información Provista por las Rutinas de Demodulación de Datos	101
6.2.3. Determinación de los Tiempos de Transmisión	102

6.2.4.	Armado de los Pseudo-Rangos	102
6.2.5.	Armado de los Delta-Rangos	102
6.3.	Factores de Error en las Mediciones	103
6.4.	Correcciones en los Tiempos de Transmisión	105
6.4.1.	GPS	105
6.4.2.	GLONASS	106
6.5.	Correcciones en la Desviación Doppler	106
6.5.1.	GPS	107
6.5.2.	GLONASS	107
6.6.	Correcciones en los Pseudo-Rangos	107
6.6.1.	Corrección por Retardo Ionosférico	107
6.6.2.	Corrección por Retardo Troposférico	110
6.6.3.	Corrección por Efecto Sagnac	111
6.7.	Cálculo de Estados de los Satélites	112
6.7.1.	Estados de los Satélites de GPS	113
6.7.2.	Estados de los Satélites de GLONASS	116
6.8.	Solución Puntual de Posición	118
6.9.	Solución Puntual de Posición con más de un Sistema GNSS	121
6.9.1.	Formulación	121
6.9.2.	Disponibilidad de Mediciones	122
6.9.3.	Solución Numérica	124
6.10.	Solución Puntual de Velocidad	131
6.11.	Dilución de la Precisión (DOP)	132
6.12.	A Modo de Conclusión	133
7.	Aplicación a un Satélite de Órbita Baja	135
7.1.	Descripción del RGPS	136
7.1.1.	Hardware	136
7.1.2.	Software	138
7.2.	Operación en Órbita del RGPS	143
7.2.1.	Información Provista por el RGPS	143
7.2.2.	Elementos Adicionales Utilizados para el Análisis/Contraste	143
7.2.3.	Operación de las Etapas de Adquisición y Seguimiento de Señal	145
7.2.4.	Potencia de Señal en Función de la Elevación	148
7.2.5.	Solución de Navegación	151
7.2.6.	Conclusiones del Análisis	155
7.3.	Posprocesamiento	155
7.4.	A Modo de Conclusión	158
8.	Comparación de Modelos y Estrategias de Filtrado	159
8.1.	Escenario de Simulación “Ideal”	160
8.2.	Modelos Utilizados	162
8.2.1.	Propagación de los Estados de Sesgo y Deriva	164
8.2.2.	Propagación de los Restantes Estados. Enfoque Cinemático.	164
8.2.3.	Propagación de los Restantes Estados. Enfoque Dinámico.	165
8.2.4.	Vinculación de las Perturbaciones	167
8.2.5.	Matriz de Covarianza del Ruido de Modelo	168
8.3.	Comparación de Modelos con EKF	168
8.4.	Comparación de Estrategias de Filtrado	199
8.5.	Ejemplo de Aplicación	206

8.6. A Modo de Conclusión	212
9. Análisis Frente a Perturbaciones	213
9.1. Perturbaciones de Thrust	213
9.2. Pérdida de satélites	225
9.3. A Modo de Conclusión	243
10. Conclusiones	245
10.1. Continuará...	247
A. Mecánica Orbital	249
A.1. Problema de dos Cuerpos	249
A.2. Momento Angular	251
A.3. Ecuación de Órbita	252
A.4. Órbitas elípticas	254
A.5. Velocidad	255
A.6. Dependencia con el tiempo	256
A.7. Órbitas en 3 dimensiones	259
B. Desempeño de EKF con GLONASS y GPS-GLONASS	261
B.2. Sistema GLONASS	261
B.3. Uso conjunto de los sistemas GPS y GLONASS	285
C. Comparación de estrategias de filtrado con GLONASS y GPS-GLONASS	309
D. Escenario de simulación “realista” GLONASS y GPS-GLONASS	345
D.2. Perturbaciones de Thrust	345
D.3. Pérdida de Satélites. Caso GLONASS	365
D.4. Pérdida de Satélites. Caso GPS y GLONASS	383
Referencias	411

ABSTRACT

In this thesis, we study the problem of estimating position and velocity of aerospace vehicles, in particular satellites, using signals from Global Navigation Satellite Systems (GNSS). We focus on the case where such an assessment is carried out in real time (or with minimal delay, tolerable depending on the application) and based on measurements taken on board the vehicle itself, a situation commonly referred as navigation.

GNSS's measurements, related to the distance between the satellite and the receiver (pseudo-range) and the rate of change of this distance (doppler), are affected by various factors that induce both systematic and random errors. For the former, models are generally used to discount or at least reduce their effect, while statistical filtering methods are used to mitigate the effect of random errors. Most of these filtering methods use information on the temporal evolution of the states of the vehicle, information that is obtained based on a model of the vehicle's expected dynamics. Since these models are of a nonlinear nature, and that measurements obtained with the GNSS signals are related nonlinearly with the states, the estimation problem is also nonlinear.

We propose different state variables models (describing the temporal evolution with different levels of complexity) in line with the dynamics of the vehicles studied. We analyze and compare the performance of various non-linear filtering schemes such as Extended Kalman Filter (EKF), with different variants of "tuning" for each of them. To this end, we propose and synthesize various simulation scenarios with different restrictions in satellite visibility and GNSS constellations geometry, among other situations of practical interest; and establish performance metrics that allow a contrast between the different variants analyzed.

The possibility of having measurements of both GPS and GLONASS, the two currently operating GNSS systems, is of particular interest in applications such as the one studied. For instance, working with systems whose operation is completely independent can increase the reliability of the navigation solution in a scenario of failure of one of the systems involved; and moreover, combining measurements from both systems helps minimize and substantially reduce the estimation error in the navigation solution. We also propose and analyze different filtering schemes that incorporate measurements of these two GNSS systems.

Finally, we analyze the results obtained during the operation in orbit of a GPS receiver

completely designed and built in the working group, which was integrated onboard the argentine SAC-D satellite, launched on June 10, 2011 and ended its operational service on June 8, 2015. We analyze the results obtained with the filtering strategy implemented on board and through post-processing of the data obtained during the mission. This allows us to show, through real data use, the improvements that can be obtained in navigation using properly designed filtering schemes.

RESUMEN

En esta tesis estudiamos el problema de estimación de posición y velocidad de vehículos aeroespaciales, en particular satelitales, utilizando las señales de los Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS). Nos enfocamos en el caso en el que tal estimación se lleva a cabo en tiempo real (o con un mínimo retardo, tolerable según la aplicación) y en base a mediciones tomadas a bordo del propio vehículo, situación habitualmente denominada *navegación*.

Las mediciones que se obtienen con los sistemas GNSS, relacionadas con la distancia satélite receptor (*pseudo-rango*) y con la tasa de cambio de dicha distancia (*doppler*), se encuentran afectadas por diversos factores que inducen errores tanto sistemáticos como de naturaleza aleatoria. Para los primeros en general se recurre a la utilización de modelos que permiten descontar o al menos reducir su incidencia, mientras que para mitigar el efecto de los errores de naturaleza aleatoria se recurre a métodos de filtrado estadístico. La mayoría de estos métodos de filtrado emplea información sobre la evolución temporal de los estados del vehículo, obtenida en base a un modelo de su dinámica esperada. Dado que estos modelos son de naturaleza no lineal, y que las mediciones obtenidas con las señales GNSS se relacionan de manera no lineal con los estados, el problema de estimación resulta también no lineal.

Planteamos diversos modelos en variables de estado (que describen la evolución temporal con diferente grado de complejidad) acordes a la dinámica de los vehículos estudiados. Analizamos y comparamos el desempeño de varios esquemas de filtrado no lineal como por ejemplo el filtro de Kalman Extendido (EKF), con diferentes variantes de “sintonización” de cada uno de ellos. Para ello, proponemos y sintetizamos escenarios de simulación que reflejan por ejemplo, diferentes restricciones a la visibilidad de los satélites y geometría de las constelaciones GNSS, entre otras situaciones de interés práctico; proponiendo métricas de desempeño que permiten realizar un contraste entre las diferentes variantes analizadas.

La posibilidad de contar con mediciones de los sistemas GPS y GLONASS, los dos sistemas GNSS actualmente operativos, resulta de particular interés en aplicaciones como la estudiada, ya que por un lado al tratarse de sistemas cuya operación es completamente independiente permite aumentar la fiabilidad de la solución de navegación frente a un escenario de falla de uno de los sistemas involucrados; y por otra parte, la combinación de mediciones de ambos sistemas permite aumentar la disponibilidad y reducir considerablemente el error

de estimación en la solución de navegación. Proponemos y analizamos además diferentes esquemas de filtrado que permiten incorporar mediciones de estos dos sistemas GNSS.

Finalmente, analizamos los resultados obtenidos durante la operación en órbita de un receptor de GPS completamente diseñado y construido en el grupo de trabajo, que fue integrado a bordo del satélite argentino SAC-D, puesto en órbita el 10 de Junio de 2011 y que concluyó su servicio operativo el 8 de Junio de 2015. Analizamos los resultados obtenidos con la estrategia de filtrado implementada a bordo y mediante post-procesamiento de los datos obtenidos durante la misión, permitiendo mostrar con datos reales las mejoras que pueden obtenerse en la navegación utilizando esquemas de filtrado adecuadamente diseñados.

LISTA DE FIGURAS

1.1. Esquema de los campos o disciplinas involucrados en la tesis.	3
2.1. Constelación de satélites GPS al 26 de junio de 1994.	20
2.2. Proyección planar de la constelación correspondiente al 26 de junio de 1994. .	20
2.3. Satélites en vista considerando una máscara de elevación de 10° en Base Marambio (izq.) y en La Quiaca (der.); con la constelación de GPS presente el día 26 de junio de 1994.	22
2.4. Constelación de satélites GPS al 7 de diciembre de 2013.	22
2.5. Satélites en vista considerando una máscara de elevación de 10° en Base Marambio (izq.) y en La Quiaca (der.); con la constelación de GPS presente el día 7 de diciembre de 2013.	23
2.6. Diferentes satélites de los bloques que conforman la constelación GPS.	25
2.7. Constelación de satélites GLONASS al 7 de enero de 2014.	26
2.8. Planos Orbitales de la constelación de satélites GLONASS correspondiente al 7 de enero de 2014.	26
2.9. Cantidad aproximada de satélites en la constelación GLONASS entre 1985 y 2010.	27
2.10. Cantidad de satélites en la constelación GLONASS entre 2008 y 2016.	28
2.11. Esquema de los diferentes satélites de las series que conforman la constelación GLONASS.	29
2.12. (a) Intersección de dos esferas de radios r_1 y r_2 . (b) Intersección con una tercer esfera de radio r_3	37
2.13. Posición del usuario y del satélite en un mismo marco de referencia espacial. .	37

2.14. Medición del tiempo de arribo utilizando la réplica de código.	38
3.1. Sistema de referencia del vehículo.	49
3.2. Sistema de coordenadas de la antena.	49
3.3. Relación entre dos marcos de referencia α y β	50
3.4. Relación entre el sistema ECI y el ECEF.	54
4.1. Error entre la solución obtenida con el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, tomando un paso $h = 1$ s, y la solución obtenida con la ecuación de órbita. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).	62
4.2. Aceleración debida a las componentes del modelo de potencial gravitatorio.	64
4.3. Aceleración debida a la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.	65
4.4. Modelo de la densidad atmosférica en función de la altura.	66
4.5. Error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones; utilizando en ambos casos el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).	67
4.6. Error entre la solución obtenida en coordenadas ECEF con el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, tomando un paso $h = 1$ s, y la solución obtenida con la ecuación de órbita (y la transformación correspondiente a coordenadas ECEF). Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).	68
4.7. Error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones, ambos formulados en coordenadas ECEF; utilizando en ambos casos el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).	69
4.8. Error entre la solución obtenida con el modelo linealizado y la solución obtenida con el modelo no lineal, para distintos valores de paso h . Modelo con (línea llena) y sin (línea punteada) perturbaciones.	70
5.1. Sistema Lineal Discreto.	75
5.2. Estimación del estado <i>a priori</i> y <i>a posteriori</i> , y sus respectivas matrices de covarianza del error de estimación.	76
5.3. Representación en diagrama en bloques de la operación del algoritmo del filtro de Kalman.	78
6.1. Estructura del Mensaje de Navegación de GPS.	86
6.2. Estructura del Mensaje de Navegación de GLONASS.	87

6.3. Ejemplo de almacenamiento de una palabra del mensaje de navegación de GPS en una variable de 32 bits.	90
6.4. Ejemplo de almacenamiento de una línea del mensaje de navegación de GLONASS en tres variables de 32 bits.	92
6.5. Probabilidad (frecuencia relativa) de obtener solución de posición con los diferentes casos analizados previamente, y considerando diferentes máscaras de elevación.	123
6.6. Error en la solución con un único sistema (GPS en este caso) en ausencia de ruido.	125
6.7. Error en la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS en este caso) en ausencia de ruido, considerando una única incógnita de sesgo.	125
6.8. Error en la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, considerando una única incógnita de sesgo.	126
6.9. Error en las iteraciones de la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS) en ausencia de ruido, con los tres métodos propuestos.	128
6.10. Error en las iteraciones de la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, con los tres métodos propuestos.	129
6.11. Error en la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS en este caso) en ausencia de ruido, al incluir dos incógnitas de sesgo.	130
6.12. Error en la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, al incluir tres incógnitas de sesgo.	130
7.1. Etapa de RF.	137
7.2. Etapa de procesamiento digital.	137
7.3. Modelo de ingeniería del RGPS (ambas caras).	138
7.4. RGPS y TDP.	139
7.5. Diagrama en bloques del lazo de seguimiento de fase.	141
7.6. Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0 y 30° (—); satélites asignados a un canal para, búsqueda (●), adquirido (●), sincronizado (●) y con efemérides decodificadas (●).	146
7.7. Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0 y 30° (—); satélites asignados a un canal para, búsqueda (—), adquirido (—), sincronizado(—) y con efemérides decodificadas (—).	147
7.8. Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0 y 30° (—); satélites asignados a un canal para, búsqueda (—), adquirido (—), sincronizado(—) y con efemérides decodificadas (—).	148

7.9. Media (*) e intervalo $\pm 1\sigma$ (+) de la relación de potencia de portadora a ruido (C/N_0) en función de la elevación.	149
7.10. Porcentaje de muestras analizadas en función de la elevación.	150
7.11. Porcentaje de muestras detectadas, sobre el total de detectadas, en función del C/N_0	150
7.12. Relación C/N_0 en función del tiempo.	151
7.13. Comparación entre la solución de posición del RGPS y la del GPS de plataforma (interpolación). Coordenadas ECEF x (—), y (—), z (—).	152
7.14. Comparación entre la solución de velocidad del RGPS y la del GPS de plataforma (interpolación). Coordenadas ECEF x (—), y (—), z (—).	153
7.15. Cantidad de satélites utilizados en la navegación.	153
7.16. Soluciones de posición obtenidas por el RGPS con cuatro o más satélites (○), con entre 1 y 3 satélites (○), y con 0 satélites (○), comparadas con la solución del GPS de plataforma.	154
7.17. Error en la solución de posición obtenida a bordo (OB) y mediante post-procesamiento (PP).	156
7.18. Error en la solución de velocidad obtenida a bordo (OB) y mediante post-procesamiento (PP).	157
7.19. Relación señal a ruido en las mediciones utilizadas.	157
8.1. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistema GPS.	174
8.2. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistema GPS.	175
8.3. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistema GPS.	176
8.4. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistema GPS.	177
8.5. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistema GPS.	178
8.6. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistema GPS.	179

- 8.7. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\ddot{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistema GPS. En todos los casos se toma $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$ 180
- 8.8. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$. . . 182
- 8.9. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 183
- 8.10. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,5$. 184
- 8.11. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,5$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 185
- 8.12. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$ 186
- 8.13. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 187
- 8.14. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$. 188
- 8.15. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 189
- 8.16. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$ 190

- 8.17. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 191
- 8.18. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$ 192
- 8.19. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 193
- 8.20. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$ 194
- 8.21. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, y correlación de los residuos de post-filtrado, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se compara con la solución puntual (sesgo y deriva). Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 195
- 8.22. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$ 196
- 8.23. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$ 197
- 8.24. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$ 197
- 8.25. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$ 200
- 8.26. Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$ 201

8.27. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	201
8.28. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	202
8.29. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	202
8.30. Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	203
8.31. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	203
8.32. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	204
8.33. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	204
8.34. Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	205
8.35. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	205
8.36. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	206
8.37. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$, con respecto a la solución tomada como referencia.	207
8.38. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{j}} = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$, con respecto a la solución tomada como referencia.	208

8.39. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 4,0 \times 10^{-2}$, con respecto a la solución tomada como referencia.	209
8.40. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$, con respecto a la solución tomada como referencia.	210
8.41. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$, con respecto a la solución tomada como referencia.	211
9.1. Aceleraciones de Thrust aplicadas.	215
9.2. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	216
9.3. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	217
9.4. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	218
9.5. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	218
9.6. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	219
9.7. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	220
9.8. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	220

- 9.9. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 221
- 9.10. Error en las soluciones de sesgo y deriva y aceleración con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 222
- 9.11. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 222
- 9.12. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 223
- 9.13. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 224
- 9.14. Error en las solución de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 224
- 9.15. Cantidad de satélites visibles. 225
- 9.16. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 227
- 9.17. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 228
- 9.18. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 229

- 9.19. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 230
- 9.20. Error en las soluciones de aceleración (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. 230
- 9.21. Error en las soluciones de posición y velocidad para el modelo Dinámico I con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 231
- 9.22. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 232
- 9.23. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 233
- 9.24. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 234
- 9.25. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 235
- 9.26. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 236
- 9.27. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. 236

9.28. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).	237
9.29. Error en las soluciones de sesgo y deriva y aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).	238
9.30. Error en las solución de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites.	238
9.31. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	239
9.32. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	240
9.33. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación).	241
9.34. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	242
9.35. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	242
A.1. Diagrama de dos masas puntuales en un marco de referencia inercial.	250
A.2. Marco de referencia solidario al cuerpo m_1	251
A.3. Órbita elíptica.	255
A.4. Vinculación entre la anomalía verdadera, ν , y la anomalía excéntrica, E	258
A.5. Orientación del plano orbital con respecto al marco ECI (ángulos Ω , ω e i).	259

B.1. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS. . . .	264
B.2. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS. . .	265
B.3. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS.	266
B.4. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS. . . .	267
B.5. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS. . . .	268
B.6. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS. . . .	269
B.7. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\ddot{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistema GLONASS. En todos los casos se toma $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$	270
B.8. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$	271
B.9. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	272
B.10. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$	273
B.11. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	274

B.12. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$	275
B.13. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	276
B.14. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$	277
B.15. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	278
B.16. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$	279
B.17. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	280
B.18. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$	281
B.19. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	282
B.20. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$	283
B.21. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$	284

B.22. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$	284
B.23. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS.	287
B.24. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS.	288
B.25. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS.	289
B.26. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS.	290
B.27. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS.	291
B.28. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS.	292
B.29. Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\ddot{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistemas GPS y GLONASS. En todos los casos se toma $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$	293
B.30. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$	294
B.31. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.	295
B.32. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$	296

- B.33. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$. Se compara con la solución puntual (sesgo y deriva). 297
- B.34. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 3,5 \times 10^{-2}$ 298
- B.35. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 3,5 \times 10^{-2}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 299
- B.36. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$ 300
- B.37. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 301
- B.38. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$ 302
- B.39. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 303
- B.40. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$ 304
- B.41. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso. 305

B.42. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$	306
B.43. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$	307
B.44. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$	307
C.1. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	310
C.2. Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	310
C.3. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	311
C.4. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	311
C.5. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	312
C.6. Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	312
C.7. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	313
C.8. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	313
C.9. Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	314

C.10.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	314
C.11.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	315
C.12.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	315
C.13.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	316
C.14.Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	317
C.15.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	317
C.16.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	318
C.17.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	318
C.18.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	319
C.19.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	319
C.20.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	320
C.21.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	320

C.22.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	321
C.23.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	321
C.24.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	322
C.25.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	323
C.26.Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	324
C.27.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	324
C.28.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	325
C.29.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	325
C.30.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	326
C.31.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	326
C.32.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	327
C.33.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	327

C.34.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	328
C.35.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	328
C.36.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	329
C.37.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	330
C.38.Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	331
C.39.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	331
C.40.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	332
C.41.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	332
C.42.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	333
C.43.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	333
C.44.Erroros cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	334
C.45.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	334

C.46.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	335
C.47.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	335
C.48.Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	336
C.49.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	337
C.50.Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	338
C.51.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	338
C.52.Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	339
C.53.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	339
C.54.Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	340
C.55.Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	340
C.56.Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	341
C.57.Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	341

C.58. Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	342
C.59. Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	342
C.60. Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$	343
D.1. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	347
D.2. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	348
D.3. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	349
D.4. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	349
D.5. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	350
D.6. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	351
D.7. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	352
D.8. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de <i>thrust</i>	352

- D.9. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 353
- D.10. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 354
- D.11. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 354
- D.12. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 355
- D.13. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 356
- D.14. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 356
- D.15. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 357
- D.16. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 358
- D.17. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 358
- D.18. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 359

- D.19. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 360
- D.20. Error en las soluciones aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 360
- D.21. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 361
- D.22. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 362
- D.23. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 362
- D.24. Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 363
- D.25. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 364
- D.26. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*. 364
- D.27. Cantidad de satélites visibles del sistema GLONASS. 365
- D.28. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 367
- D.29. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 368

- D.30. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 369
- D.31. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 370
- D.32. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. . . . 370
- D.33. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 371
- D.34. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 372
- D.35. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 373
- D.36. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 374
- D.37. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 375
- D.38. Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{j}} = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—). 376

D.39. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites.	376
D.40. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).	377
D.41. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).	378
D.42. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites.	378
D.43. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	379
D.44. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	380
D.45. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación).	381
D.46. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	382
D.47. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).	382
D.48. Cantidad de satélites visibles de los sistemas GPS y GLONASS.	383

- D.49. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 385
- D.50. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 386
- D.51. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 387
- D.52. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 388
- D.53. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites. 388
- D.54. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,035$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 389
- D.55. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,035$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 390
- D.56. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 391
- D.57. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 392

- D.58. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 393
- D.59. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 394
- D.60. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. 394
- D.61. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 395
- D.62. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—). 396
- D.63. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. 396
- D.64. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación). 397
- D.65. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación). 398
- D.66. Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación). 399

- D.67. Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación). 400
- D.68. Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación). 400

LISTA DE TABLAS

2.1. Diferentes Bloques que conforman la constelación GPS.	25
2.2. Diferentes Series que conforman la constelación GLONASS.	29
2.3. Características de las señales de uso civil GPS.	33
2.4. Características de las señales de uso civil GLONASS.	34
2.5. Frecuencia nominal de portadora en las sub-bandas L1 y L2 de GLONASS. .	35
3.1. Parámetros del elipsoide WGS-84.	47
3.2. Parámetros del elipsoide PZ-90.	48
3.3. Parámetros de la transformación entre los marcos de referencia de GPS y GLONASS.	48
6.1. Máscaras para calcular los p_i	91
6.2. Máscaras para calcular los c_i	92
6.3. Parámetros del mensaje de navegación de GPS.	95
6.4. Características de los parámetros del mensaje de navegación de GPS.	96
6.5. Interpretación del parámetro A_{cc}	96
6.6. Parámetros del mensaje de navegación de GLONASS.	98
6.7. Parámetros del mensaje de navegación de GLONASS.	99
6.8. Interpretación del parámetro F_t	100
6.9. Valores promedio de los parámetros utilizados para el cálculo del retardo troposférico.	111

6.10. Variación de los parámetros utilizados para el cálculo del retardo troposférico.	111
7.1. Información de Navegación y Canales.	144
8.1. Diferentes modelos a analizar.	169
8.2. Resultados de comparación de los diferentes modelos.	171
8.3. Resultados de comparación de los diferentes modelos.	172
8.4. Comparación de los valores óptimos de $\sqrt{\epsilon_p^2}$ para el caso de utilizar GPS, GLONASS, ó GPS/GLONASS para los diferentes modelos.	198
8.5. Comparación de los valores óptimos de $\sqrt{\epsilon_v^2}$ para el caso de utilizar GPS, GLONASS, ó GPS/GLONASS para los diferentes modelos.	199
B.1. Resultados de comparación de los diferentes modelos. Caso GLONASS. . . .	262
B.2. Resultados de comparación de los diferentes modelos. Caso GLONASS. . . .	263
B.3. Resultados de comparación de los diferentes modelos, utilizando los sistemas GPS y GLONASS.	285
B.4. Resultados de comparación de los diferentes modelos, utilizando los sistemas GPS y GLONASS.	286

ABREVIATURAS Y DEFINICIONES

AGC Automatic **G**ain **C**ontrol; Control Automático de Ganancia.

AS Antispoofing.

AWGN Additive **W**hite **G**aussian **N**oise; Ruido Aditivo Blanco y Gaussiano.

BIH Bureau **I**nternational de l'**H**eure.

BPSK Binary **P**hase-**S**hift **K**eying.

C/A Coarse **A**cquisition.

C/N₀ Potencia de Portadora (**C**) a Densidad Espectral de Potencia de Ruido (**N₀**).

CDMA Code **D**ivision **M**ultiple **A**ccess; Acceso Múltiple por División de Código.

CETT Centro **E**spacial **T**eófilo **T**abanera.

CIOp Centro de **I**nvestigaciones **Ó**pticas.

CONAE **C**omisión **N**acional de **A**ctividades **E**spaciales.

COTS Commercial **O**ff-**T**he-**S**helf; Componente Comercial “sacado del estante” (disponible en el mercado sin necesidad de solicitar características particulares al fabricante).

DLL Delay **L**ocked **L**oop; Lazo de Enganche de Retardo.

DOP Dilution **O**f **P**recision.

DSSS Direct-**S**equence **S**pread **S**pectrum.

ECEF Earth **C**entered, Earth **F**ixed.

ECI Earth **C**entered, **I**nertial; Inercial Centrado en la Tierra.

EKF Extended **K**alman **F**ilter; Filtro de Kalman Extendido.

ESA European Space Agency.

FDMA Frequency Division Multiple Access; Acceso Múltiple por División de Frecuencia.

FI Frecuencia Intermedia.

GLONASS GLObalnaya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema.

GNSS Global Navigation Satellite System; Sistema Global de Navegación por Satélite.

GPS Global Positioning System.

HOW Hand Over Word.

IERS International *Earth Rotation and Reference Systems Service*; Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia.

INVAP INVestigación APlicada.

IODC Issue Of Data, Clock.

IODE Issue Of Data, Ephemeris.

JPL Jet Propulsion Laboratory.

KF Kalman Filter; Filtro de Kalman.

LEICI Laboratorio de Electrónica Industrial Control e Instrumentación.

LEO Low Earth Orbit.

LNA Low Noise Amplifier; Amplificador de Bajo Ruido.

MBOC Multiplexed Binary Offset Carrier.

NAVSTAR NAVigation using Signal Time And Ranging.

NRZ Non Return to Zero.

OBT On Board Time; Tiempo de a Bordo.

OD Orbit Determination; Determinación de Órbita.

PKF Positioning Kalman Filter; Filtro de Kalman de Posición.

PLL Phase-Locked Loop; Lazo de Enganche de Fase.

PRN Pseudo-Random Noise; Secuencia Pseudo-Aleatoria.

PZ Parametry, Zemli; Parámetros de la Tierra.

RF Radio Frequency.

RGPS Receptor de GPS.

RTC Real Time Clock; Reloj de Tiempo Real.

SA Selective Availability; Disponibilidad Selectiva.

SABIA-Mar Satélite Argentino Brasileño para Información del Mar.

SAC-D Satélite de Aplicaciones Científicas **D**.

SAOCOM Satélite Argentino de Observación Con Microondas.

SFID Subframe, **ID**entification; Identificador de Subtrama.

SPKF Sigma-**P**oint **K**alman **F**ilter.

SV Space **V**ehicle, Vehículo Espacial (satélite).

SVID Space **V**ehicle **ID**entification; Identificador del Vehículo Espacial (satélite).

SVN Space **V**ehicle **N**umber; Número de Vehículo Espacial (satélite).

TCXO Temperature **C**ompensated **X**-tal (Crystal) **O**scillator; Oscilador de Cristal
Compensado en Temperatura.

TLE Two **L**ine **E**lements.

TLM **TeLeMe**try word; Palabra de Telemetría.

TOA Time **O**f **A**rrival.

TOW Time **O**f **W**eek.

UART Universal **A**synchronous **R**eceiver-**T**ransmitter; Transmisor-Receptor Asíncrono
Universal.

UFA Unambiguous **F A**.

UKF Unscented **K**alman **F**ilter.

USNO United **S**tates **N**aval **O**bservatory; Observatorio Naval de los Estados Unidos.

UTC Coordinated **U**niversal **T**ime.

VENG Vehículos **E**spaciales de **N**ueva **G**eneración.

WGS World **G**eodetic **S**ystem.

WN **W**eek **N**umber.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Háblame, Musa, de aquel varón de multiforme ingenio que, después de destruir la sacra ciudad de Troya, anduvo peregrinando larguísimo tiempo, vio las poblaciones y conoció las costumbres de muchos hombres y padeció en su ánimo gran número de trabajos en su navegación por el Ponto, en cuanto procuraba salvar su vida y la vuelta de sus compañeros a la patria. Mas ni aun así pudo librarlos, como deseaba, y todos perecieron por sus propias locuras. ¡Insensatos!

Homero, *Odisea*.

Navigare necesse est, vivere non est necesse.

Cnaeus Pompeius Magnus.

Navega el navegante aunque sepa que jamás tocará las estrellas que lo guían.

Eduardo Galeano, *Espejos*.

El término navegación proviene de las raíces del latín *navis* (navío, embarcación), y *agere* (conducir, guiar); y en términos generales se utiliza para designar al *proceso que permite conducir a una persona o vehículo a través de su movimiento entre dos puntos cualesquiera, siguiendo una trayectoria establecida*. En esta definición podemos distinguir el concepto de *determinación de la trayectoria*, lo que aquí entenderemos como determinación del vector de estados del vehículo, típicamente posición y velocidad (y eventualmente orientación) en cualquier instante dado; y el concepto de *guiado*, lo que corresponde a controlar y dirigir los

actuadores de que se disponga a los efectos de que el vehículo alcance la meta establecida, desplazándose por la trayectoria deseada.

En el alcance de nuestro trabajo, acotaremos esta definición para referirnos más precisamente a la estimación de la posición y la velocidad de un vehículo en movimiento, en el instante presente o con un mínimo retardo tolerable según la aplicación, en base a mediciones tomadas por instrumentos colocados a bordo del propio vehículo. Quizás una definición más precisa del término podría ser *estimación de estados para la navegación*; pero por simplicidad lo denominaremos simplemente *navegación*.

Una de las tecnologías modernas que permiten llevar a cabo esta estimación son los denominados Sistemas Globales de Navegación por Satélite ó GNSS (por las siglas en inglés de *Global Navigation Satellite Systems*). En la actualidad existen dos sistemas GNSS que se encuentran ciento por ciento operativos, el sistema norteamericano GPS (de sus siglas en inglés, *Global Positioning System*) y el sistema ruso GLONASS (de sus siglas en idioma ruso transliterado, *GLObal'naya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*). Además, existen otros sistemas GNSS en etapa de diseño o desarrollo, de los cuales los más avanzados son el sistema Galileo de la Unión Europea, y el sistema BeiDou de la República Popular China.

Cualesquiera de estos sistemas permite a un usuario, equipado con el receptor correspondiente, obtener de manera prácticamente continua la información sobre posición, velocidad y tiempo necesaria para la mencionada operación de navegación, dondequiera que este usuario se encuentre sobre la superficie terrestre. Para ello, cada sistema posee una constelación de satélites que transmiten señales electromagnéticas que permiten, mediante un procesamiento adecuado, estimar la distancia (lo que se conoce como capacidad de *ranging*) y velocidad relativa entre el receptor (más exactamente, el centro de fase de la antena del receptor) y el satélite que las transmite; además de transportar información que permite conocer la posición y velocidad del propio satélite transmisor. El receptor del usuario interviene de manera pasiva en el sistema, dado que únicamente recibe las señales transmitidas desde los satélites (no transmite información *hacia* el sistema) lo cual permite brindar servicio a un número ilimitado de usuarios. Las principales limitaciones de cobertura están dadas por las condiciones de propagación de estas señales electromagnéticas.

Desde la puesta en órbita en el año 1957 del primer vehículo satelital construido por el hombre, el satélite Sputnik I, por la entonces Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS); los satélites han mostrado su utilidad en diferentes campos entre los cuales podemos citar: la obtención de mediciones *in-situ* de la atmósfera alta y la magnetósfera terrestre; la observación global de la Tierra con una gran variedad de instrumentos como cámaras en las variadas regiones del espectro y radares tanto activos como pasivos (tanto para aplicaciones científicas como militares); la instalación de telescopios que, evitando la distorsión de la atmósfera terrestre, habilitan una exploración del universo en diversas regiones del espectro electromagnético; el establecimiento de enlaces de comunicaciones; además de los previamente mencionados sistemas GNSS (Montenbruck y Gill, 2012).

Asociado al desarrollo de los vehículos satelitales, se encuentra el desarrollo de los vehículos lanzadores necesarios para la colocación en órbita. En general, a los vehículos satelitales en conjunto con los cohetes lanzadores (además de una gran variedad de otros vehículos) se los clasifica dentro de la categoría de *vehículos aeroespaciales*.

La navegación de este tipo de vehículos es uno de los campos en los que resultan de gran utilidad la utilización de los receptores GNSS tanto como único instrumento encargado

de estimar posición y velocidad, como integrado con un conjunto de otros instrumentos como acelerómetros, giróscopos, magnetómetros, etc. Esta aplicación, presenta una serie de exigencias tanto sobre el diseño de los receptores como en los algoritmos de procesamiento y de navegación, que prácticamente imposibilita la utilización de receptores comerciales (de consumo masivo).

Una de estas limitaciones prácticas, en el caso de GPS, es la impuesta por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos, que exige que los receptores comerciales posean cotas máximas de altura y velocidad (p. ej., 60 000 pies y 1000 millas náuticas por hora¹), las que se encuentran por debajo de las condiciones de funcionamiento de un vehículo aeroespacial. Además, en general las rutinas de adquisición y seguimiento de señal y los algoritmos de procesamiento que incorporan los receptores comerciales no están preparados para operar en las condiciones de dinámica media o alta de un vehículo aeroespacial.

Por otra parte, las aplicaciones aeroespaciales exigen grados de fiabilidad que en general no están contemplados en el diseño de los receptores comerciales. Estos factores, sumados a consideraciones de soberanía e independencia tecnológica, hacen que resulte de gran importancia el desarrollo de receptores GNSS de altas prestaciones, ligado al desarrollo de los mencionados vehículos.

Esta tesis se enmarca en lo que podemos indicar como el cruce o intersección de tres campos o disciplinas: los *vehículos aeroespaciales*, los sistemas *GNSS* y los algoritmos de *navegación*, esquematizado en la figura 1.1. En la intersección de dos de estos campos podemos identificar aplicaciones como la navegación de vehículos aeroespaciales mediante la utilización de otro tipo de sensores (no necesariamente GNSS), la utilización de los sistemas GNSS en vehículos aeroespaciales para tareas que exceden la navegación (instrumentos de ciencia), y el empleo de sistemas GNSS en navegación de otro tipo de vehículos (que exceden ampliamente a la de los vehículos aeroespaciales).

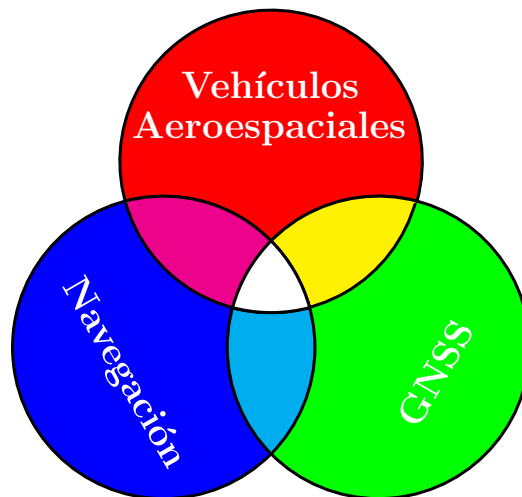


Figura 1.1: Esquema de los campos o disciplinas involucrados en la tesis.

Si bien varios de los algoritmos analizados se extienden a la navegación de diferentes vehículos, nos enfocaremos en particular en los denominados satélites de órbita baja o LEO. Luego de establecer de manera sucinta las definiciones y principales aplicaciones de los LEO,

¹Que equivalen respectivamente a 18 288 metros y 1852 km/h ó 514 m/s.

analizaremos los antecedentes de utilización de receptores GNSS en la navegación de este tipo de vehículos. Finalmente, haremos un breve repaso de la evolución de los desarrollos argentinos en materia de vehículos aeroespaciales.

1.1. Satélites LEO

Si bien los límites no son estrictos, se denomina típicamente Órbita Baja Terrestre (LEO, de *Low Earth Orbit*) a aquella cuya altitud se encuentra entre los 200 km y los 2000 km, y *satélite LEO* a un satélite ubicado en una de estas órbitas.

Los requerimientos de diversas aplicaciones en conjunto con las restricciones técnicas y comerciales de los vehículos lanzadores existentes, han dado lugar a que la gran mayoría de los satélites actuales se ubiquen en órbitas LEO prácticamente circulares con altitudes entre los 300 km y los 1500 km (Montenbruck y Gill, 2012). En las órbitas demasiado bajas, el excesivo roce con la atmósfera provoca una rápida pérdida de energía y decaimiento del vehículo, mientras que órbitas demasiado altas requieren mayores potencias en los enlaces de comunicaciones, además de demandar una energía mayor para la puesta en órbita.

Una de las principales aplicaciones de los satélites LEO consiste en la observación de la Tierra desde el espacio mediante sensores remotos, lo cual ha cambiado la percepción del mundo, habilitando por primera vez en la historia una visión del mismo como un sistema total. Esto ha dado lugar a modificaciones radicales en diferentes disciplinas científicas tales como la meteorología, la oceanología, la hidrología, la geología, la geografía, la silvicultura, la agricultura, la geodinámica, las interacciones Sol-Tierra, entre muchas otras (Kramer, 2012).

Los satélites LEO también se utilizan para proveer servicios de telecomunicaciones como por ejemplo la constelación de satélites *Iridium* (Bates, 2002); para la observación del espacio siendo uno de los mayores ejemplos el telescopio espacial *Hubble*; entre otras aplicaciones.

Un concepto novedoso en la tecnología satelital consiste en la utilización de múltiples satélites pequeños *volando en formación* de forma coordinada para lograr el mismo objetivo que un satélite más grande y generalmente más costoso. Este concepto presenta los siguientes beneficios potenciales: los diseños resultan más simples y con menores tiempos de construcción, el reemplazo es más económico y se permite una mayor redundancia, y permiten lograr una mayor resolución en diversas aplicaciones (NASA-GSFC, 2001). Cabe mencionar que estos satélites más pequeños pueden ser puestos en órbita mediante la utilización de lanzadores menos potentes y más económicos.

Completando la clasificación según la altura, se denomina típicamente Órbita Media Terrestre (MEO, de *Mean Earth Orbit*) a aquella cuya altitud se encuentra entre los 2000 km y los 35 786 km; Órbita Geosincrónica Terrestre (GEO, de *Geosynchronous Earth Orbit*) a aquella con una altitud de 35 786 km; y Órbita Alta Terrestre (HEO, de *High Earth Orbit*) a aquella con una altitud mayor a 35 786 km. A los satélites ubicados en cada una de estas órbitas se los denomina satélites MEO, satélites GEO y satélites HEO, respectivamente. Las constelaciones de los diferentes sistemas GNSS están compuestas de satélites MEO, mientras que los satélites GEO son utilizados principalmente como enlaces de comunicaciones².

²Algunos sistemas GNSS utilizan satélites GEO para transmitir correcciones válidas en ciertas regiones, como parte de lo que se denomina *GNSS augmentation*, que entre otras importantes aplicaciones, está orientada

1.2. Utilización de GNSS en satélites LEO

La utilización de receptores GNSS en satélites LEO ofrece una serie de ventajas con respecto a otros métodos pre-existentes. En primer lugar, por la ubicación relativa de los satélites LEO con respecto a los satélites de las constelaciones GNSS, la disponibilidad de mediciones es similar a la observada en tierra, con la ventaja que en estas aplicaciones no existen prácticamente obstáculos para la visibilidad, y existen menos fuentes de multicamino e interferencia. En general, los compromisos de la visibilidad están dados por la orientación de la antena receptora, ante cambios de la orientación de los vehículos por otros requisitos de la misión (orientación de paneles solares, orientación de diversos instrumentos, maniobras de supervivencia y/o corrección de órbita); el multicamino está dado por las reflexiones en la estructura del satélite, lo que presenta un escenario al menos controlable, que permite tomar medidas para su mitigación³; mientras que las principales fuentes de interferencia electromagnética provienen de los propios instrumentos a bordo del satélite, nuevamente contando con un escenario al menos previsible. Es decir, que en principio, y salvo fallas en el propio sistema GNSS, se puede garantizar un alto porcentaje de cobertura en cualquier punto de la trayectoria.

En segundo lugar, la utilización de receptores GNSS se presenta como una opción de bajo costo en relación a otros métodos, tanto en el instrumental y consumo de potencia requerido a bordo del satélite como en la necesidad de disposición de estaciones de seguimiento en tierra. En este sentido [Rush \(2000\)](#) establece la comparación con la técnica radiométrica consistente en medir la distancia a las antenas de comunicaciones ubicadas en tierra, o en el caso que existan, a los satélites de retransmisión GEO. Mientras que para la tarea de comunicaciones bidireccional basta con que el satélite incorpore un transceptor, para la determinación de la posición se requiere incorporar un transponder que además de proveer las comunicaciones bidireccionales sea capaz de responder a las señales de *ranging*. Este último en general es más costoso, más pesado y consume más potencia que un transceptor.

Además, la utilización de la técnica radiométrica requiere el establecimiento del contacto de manera frecuente con la estación terrena (o el enlace GEO), aunque tal contacto no sea requerido por las tareas de comunicaciones, y el procesamiento de las mediciones para la obtención de los estados del satélite; todo lo cual involucra una carga adicional para el segmento terreno. La latencia con la cual se debe ejecutar el proceso depende del nivel de precisión requerido, de la disponibilidad de enlaces y de la cantidad de maniobras realizadas por el satélite ([Rush, 2000](#)).

Por su parte, [Yunck et al. \(1985\)](#) remarcan que el posicionamiento preciso de satélites en ese momento se lograba mediante la disposición de estaciones de seguimiento en tierra que empleaban técnicas basadas en láser y efecto Doppler; lo cual requería disponer de hasta 40 de dichas estaciones para conseguir una alta precisión, además de asegurar una buena cobertura.

El primer caso catalogado de utilización de un receptor de GPS a bordo de un vehículo espacial corresponde al utilizado en el Landsat-4 ([Montenbruck et al., 2008](#)), puesto en órbita en julio de 1982. Más precisamente, los satélites Landsat-4 y Landsat-5 incorporaban un instrumento denominado GPSPAC (de *GPS PAC*kage) utilizado para evaluar el desempeño

hacia la ayuda para el aterrizaje de aviones.

³Ver por ejemplo la ubicación de la antena receptora en [Fu et al. \(1994\)](#).

y la exactitud de la información orbital provista por la utilización a bordo de un receptor GPS. Otro aspecto del experimento consistió en determinar posibles mejoras en el rendimiento del filtro de Kalman implementado en el software del GPSPAC, mediante variantes tanto en las constantes del filtro como en los algoritmos utilizados (Wood, 1988).

Por su parte la misión de topografía de la superficie del océano TOPEX/Poseidon (*Ocean Topographic Experiment*), puesta en órbita en el año 1992, llevaba a bordo un receptor de GPS desarrollado por la NASA⁴ denominado GPSDR (*GPS Demonstration Receiver*). El post-procesamiento en tierra de las mediciones obtenidas por este receptor GPS en órbita, en combinación con las mediciones obtenidas por una red de 9 receptores GPS distribuidos en tierra en ubicaciones conocidas, se proponía una meta de precisión superior a los 10 cm (RMS). Para lograr este objetivo, con la precisión en las efemérides provistas por el sistema GPS en ese momento, se optó por resolver de manera conjunta la estimación de la órbita del satélite TOPEX/Poseidon, y de las órbitas de los satélites GPS involucrados (Yunck *et al.*, 1985; Bertiger *et al.*, 1994).

En la misión TOPEX/Poseidon, además de contar con la solución en base a las mediciones del receptor de GPS a bordo, el satélite era seguido de manera simultánea por los sistemas *Tracking and Data Relay Satellite* (TDRS), *Doppler Orbitography and Radio positioning Integrated by Satellite* (DORIS), y *Satellite Laser Ranging* (SLR). La comparación de las soluciones provistas por estas cuatro fuentes permitió demostrar la capacidad de determinar la distancia a un punto de referencia en la Tierra con el sistema GPS (mediante el mencionado post-procesamiento de las mediciones obtenidas a bordo) con una precisión de 5 cm (Rush, 2000). Esto constituyó una de las más notables demostraciones de la potencial precisión de la determinación de la posición de satélites LEO utilizando el sistema GPS.

Resumiendo y ampliando lo anterior, en Bock *et al.* (2002) se menciona que las primeras misiones donde se utilizó GPS para la determinación de órbita fueron el satélite de sensado remoto Landsat-5, lanzado en marzo de 1984, el satélite con radar altimétrico TOPEX/Poseidon, lanzado en agosto de 1992, y el satélite de sondeo atmosférico GPS/MET, lanzado en abril de 1995.

Una exposición interesante de las primeras técnicas utilizadas para la determinación de órbita (OD de *Orbit Determination*) es presentada en Bisnath y Langley (1999). Allí se describen brevemente, se comparan las precisiones alcanzadas, y se discuten las debilidades de las tres estrategias básicas utilizadas, denominadas: *dinámica*, *cinemática* o *no-dinámica*, e *híbrida* o *dinámica-reducida*. Esta exposición se basa principalmente y puede complementarse con las expuestas por Yunck (1996) y Wu *et al.* (1991).

En la estrategia dinámica se emplean modelos matemáticos precisos de las propiedades físicas y de las fuerzas que actúan sobre el satélite LEO (referidos en general como *modelos dinámicos*) para calcular, mediante las restricciones de la segunda ley de Newton, un modelo de la aceleración que afecta al satélite en función del tiempo. Partiendo de una trayectoria nominal, con ciertas condiciones iniciales, se obtiene una nueva trayectoria mediante la doble integración de la aceleración así modelada. La trayectoria se estima iterativamente seleccionando la que mejor ajuste (p. ej. en sentido de menor error cuadrático medio) las mediciones GPS (absolutas o diferenciales) pre-procesadas (Bisnath y Langley, 1999).

Esta estrategia de OD también permite la estimación simultánea de otros parámetros para mejorar el ajuste entre la trayectoria nominal y las mediciones. Estos parámetros se pueden

⁴Más precisamente, desarrollado y construido por Motorola bajo contrato del JPL (Fu *et al.*, 1994).

adjudicar a modelos de perturbaciones y parámetros geométricos (por ejemplo, coeficientes del modelo de gravedad y las coordenadas de la estación de observación terrestre), o a determinados parámetros empíricos. Si los modelos dinámicos son adecuados, y se cuenta con una cantidad suficiente de observaciones, esta estrategia permite reducir los efectos del ruido en las mediciones. Sin embargo, los errores en el modelado pueden redundar en grandes errores sistemáticos. Por ejemplo, la necesidad de estimar parámetros empíricos indican una debilidad en los modelos dinámicos, que generalmente aumentan cuando se reduce la altitud de la órbita, y cuando se aumenta la dinámica del satélite (Bisnath y Langley, 1999).

La estrategia OD *cinemática* o *no dinámica* prescinde del modelo dinámico, y se basa en incorporar a la formulación del Filtro de Kalman implementado⁵ para estimar los estados del vehículo, un vector de ruido de proceso que represente el efecto de las fuerzas intervinientes en cada instante de medición. Ajustar correctamente el ruido de proceso permite reducir casi completamente los efectos de la dinámica; aunque en detrimento del suavizado de la trayectoria provisto por las restricciones del modelo dinámico en el proceso de estimación (Bisnath y Langley, 1999; Yunk, 1996).

La estrategia se basa casi exclusivamente en la precisión de las observaciones GPS, y en la geometría de observación; es decir, la ubicación relativa del satélite LEO, la red de receptores terrestres y la constelación de satélites GPS. La principal ventaja de esta implementación reside en que, particularmente a bajas altitudes, la trayectoria real del satélite LEO puede resultar más cercana a las estimaciones provistas por la solución GPS que a la trayectoria determinada en base al modelo dinámico (Bisnath y Langley, 1999; Yunk, 1996).

La estrategia *híbrida* o *dinámica reducida* propuesta por Wu *et al.* (1991) pretende aprovechar los puntos fuertes de las estrategias anteriores, tratando de balancear los errores cometidos por ellas: el error de modelado en la estrategia dinámica y el error de ruido de medición en la estrategia cinemática. Su base es la ponderación de los datos cinemático y dinámico mediante el ajuste del ruido de proceso en el filtrado de Kalman, mediante dos parámetros principales: la constante de tiempo de correlación en el intervalo de actualización, τ_i , y la varianza de estado estacionario σ_i^2 , en el error del modelo dinámico. Cuando $\tau_i \rightarrow \infty$ y $\sigma_i^2 \rightarrow 0$, la técnica se reduce a la estrategia dinámica, mientras que cuando $\tau_i \rightarrow 0$ y $\sigma_i^2 \rightarrow \infty$, la técnica aproxima la estrategia cinemática (Bisnath y Langley, 1999; Wu *et al.*, 1991).

En algunas aplicaciones resulta de utilidad contar además con un modelo adecuado del reloj de usuario. Por ejemplo Weinbach y Schön (2012) realizan un modelo del reloj a los efectos de mejorar la estimación de la solución de navegación puramente cinemática utilizando la señal GPS en el satélite GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*). En esta aplicación no se recurre a utilizar un modelo dinámico, ya que el objetivo científico de la misión consiste justamente en el relevamiento del campo gravitatorio.

En las técnicas expuestas previamente, el posicionamiento preciso con señales GNSS se basaba en combinar las mediciones tomadas a bordo del vehículo con mediciones tomadas en estaciones en tierra (realizando en muchos casos la estimación conjunta de la posición del satélite LEO, de la posición de los satélites de la constelación GNSS e incluso de las mismas estaciones terrenas). Sin embargo, con la mejora en la calidad de las efemérides provistas por los sistemas GNSS y la desactivación de la Disponibilidad Selectiva (SA, *Selective Availability*) la posibilidad de obtener una solución de navegación precisa en tiempo real y de manera autónoma se convirtió en una realidad (ver por ejemplo Montenbruck y Ramos-Bosch (2008)).

⁵En rigor, una versión del Filtro de Kalman Extendido, EKF.

Si bien no deben desconocerse tanto la capacidad de redundancia como las mejoras que ofrece la integración de otras técnicas de posicionamiento con la solución provista mediante GNSS como se expone por ejemplo en [Luthcke *et al.* \(2003\)](#), podemos mencionar que una tercer ventaja de la utilización de los receptores GNSS a bordo de los satélites LEO reside en la posibilidad de obtener la solución de posición y velocidad en tres dimensiones de manera autónoma, lo cual reduce los costos de operación en tierra, permite el etiquetado (georreferenciación) de los datos de ciencia, y habilita la navegación y guiado autónomo de dichos vehículos.

Por supuesto, la precisión alcanzable en tiempo real depende de las características del receptor empleado, y siempre que se cuente con la capacidad de almacenamiento y transmisión de las mediciones, se puede refinar mediante post-procesamiento, muy posiblemente en Tierra, de la solución obtenida a bordo. Según [Montenbruck *et al.* \(2008\)](#), luego de la desactivación de la SA, la precisión esperable de la navegación en tiempo real con GPS utilizando una única frecuencia (L1) para satélites LEO, se encontraba en el orden de 10 m. Utilizando receptores de doble frecuencia esta precisión en tiempo real podía mejorarse al orden de 1 m. En el post-procesamiento, utilizando mediciones de receptores doble frecuencia en combinación con algoritmos sofisticados de determinación de órbita de dinámica reducida, podían lograrse precisiones del orden de los 5 cm.

Un ejemplo de OD en tiempo real a bordo es descrito en [Gill *et al.* \(2001\)](#) aplicado al microsatélite alemán BIRD (*Bi-spectral InfraRed Detection*). En este caso, se implementa un EKF que toma como mediciones las soluciones de posición provistas por un receptor GPS, que en ausencia de SA ofrecen una precisión del orden de 10 m y son consideradas estadísticamente independientes; permitiendo obtener luego del filtrado una precisión del orden de 5 m. En esta implementación las estimaciones de velocidad provistas por el receptor se consideraron poco precisas y se optó por utilizarlas solamente en la inicialización, sin incorporarlas en el proceso de filtrado ([Gill *et al.*, 2001](#)).

Otras formulaciones de algoritmos basados en EKF para la determinación de la órbita a bordo y en tiempo real a partir de las mediciones GPS de simple frecuencia (L1) son expuestas por ejemplo en [Chiaradia *et al.* \(2003\)](#) y [Chiaradia *et al.* \(2013\)](#). Estos trabajos se enfocan principalmente en analizar el compromiso entre la complejidad del modelo y la precisión obtenida, con el objetivo de lograr algoritmos con baja carga computacional, requeridos para la implementación a bordo.

En [Hart *et al.* \(1997\)](#), [Chiaradia *et al.* \(2000\)](#), [Goldstein \(2000\)](#), [Zhou \(2004\)](#), [Gill *et al.* \(2004\)](#), [Montenbruck *et al.* \(2005\)](#), [Bock *et al.* \(2007\)](#), [Yu y You \(2011\)](#) y [Aghav y Gangal \(2012\)](#) los autores exponen diversos ejemplos de aplicación de determinación de órbita basados en filtrado con EKF. En cada caso se emplean receptores con características particulares dadas por el tipo de mediciones que utilizan (simple y doble frecuencia, código y fase) y por la capacidad de cómputo disponible. Un ejemplo de utilización de un receptor GPS basado en COTS para la navegación en tiempo real de satélites LEO es presentado en [Montenbruck *et al.* \(2006\)](#).

Existen aplicaciones en las que se presentan varias limitaciones o restricciones en los recursos disponibles a bordo del satélite para realizar la operación de navegación (como es el caso de micro o nanosatélites). En [Mander y Bisnath \(2013\)](#) se estudia el caso particular de contar con un receptor de simple frecuencia, con la necesidad de operación en tiempo real, utilizando un modelo dinámico limitado debido a las capacidades de cómputo reducidas y con la operación no-continua del receptor (10 minutos sobre 90) debido a restricciones de

consumo de potencia.

En Psiaki (2002) se presenta un caso extremo de restricciones en los recursos disponibles. Allí se considera el caso de un sistema de determinación de órbita de un satélite LEO utilizando las mediciones de un receptor de GPS que cuenta con un único canal, y conmuta de satélite en seguimiento cada 75 segundos con el propósito de obtener un grado de observabilidad razonable. El objetivo del estudio consiste en predecir la eficacia de este tipo de receptor de bajo consumo de potencia para la determinación autónoma de la órbita. El procesamiento se realiza mediante un EKF que utiliza un modelo dinámico de la órbita y de la deriva del reloj del receptor, y en los resultados de simulación se predicen errores entre 78 m y 144 m.

En el otro extremo, con el aumento de la capacidad de cómputo disponible a bordo, se habilita la incorporación de algoritmos de estimación más complejos. Por ejemplo en Kuang *et al.* (2004) se propone la utilización del algoritmo H_∞ extendido para la navegación autónoma de satélites LEO con señales GPS. Estos autores además realizan la comparación del desempeño de este esquema de filtrado con la que se obtendría con EKF. Por su parte Pinto *et al.* (2009) y Choi *et al.* (2010) proponen la utilización del Filtro de Kalman *Sigma Point* (SPKF) y del Filtro de Kalman *Unscented* (UKF). Un compendio de estos y otros métodos, aplicados a la determinación de órbita en tiempo real con señales de GPS puede verse en Erdoğan (2011).

Los receptores GNSS a bordo de los vehículos aeroespaciales también permiten contar con una referencia de tiempo precisa (solución de tiempo del receptor), sin necesidad de disponer de relojes costosos a bordo, con la cual por ejemplo se pueden etiquetar mediciones tomadas por los diferentes instrumentos de ciencia. Se ha probado también la capacidad de determinación de la orientación que ofrecen estos receptores (Cohen *et al.*, 1994; Lightsey *et al.*, 1994). Si bien la precisión alcanzada, del orden de $0,1^\circ$, es inferior a la que presentan otros instrumentos como los *star trackers*, permite contar con un instrumento adicional de resguardo. Asimismo, los receptores GNSS resultan de gran utilidad para el posicionamiento relativo preciso empleado por ejemplo en vehículos para vuelo en formación (Leung y Montenbruck, 2005; D'Amico *et al.*, 2009).

Además de las aplicaciones orientadas a navegación y tiempo, los receptores GNSS son cada vez más empleados como instrumentos científicos. Una de estas aplicaciones consiste en la técnica de radio ocultación que permite una medición tomográfica y de baja latencia de la tropósfera y la ionósfera, de gran utilidad en los pronósticos climáticos y los estudios atmosféricos. Por ejemplo, mediante la medición del corrimiento Doppler de la señal GNSS de un satélite que se encuentra ocultado por la Tierra, pero cuya señal se recibe a causa de la difracción en la atmósfera (mediante una antena GNSS adicional, convenientemente orientada), es posible estimar el índice de refracción de la atmósfera terrestre, lo que permite obtener perfiles de densidad, presión y temperatura atmosférica (y vapor de agua en la tropósfera baja) (Yunck y Melbourne, 1996). Experimentos con esta técnica se implementaron por ejemplo a bordo de los satélites de la constelación COSMIC, los satélites meteorológicos MetOp y el satélite argentino SAC-C.

Otro ejemplo de aplicación es la caracterización del campo gravitatorio terrestre; como en el mencionado satélite GRACE o en el satélite alemán CHAMP (*CHallenging Minisatellite Payload*). Este último integra un receptor GPS de doble frecuencia, en base a cuyas mediciones se han podido generar modelos de campo gravitatorio de alta fidelidad que superaron notablemente los resultados derivados de todas las misiones espaciales anteriores

(Montenbruck *et al.*, 2008).

Un tercer ejemplo interesante consiste en la recepción a bordo del satélite, además de la señal GNSS por rayo directo, de la señal proveniente de la reflexión en la superficie terrestre mediante una segunda antena convenientemente orientada; lo cual resulta útil para aplicaciones de altimetría biestática, determinación de la rugosidad de la superficie y de la velocidad del viento. En esta aplicación, las constelaciones GNSS ofrecen una gran cantidad de fuentes “naturales”, que eliminan la necesidad de contar con una fuente de señal electromagnética propia (Montenbruck *et al.*, 2008).

Si bien en estos ejemplos la utilización del sistema GPS aparece como hegemónica, diversos autores como Sinander y Silvestrin (1998), Krauss *et al.* (2008), Guasch *et al.* (2008), Roselló *et al.* (2012) y Li *et al.* (2015) remarcan la necesidad de desarrollar receptores que utilicen los diferentes sistemas GNSS disponibles.

En resumen, la utilización de receptores GNSS a bordo de satélites LEO ofrece las siguientes ventajas:

- Si se cuenta además con receptores en tierra en ubicaciones conocidas, permite realizar determinación precisa de órbita mediante post-procesamiento.
- Con la desactivación de la SA, y la mejora en la precisión de las efemérides, permite realizar determinación de órbita en tiempo real, habilitando por ejemplo la navegación autónoma de vehículos aeroespaciales.
- Permite contar con una referencia de tiempo precisa a bordo.
- Permite obtener una estimación “gruesa” de la orientación.
- Permite obtener una buena estimación de posición relativa entre vehículos, útil por ejemplo en el vuelo en formación.
- Puede ser utilizado como instrumento de ciencia.

1.3. Desarrollos argentinos

Diversos autores indican el comienzo del desarrollo espacial en la Argentina en los años 40, cuando durante el gobierno de Juan Domingo Perón (1946-1955) comenzaron los primeros ensayos de motores de cohetes con diferentes combustibles (de León, 2008), o en el año 1961, cuando durante la presidencia de Arturo Frondizi se crea la Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales, CNIE, como parte de la Fuerza Aérea Argentina (Argentina, 2016).

El satélite LUSAT-1 es conocido como el primer satélite argentino puesto en órbita. Fue construido en parte en Argentina por un grupo de radioaficionados integrantes de la filial local de AMSAT (*AMateur SATellite*) y el resto en AMSAT NA en Boulder, Colorado; y puesto en órbita en enero de 1990 mediante un cohete Ariane. Su misión era proveer comunicaciones a radioaficionados (AATE, 2016). Se cataloga al μ SAT-1, también llamado Víctor-1, como el segundo satélite argentino. Fue desarrollado por la Asociación de Investigaciones Tecnológicas de Córdoba AIT y el Instituto Universitario Aeronáutico; y puesto en órbita en agosto de 1996 por el cohete ruso Molniya (AATE, 2016).

Los satélites de la serie SAC (Satélites de Aplicaciones Científicas) fueron construidos por la Comisión Nacional de Actividades Espaciales CONAE en colaboración con diferentes agencias espaciales. La principal contratista de CONAE en estas misiones fue la empresa INVAP. El SAC-B, primer satélite científico argentino, tenía como objetivo el estudio avanzado de la física solar y la astrofísica mediante la observación de fulguraciones solares, erupciones de rayos gamma, radiación X del fondo difuso y átomos neutros de alta energía. Fue un proyecto de cooperación entre la CONAE y la NASA, con la participación de las agencias de Italia y Brasil. La puesta en órbita se efectuó con un lanzador Pegasus XL, en noviembre de 1996. Si bien pudo constatarse en un primer momento que el satélite operaba correctamente y respondía comandos, debido a una falla en la separación atribuida a la tercera etapa del lanzador, se perdió contacto con el satélite 12 horas después del lanzamiento (CONAE, 2016d).

El SAC-A, concebido como modelo tecnológico de la misión SAC-C, puso a prueba una serie de instrumentos desarrollados en el país así como la infraestructura material y humana de los equipos de telemetría, telecomando y control, permitiendo el entrenamiento y capacitación de operadores para la preparación de los centros de control (hardware y software) y el control de los satélites. También se trató de una misión conjunta entre la CONAE y la NASA, encargándose la primera tanto de las especificaciones y el diseño del satélite, del planeamiento, implementación y coordinación global de la misión, así como de la operación, telemetría, telecomando y control de la misma; mientras que el lanzamiento fue responsabilidad de NASA. La puesta en órbita se realizó en diciembre de 1998 por parte del Transbordador Espacial *Endeavour*. La misión terminó en agosto de 1999 (CONAE, 2016c).

El satélite SAC-C fue un proyecto conjunto entre la CONAE y la NASA con la participación de las agencias de Francia, Italia, Brasil y Dinamarca. El satélite contaba con tres cámaras que permitían observar el planeta a través de imágenes ópticas, y en particular el territorio argentino con el objetivo de monitorear la agricultura, la forestación, efectuar el relevamiento de aguas costeras e interiores y estudiar los ecosistemas terrestres y marinos. Además contaba con instrumentos para efectuar mediciones y estudios sobre la temperatura y vapor de agua de la atmósfera, el campo magnético terrestre y los efectos de la radiación espacial en componentes electrónicos, y el estudio de la estructura y la dinámica de la atmósfera y de la ionósfera. Fue puesto en órbita el 21 de noviembre del año 2000 mediante un lanzador Delta II y llegó al final de su vida útil el 15 de agosto del 2013 (CONAE, 2016e).

El cuarto satélite de la serie SAC, la misión SAC-D/Aquarius se encuadró en un programa de cooperación entre la CONAE, el Centro Goddard y el *Jet Propulsion Laboratory* (JPL), estos dos últimos ambos de la NASA. Su objetivo científico estuvo orientado a obtener nueva información climática a partir de las mediciones de salinidad y una nueva visión de la circulación y procesos de mezcla en el océano, así como detectar focos de alta temperatura en la superficie terrestre para la obtención de mapas de riesgo de incendios y humedad del suelo para dar alertas tempranas de inundaciones. Gran parte del satélite fue diseñado y construido en el país, incluido los paneles solares que lo alimentan y los instrumentos de CONAE. Fue puesto en órbita por la NASA el 10 de junio de 2011 con un lanzador Delta II y concluyó su servicio operativo el 8 de junio de 2015 tras haber cumplido exitosamente su misión prevista para 3 años (CONAE, 2016a). Este satélite resulta de interés particular dado que a bordo llevó un receptor de GPS experimental desarrollado en la UNLP, sobre lo que ahondaremos en el capítulo 7.

Existen otras misiones satelitales previstas como SABIA-Mar, con lanzamiento previsto para 2018-2019 (CONAE, 2016b), SAOCOM, actualmente en etapa de desarrollo (CONAE,

2016f), y SARE, sin plazos de construcción publicados (CONAE, 2016g). También existen importantes desarrollos locales de satélites GEO, por parte de la empresa ARSAT: los satélites ARSAT-1 y ARSAT-2, lanzados en octubre de 2014 y septiembre de 2015 (ARSAT, 2016); sobre los que no ahondaremos⁶.

En lo que respecta a los vehículos lanzadores, actualmente en Argentina se encuentra en curso el proyecto de desarrollo del lanzador *Tronador II*. El proyecto contempla la construcción de una serie de vehículos experimentales (VEx), suborbitales, con control de vuelo, con el objetivo de demostrar la madurez tecnológica de los componentes de los subsistemas de propulsión, aviónica y estructuras necesarios para satisfacer los requerimientos del lanzador (CONAE, 2016h). En este caso la principal contratista del proyecto es la empresa VENG S.A.

En marzo del 2014 se realizó desde el área de Punta Indio la primera prueba de un vehículo VEx1 (denominado VEx1A), utilizando hidracina como combustible y tetróxido de nitrógeno/ácido nítrico como oxidante, a fin de verificar el sistema de navegación guiado y control en un lanzamiento vertical, así como las interfaces con su segmento terreno. Si bien el VEx1A no pudo completar su misión, la experiencia adquirida permitió el rediseño y modificaciones para una nueva prueba.

El lanzamiento del VEx1B fue exitosamente concretado el 15 de Agosto del 2014, cumpliendo la trayectoria programada durante 27 segundos y llegando a una altura máxima de 2200 m, permitiendo comprobar el sistema de propulsión, y el de navegación, guiado y control, todos desarrollados en el país (CONAE, 2016h). Tanto en estos vehículos experimentales como en el lanzador final se utilizan receptores GNSS desarrollados en la UNLP. Por cuestiones de espacio y de sensibilidad tecnológica no se ahondará en estos desarrollos en la presente tesis.

1.4. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis consiste en el estudio y desarrollo de las técnicas de navegación para aplicaciones aeroespaciales, basadas en la utilización de señales GNSS. Dado que en las aplicaciones científicas de observación terrestre, tanto por la periodicidad de revisita que ofrecen, como por el relativo bajo costo de lanzamiento se emplean generalmente satélites de órbita baja, LEO, nos abocaremos principalmente al estudio de este tipo de vehículos. No obstante, muchos de los resultados que se obtendrán serán extensibles a una gran variedad de vehículos aeroespaciales.

Con miras a este objetivo principal, planteamos una serie de objetivos secundarios entre los cuales podemos mencionar:

- Estudiar los sistemas GNSS, principalmente GPS y GLONASS, tanto en sus aspectos generales como en los aspectos particulares relativos a la implementación de receptores.
- Estudiar conceptos asociados a la mecánica orbital, con el objetivo de generar modelos tanto para la implementación de las estrategias de filtrado como para la validación de los algoritmos.

⁶Tanto la misión SAOCOM como los satélites de ARSAT tuvieron como principal contratista y/o fueron desarrollados por la empresa INVAP.

- Estudiar técnicas de filtrado estadístico aplicables a este problema, con el objeto de implementar estrategias de navegación para vehículos aeroespaciales.
- Comparar diferentes estrategias de navegación, para lo cual será necesario establecer métricas de desempeño.
- Analizar el desempeño de las diferentes técnicas frente a situaciones particulares que pueden presentarse en la práctica.
- Analizar los datos de operación de un receptor GPS que operó a bordo de satélite SAC-D.

1.5. Estructura

La tesis se estructura de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se describen someramente los aspectos generales de los sistemas GNSS, GPS y GLONASS.
- En el Capítulo 3 se describen los diferentes marcos de referencia espaciales y temporales que serán utilizados: tanto propios de los sistemas GNSS en cuestión, como los que resultan de utilidad para la caracterización de los estados del vehículo; y las vinculaciones entre ellos.
- En el Capítulo 4 se realiza una descripción de los vehículos aeroespaciales, con énfasis particular en los modelos utilizados, en particular para satélites LEO.
- En el Capítulo 5 se describen los algoritmos de navegación utilizados.
- En el Capítulo 6 se profundiza en los aspectos de los sistemas GNSS que se relacionan con la implementación práctica de receptores.
- En el Capítulo 7 se analizan los resultados de operación en órbita de un receptor de GPS integrado a bordo del satélite argentino SAC-D.
- En el Capítulo 8 se analiza la aplicación particular de las estrategias de filtrado propuestas en el caso de un satélite LEO. Se comparan diferentes variantes de implementación mediante simulación.
- En el Capítulo 9 se analiza el desempeño de las estrategias de filtrado propuestas ante diferentes perturbaciones.
- Finalmente, en el Capítulo 10 se exponen las conclusiones.

Por otra parte, y con el objetivo de no sobrecargar determinados capítulos con información, que de todas maneras consideramos relevante, optamos por incluir una serie de apéndices:

- En el Apéndice A se realiza un breve repaso de las ecuaciones de mecánica orbital, necesarias tanto para modelar los vehículos estudiados como para obtener los estados de los satélites de los sistemas GNSS.

- En el Apéndice B se complementa el análisis de desempeño de diferentes modelos utilizados en la estrategia de filtrado con EKF, realizado en el Capítulo 8 para los casos en los que se utilicen mediciones del sistema GLONASS, o mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS.
- En el Apéndice C se complementa la comparación de estrategias de filtrado, realizada en el Capítulo 8.
- En el Apéndice D se complementa el análisis de desempeño de diferentes modelos utilizados en la estrategia de filtrado con EKF, frente a determinadas situaciones particulares, realizado en el capítulo 9 para los casos en los que se utilicen mediciones del sistema GLONASS, o mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS.

1.6. Producido de la Tesis

El trabajo realizado en el marco de esta tesis ha dado lugar a diferentes publicaciones, que se presentan a continuación:

- En Cogo *et al.* (2009) se describe el *software* implementado en un receptor de GPS basado en COTS apto para uso espacial, desarrollado en el grupo de trabajo. Para la etapa de navegación se incluyó una variante de filtrado con EKF, basada en un modelo cinemático con la varianza del ruido de proceso ajustada (mediante simulación) a la dinámica esperada del satélite. Este receptor fue integrado y operó en órbita en el satélite argentino SAC-D.
- En García *et al.* (2011) se presenta el diseño, la implementación y la validación del mencionado receptor de GPS capaz de operar en un satélite de órbita baja. Se muestran algunas de las pruebas realizadas, por simulación y con mediciones reales, que permitieron validar distintas etapas del diseño.
- En Cogo *et al.* (2012) se analiza la integración de múltiples sistemas GNSS para obtener una solución de posición, describiendo las diferentes variantes que puede presentar el problema y proponiendo un enfoque de formulación unificado. Se propone la utilización de diferentes métodos de optimización numérica como *steepest descent* y *Quasi-Newton*. Mediante simulación se valida y se analiza el desempeño de la solución propuesta.
- En Cogo *et al.* (2013a) se presenta el análisis de la operación en órbita del receptor de GPS colocado a bordo del satélite argentino SAC-D. Este análisis permite verificar la correcta operación del hardware del mismo en las condiciones que este vehículo impone, y verificar las principales etapas del procesamiento propio del receptor, adquisición, seguimiento y navegación, que han sido adaptadas para dicha aplicación.
- En Cogo *et al.* (2014) se comparan dos métodos de filtrado estadístico aplicables a la navegación de satélites LEO con señales GNSS. Se comparan dos variantes de Filtro de Kalman Extendido, una que utiliza directamente las mediciones de GNSS, y otra que resuelve la no-linealidad estados/mediciones previo a la incorporación de las mismas. Esta última puede pensarse como una variante de lo que se conoce como Filtro de Kalman de Posición (PKF), pero manteniendo el modelo de estados no-lineal. Se plantean dos esquemas de fusión que permiten utilizar de manera conjunta los dos

sistemas GNSS operativos en la actualidad (GPS y GLONASS). El desempeño de los diferentes esquemas propuestos se analiza mediante simulación en diversos escenarios significativos de operación.

- En [Cogo et al. \(2016\)](#) se presenta un análisis del desempeño de diferentes esquemas de filtrado (modelos) aplicables a la estimación de estados de vehículos aeroespaciales, particularmente LEO, en base a mediciones de los sistemas GNSS. Los distintos modelos se basan en enfoques tanto cinemáticos como dinámicos. Para la comparación del desempeño se recurre a diversos escenarios de simulación significativos. Como ejemplo de aplicación, se analiza el procesamiento de mediciones reales tomadas a bordo del satélite argentino SAC-D.

Si bien quedan fuera del foco puntual de esta tesis, se realizaron otras publicaciones en temas vinculados:

- En [Cogo et al. \(2010\)](#) se presenta el desarrollo de los algoritmos de navegación para receptores de GPS en vehículos de alta dinámica como los denominados cohetes sonda. Se propone la utilización de un filtro de Kalman extendido con modelo lineal ajustado a la dinámica del vehículo. Se describen las simulaciones utilizadas para la validación de los algoritmos propuestos. Estos algoritmos también forman parte del software de un receptor de GPS desarrollado en la UNLP utilizado en ensayos de vehículos reales.
- En [Cogo et al. \(2011\)](#) se presenta un algoritmo para la estimación conjunta de la posición y la orientación de un vehículo provisto de múltiples antenas de GNSS dispuestas sobre su superficie. Se formula el problema de estimación, y mediante el planteo de un estimador de mínimos cuadrados se llega a un problema de optimización no-lineal sin restricciones en \mathbb{R}^7 . Luego, este problema se resuelve de manera iterativa aplicando los métodos conocidos como método del gradiente y método de *Quasi-Newton*. Se presentan resultados de simulación que validan la utilidad del algoritmo en determinados escenarios de aplicación.
- En [Roncagliolo et al. \(2013\)](#) se presenta una estrategia de lazos de seguimiento para ser utilizada en receptores GNSS de múltiples antenas. La técnica es testada en un escenario de vehículo LEO con un cambio constante de orientación producto de la rotación en torno al vector tangente a la trayectoria, verificando que un receptor de cuatro antenas es capaz de realizar el *tracking* empleando la estrategia propuesta.
- En [Cogo et al. \(2013b\)](#) se presenta el desarrollo de un receptor de GNSS multi-antena para aplicaciones espaciales. Entre otras cosas, allí se presentan las soluciones de posicionamiento obtenidas con mediciones reales (en condiciones estáticas) de los sistemas GPS y GLONASS.
- En [Scataglini et al. \(2014\)](#) se presenta un sistema que implementa la estimación de la orientación en base a mediciones de simples diferencias de fase, aprovechando las características del receptor multi-antena descrito en [Cogo et al. \(2013b\)](#). Los resultados presentados corresponden al post-procesamiento de mediciones adquiridas en diferentes ensayos tanto con la señal GPS real transmitida por los satélites como con la señal sintetizada por un simulador GNSS.

Además, durante el período de producción de la tesis se ha participado en diversos proyectos de transferencia tecnológica en temas vinculados, dando lugar a lo que consideramos una *provechosa relación simbiótica*.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS GLOBALES DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE GNSS

GNSS es el acrónimo en idioma inglés de *Global Navigation Satellite System*, es decir Sistema Global de Navegación por Satélite. De manera simple podemos decir que estos sistemas permiten que un usuario, equipado con el receptor adecuado, obtenga su posición (y su velocidad) en principio desconocida, a partir de la señal de radiofrecuencia transmitida por satélites de posición (y velocidad) conocida. Esto le permite a dicho usuario contar con información para realizar la tarea de navegación. Al utilizar señales de radiofrecuencia, el sistema puede operar en una gran diversidad de ambientes y de condiciones climáticas, cuyos límites quedan establecidos generalmente por las condiciones de propagación de estas señales. Al tratarse de un sistema en el cual el usuario interviene de manera pasiva, únicamente recibiendo las señales que transmiten los satélites, el sistema puede ofrecer cobertura a un número ilimitado de usuarios.

En la actualidad existen diferentes realizaciones de sistemas GNSS, en operación o en etapa de desarrollo (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007):

- **GPS:** El sistema NAVSTAR-GPS (*Navigation System with Timing and Ranging, Global Positioning System*), popularmente conocido como sistema GPS o Sistema de Posicionamiento Global, fue desarrollado por las fuerzas armadas de los Estados Unidos. Si bien el sistema fue concebido con propósitos militares, y continúa bajo la órbita del Departamento de Defensa, el campo de aplicaciones civiles se ha expandido notablemente hasta el punto de constituir un nuevo paradigma en campos como la agrimensura, la geodesia y la navegación civil.
- **GLONASS:** Acrónimo en idioma ruso, ГЛОНАСС, ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система, que transliterado resulta *GLObal'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*, y cuya traducción sería Sistema Global de Navegación Satelital¹. Este sistema fue desarrollado y es controlado por las fuerzas armadas rusas, pero

¹Aquí la denominación “satelital” debe entenderse como “basado en satélites”, y no como “para ser usado

al igual que en el caso del GPS su campo de aplicaciones civiles se ha expandido en los últimos años. Junto con el sistema GPS constituyen los dos únicos sistemas totalmente operativos y que pueden brindar cobertura global en la actualidad.

- **Galileo:** Este sistema se halla actualmente en etapa de construcción o “despliegue” por parte de la Unión Europea (EU) y la Agencia Espacial Europea (ESA). Su nombre rinde tributo al astrónomo italiano Galileo Galilei² (1564 ~ 1642). Una de las principales diferencias con respecto a GPS y GLONASS reside en que Galileo es un sistema GNSS operado bajo control civil. Desde la perspectiva de las naciones europeas, uno de los objetivos del proyecto es proporcionar un sistema de posicionamiento de alta precisión en el cual puedan confiar, totalmente independiente de GPS y de GLONASS, dado que estos últimos pueden ser deshabilitados en un potencial escenario de conflicto bélico. Los primeros cuatro satélites lanzados a los efectos de validar el sistema (2 fueron lanzados en octubre de 2011, y 2 en octubre de 2012) permitieron una primera determinación de la posición el 12 de Marzo de 2013 (ESA, 2013). En la actualidad, la constelación posee 14 satélites en órbita (GPS World, 2016). La puesta en operación del sistema completo con una constelación planeada de 30 satélites (27 activos y 3 de recambio), está prevista para el año 2019 (Commission, 2012). Debido a esto, no entraremos en mayores detalles sobre este sistema.
- **BeiDou/COMPASS:** Este sistema también se encuentra actualmente en etapa de desarrollo por parte de la República Popular China. Constituye la evolución de un sistema de uso regional denominado BeiDou-1, hacia un sistema de cobertura global. En las primeras traducciones a lengua inglesa se utilizaba la denominación COMPASS para referir al sistema global. Sin embargo, a comienzos del 2013 las autoridades de la oficina de navegación satelital de China, anunciaron que la denominación oficial pasaba a ser *BeiDou Navigation Satellite System*³. La evolución del sistema comenzó en el año 1997, y se prevé que para el año 2020 se alcanzará la cobertura global, al nivel de lo que ofrecen GPS y GLONASS. Debido a esto, tampoco entraremos en mayores detalles sobre este sistema.

Cada sistema GNSS está conformado básicamente por tres bloques constitutivos o segmentos, el Segmento Espacial, el Segmento de Control y el Segmento de Usuario (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007; Samama, 2008; Gleason y Gebre-Egziabher, 2009).

2.1. Segmento Espacial

El denominado Segmento Espacial está formado por una constelación de satélites, diseñada de manera tal que al menos cuatro satélites sean “visibles” de forma simultánea en todo momento y en cualquier punto sobre la superficie terrestre. Esta condición es necesaria para brindar al usuario la capacidad de posicionamiento del sistema.

por satélites”. Una alternativa sería denominarlo Sistema Satelital Global de Navegación

²Entre otros muchos méritos, su descubrimiento de las cuatro mayores lunas de Júpiter cuyo movimiento orbital podía ser utilizado como un reloj celeste visible desde cualquier punto de la Tierra, fue invaluable para los primeros tiempos de la navegación.

³BeiDou es la denominación en idioma chino de la constelación del arado, conformada por las 7 estrellas más brillantes del cielo septentrional, utilizada históricamente como referencia en la navegación.

Cada sistema GNSS concibe su constelación teniendo en cuenta ésta y otras restricciones o reglas de diseño, como ser la precisión en la solución de posición de usuario, la disponibilidad de satélites en diferentes latitudes geográficas preferenciales, y la posibilidad de asegurar cobertura frente a una posible falla de algún satélite. Por supuesto, en las reglas de diseño también intervienen factores como el tamaño y peso de los satélites, los cuales se relacionan con las restricciones de los vehículos lanzadores disponibles por cada una de las agencias encargadas del mantenimiento del sistema, y con los costos de desarrollo, mantenimiento y reemplazo de satélites necesarios para mantener la cobertura deseada. Por ejemplo, la selección de la órbita determina las perturbaciones a las que se encuentra sometido un satélite, lo cual repercute en la cantidad de maniobras necesarias para mantenerlo en la posición deseada y por tanto limita su vida útil.

Básicamente, un satélite GNSS está formado por un ensamble de relojes atómicos muy precisos, transceptores de comunicaciones y una serie de equipos auxiliares encargados de asegurar su correcta operación, entre los cuales se encuentran los paneles solares responsables de proveer la energía, y los sistemas de propulsión necesarios para los ajustes orbitales y el control de estabilidad del vehículo. Las señales transmitidas por los satélites permiten a los usuarios medir su distancia o rango geométrico a los mismos, y transportan la información con la cual dichos usuarios pueden determinar la ubicación de los satélites en cada instante; lo que constituye la base para la determinación de la posición del usuario.

Los satélites de cada constelación GNSS tienen varios sistemas de identificación, como ser el número de secuencia de lanzamiento, el número de posición orbital, algún nombre específico asignado por el sistema, y la denominación internacional. Utilizaremos la abreviatura SV (de *Space Vehicle*) para referirnos específicamente a un satélite de algún sistema GNSS, y la abreviatura SVID (de *Space Vehicle IDentification*) para referirnos al identificador de interés del SV en la constelación.

2.1.1. GPS

La constelación base del sistema GPS consta de 24 satélites distribuidos en 6 planos orbitales, con 4 satélites en cada plano, no equiespaciados. Estas órbitas son prácticamente circulares, con una excentricidad no mayor a 0,02 y un semieje mayor de aproximadamente 26 560 km. El período orbital es de medio día sidéreo, aproximadamente 43 080 segundos, o 11 horas, 58 minutos. Esto implica que un observador en tierra vería un dado satélite en el mismo punto en el cielo a intervalos de un día (sidéreo)⁴. Los planos orbitales poseen una inclinación nominal de 55° con respecto al plano ecuatorial⁵. Los 6 planos orbitales se encuentran separados cada 60°, esto es, sus intersecciones con el plano ecuatorial están separadas cada 60° en longitud. De manera más precisa, esto último significa que los nodos ascendentes de las órbitas (el punto en el cual los satélites cruzan el ecuador de sur a norte) tienen una separación de 60°, medidos sobre el plano ecuatorial (Kaplan y Hegarty, 2005).

En la figura 2.1 se muestra una representación esquemática de la constelación de GPS

⁴Un día sidéreo se define como el tiempo que toma a un planeta rotar una vuelta completa sobre su eje desde la perspectiva de una estrella distante. El día solar, en contraste, es el tiempo necesario para que la Tierra complete una vuelta sobre su eje desde la perspectiva del Sol. En este último aparecen sumados el efecto de rotación de la Tierra sobre su eje, y el efecto de rotación de la Tierra alrededor del Sol.

⁵En las primeras etapas del programa, la inclinación orbital había sido definida como 63°, número que fue modificado a 55° para permitir lanzamientos con el Space Shuttle (Daly, 1993).

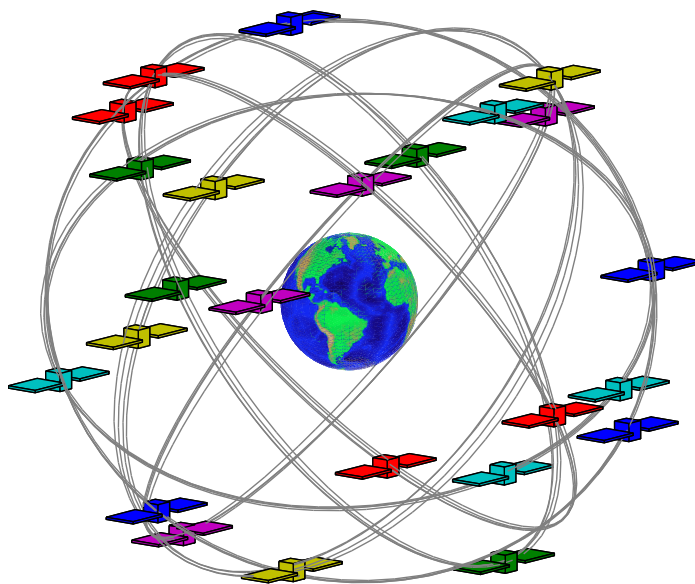


Figura 2.1: Constelación de satélites GPS al 26 de junio de 1994.

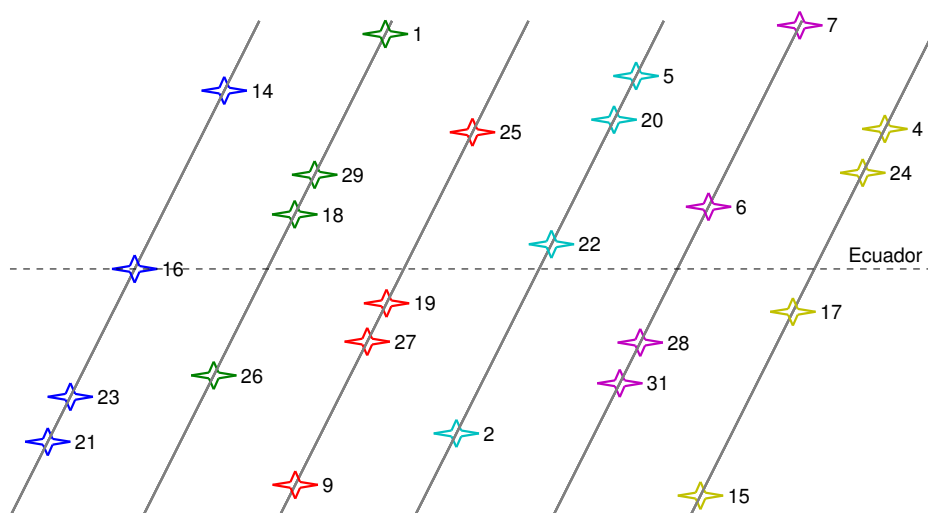


Figura 2.2: Proyección planar de la constelación correspondiente al 26 de junio de 1994.

presente el día 26 de junio de 1994. Esta gráfica se obtuvo a partir de la información de almanaques disponible en [CelesTrak \(1994\)](#). Para facilitar la visualización se utilizó un mismo color para indicar los satélites de cada plano orbital. Si bien existen anomalías en las órbitas (las órbitas no son perfectamente coincidentes para los satélites de un mismo plano orbital), pueden distinguirse los mencionados 6 planos orbitales, conteniendo 4 satélites cada uno. Puede observarse también la distribución no uniforme de los satélites dentro de cada plano orbital. Esto último puede notarse más claramente en la proyección planar de la constelación esquematizada en la figura 2.2.

Existen varias notaciones utilizadas para referir a los satélites en sus órbitas. Una de estas nomenclaturas asigna una letra de la A a la F a cada plano orbital y un número del 1 al 4 a cada satélite. Una segunda notación utilizada es el número de satélite NAVSTAR asignado por la Fuerza Aérea de los Estados Unidos. Esta notación es la que generalmente aparece con la denominación SVN (acrónimo de *Space Vehicle Number*). Una tercera notación representa la configuración de los generadores PRN a bordo del satélite. Estos generadores son configurados unívocamente en cada satélite, para generar una versión diferente de los códigos C/A y P(Y). De esta manera, un satélite puede identificarse por el código PRN que genera. Ocasionalmente, la asignación del PRN para un dado SVN puede cambiar durante la duración de la misión del satélite ([Kaplan y Hegarty, 2005](#)). En la figura 2.2 se indica junto a la proyección planar de la constelación, el PRN asignado a cada satélite.

A modo de ejemplo, en la figura 2.3 se analizan los satélites que se tendría en vista en dos regiones con latitudes diferentes como son la Base Marambio (64° de latitud sur) y La Quiaca (22° de latitud sur) con la constelación mostrada en las figuras 2.1 y 2.2, considerando una máscara de elevación de 10° . El intervalo graficado corresponde a dos días sidéreos, pudiendo apreciarse que la situación se repite a intervalos de un día sidéreo. Para facilitar la visualización se indica en línea punteada negra el instante correspondiente al inicio del segundo día sidéreo.

Puede observarse que en ambos casos se cuenta con un número de satélites mayor o igual a 4 en todo el intervalo analizado (para facilitar la visualización se indica en línea punteada roja el límite de 4 satélites presentes), condición necesaria para asegurar la cobertura del sistema. Asimismo, puede observarse que en la zona con mayor latitud existen determinados intervalos en los cuales la cobertura se encuentra asegurada solo por el mínimo de 4 satélites, y ante la eventual falla de alguno de ellos, se comprometería la cobertura del sistema.

No obstante, la constelación base de GPS se ha ido incrementando hasta contar hoy en día con un máximo de 32 satélites operativos, lo cual permite obtener una mejora en la precisión de los cálculos de navegación, al disponer de un mayor número de observaciones. La distribución no-uniforme de la constelación permite aumentar la fiabilidad y disponibilidad del sistema frente a fallas en uno o más satélites. El límite práctico de cobertura para la constelación GPS es de 6 satélites considerando un ángulo de elevación de 5° sobre el horizonte ([Kaplan y Hegarty, 2005](#)).

En la figura 2.4 se muestra una representación esquemática de la constelación de GPS presente el día 7 de diciembre de 2013, obtenida de igual manera en base a la información de almanaques. Se puede observar el mayor número de satélites con respecto a la constelación esquematizada en la figura 2.1.

En la figura 2.5 se repite el ejemplo anterior de analizar los satélites que se tendría en vista a 64° y a 22° de latitud sur con la constelación mostrada en la figura 2.4, considerando

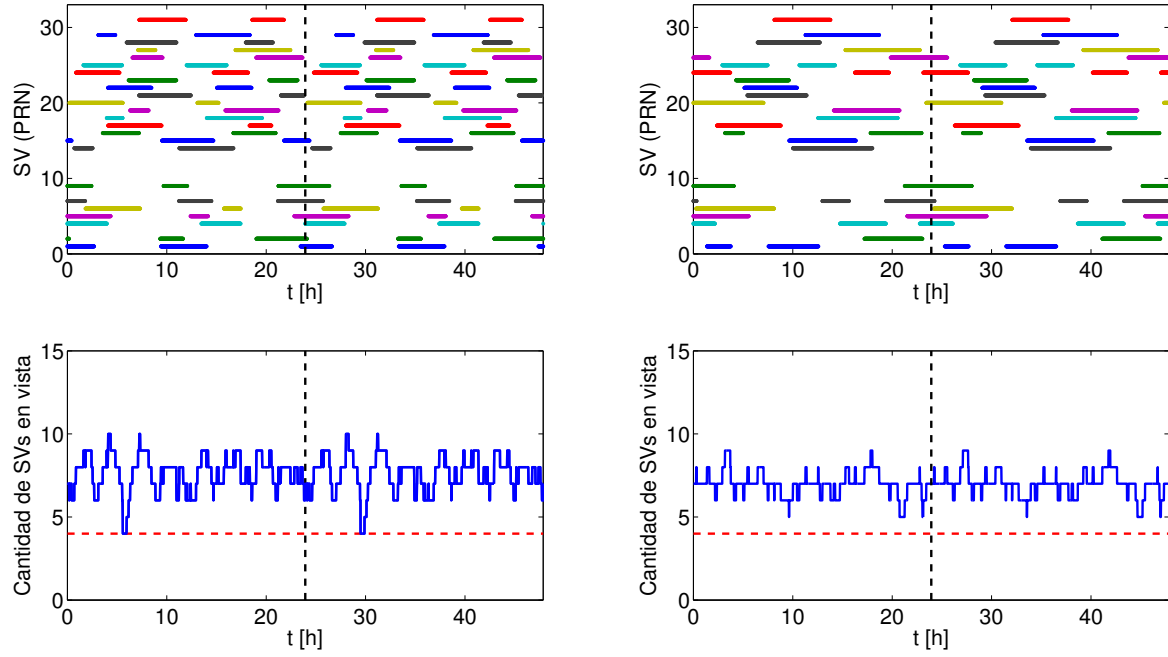


Figura 2.3: Satélites en vista considerando una máscara de elevación de 10° en Base Marambio (izq.) y en La Quiaca (der.); con la constelación de GPS presente el día 26 de junio de 1994.

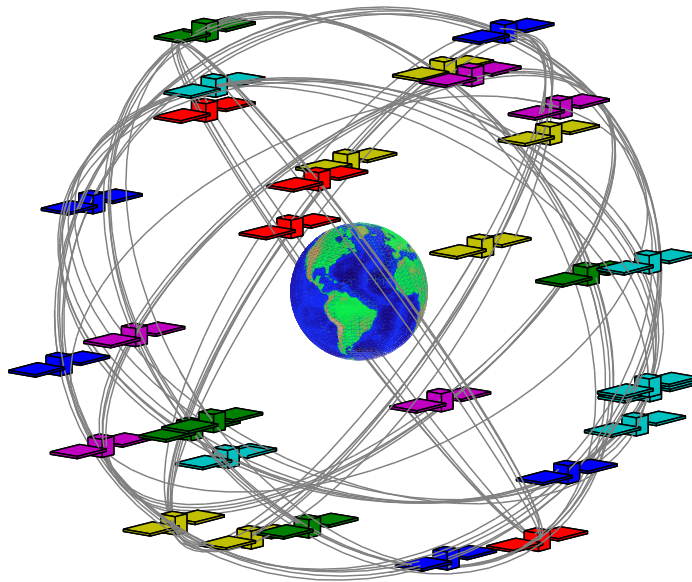


Figura 2.4: Constelación de satélites GPS al 7 de diciembre de 2013.

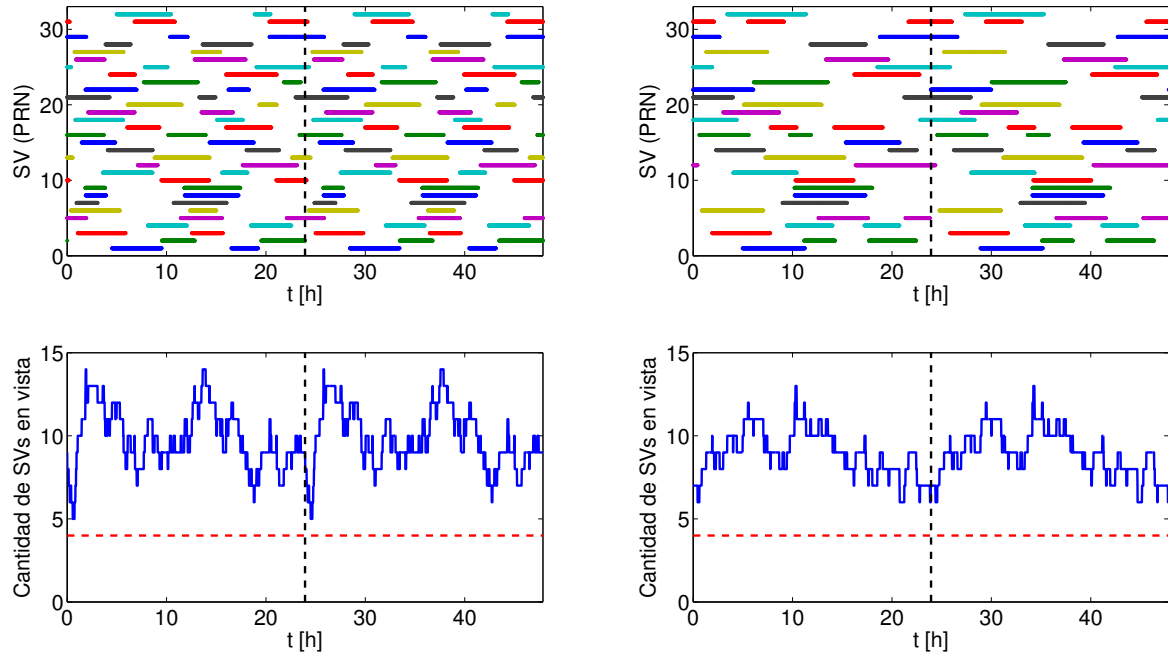


Figura 2.5: Satélites en vista considerando una máscara de elevación de 10° en Base Marambio (izq.) y en La Quiaca (der.); con la constelación de GPS presente el día 7 de diciembre de 2013.

también una máscara de elevación de 10° , y un intervalo de dos días sidéreos.

Puede observarse que nuevamente en ambos casos se cuenta con un número de satélites mayor o igual a 4 en todo el intervalo analizado, condición necesaria para asegurar la cobertura del sistema. En este caso, en la zona con mayor latitud existe un mínimo de 5 satélites visibles, con lo cual se asegura la cobertura del sistema aún si fallara uno de ellos. Asimismo, puede observarse que, como es lógico, la visibilidad promedio de satélites aumenta con respecto a la situación analizada en la figura 2.3.

Así como la distribución de la constelación ha evolucionado en función del tiempo, los satélites que la conforman también han evolucionado con el propósito de brindar un mayor número de señales y de servicios, en lo que se conoce como programa de modernización del sistema. Esta evolución divide a los satélites en grupos denominados *bloques* del segmento espacial:

- **Bloque I:** Este bloque está conformado por 11 satélites, lanzados entre 1978 y 1985 como prototipos de desarrollo para validar el concepto del sistema GPS. Ninguno de estos satélites se encuentra operativo en la constelación actual.
- **Bloque II:** En base a la experiencia obtenida con la operación en órbita del Bloque I se desarrolló este bloque conformado por 9 satélites, lanzados a partir de 1989, los cuales incorporaron las capacidades de disponibilidad selectiva (*Selective Availability, SA*)⁶ y *Antispoofing, AS*⁷. Ninguno de estos satélites se encuentra operativo en la constelación actual.

⁶La disponibilidad selectiva consistía en introducir una degradación intencional en el reloj, que redundaba en un error del orden de 100 m en las mediciones. Fue deshabilitada en mayo del año 2000.

⁷Encriptado del código P.

- **Bloque IIA:** Los satélites de este bloque incorporaron la posibilidad de operar de manera autónoma por un período de hasta 180 días. Se construyeron un total de 19 satélites, lanzados a partir de 1990. Ninguno de estos satélites se encuentra operativo en la constelación actual (ver tabla 2.1).
- **Bloque IIR:** Este bloque conocido como *replenishment* fue concebido como una actualización totalmente compatible y de reemplazo de los bloques anteriores. Una de sus principales características es la posibilidad de determinación de la órbita y armado del mensaje de navegación totalmente autónoma; siendo capaz de operar cerca de medio año sin soporte por parte del Segmento de Control, y sin degradación en la precisión de las efemérides. El primer intento de lanzamiento de estos satélites falló el 17 de enero de 1997. Luego, 12 satélites fueron puestos en órbita de manera exitosa en el período 1997-2004, los cuales continúan en operación en la actualidad (ver tabla 2.1).
- **Bloque IIR-M:** Este bloque, conocido como *IIR Modernized* incorpora una nueva señal civil en banda L2, conocida como L2C, y un nuevo código de uso militar, denominado código M, en las bandas L1 y L2; brindando nuevos servicios tanto a usuarios civiles como militares. En el período 2005-2009 se lanzó un total de 8 satélites, de los cuales 7 continúan operativos en la actualidad (ver tabla 2.1).
- **Bloque IIF:** Los satélites de este bloque, además de las señales presentes en el bloque IIR-M incorporan una tercer señal de uso civil en banda L5; la cual, a diferencia de lo que ocurre con la banda L2, está reservada exclusivamente para servicios de seguridad en aviación civil. Se prevé que en el futuro los aviones utilizarán la señal L5 en combinación con la señal L1 C/A para aumentar la precisión (mediante la corrección ionosférica que habilita el utilizar señales en dos bandas) y la robustez (mediante la redundancia de señales). En el período 2010-2016⁸ se han lanzado 12 satélites de este bloque, todos los cuales se encuentran operativos en la actualidad (ver tabla 2.1).
- **Bloque IIIA:** Los satélites de este bloque se encuentran en etapa de producción, y su primer lanzamiento está previsto para el año 2017 (Gruss, 2015). Además de las señales presentes en el bloque IIF incorporarán una cuarta señal civil en banda L1 denominada L1C, con modulación MBOC (*Multiplexed Binary Offset Carrier*), con el objetivo de permitir interoperatividad entre el sistema GPS y los demás sistemas GNSS.

En la tabla 2.1 se resume la información de los diferentes bloques de satélites que conforman la constelación GPS (GPS, 2016); mientras que en la figura 2.6 se muestran gráficas ilustrativas de los mismos.

2.1.2. GLONASS

La constelación base del sistema GLONASS consiste en 24 satélites distribuidos en 3 planos orbitales, con 8 satélites en cada plano, equiespaciados cada 45°. Estas órbitas son prácticamente circulares con una excentricidad menor a 0,01 y un semieje mayor de aproximadamente 25 510 km. El período orbital es de aproximadamente 11 horas, 15,8 minutos. Esto implica que un observador quieto en la superficie terrestre vería un dado satélite en el mismo punto en el cielo a intervalos de 8 días sidéreos. Los planos orbitales poseen una inclinación nominal de 64,8° con respecto al plano ecuatorial. Los nodos ascendentes de los 3

⁸El último lanzamiento tuvo lugar el 5 de febrero de 2016 (GPS, 2016).

Bloque	Años	Exitosos	Fallas	En operación
I	1978-1985	10	1	0
II	1989-1990	9	0	0
IIA	1990-1997	19	0	0
IIR	1997-2004	12	1	12
IIR-M	2005-2009	8	0	7
IIF	2010-2016	12	0	12
Total	-	70	2	31

Tabla 2.1: Diferentes Bloques que conforman la constelación GPS.



(a) Bloque IIA.



(b) Bloque IIR.



(c) Bloque IIR-M.



(d) Bloque IIF.



(e) Bloque IIIA.

Figura 2.6: Diferentes satélites de los bloques que conforman la constelación GPS.

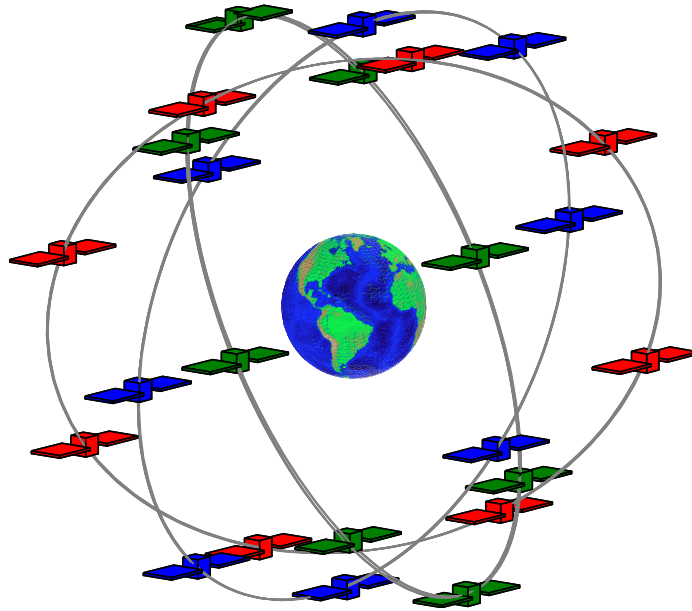


Figura 2.7: Constelación de satélites GLONASS al 7 de enero de 2014.

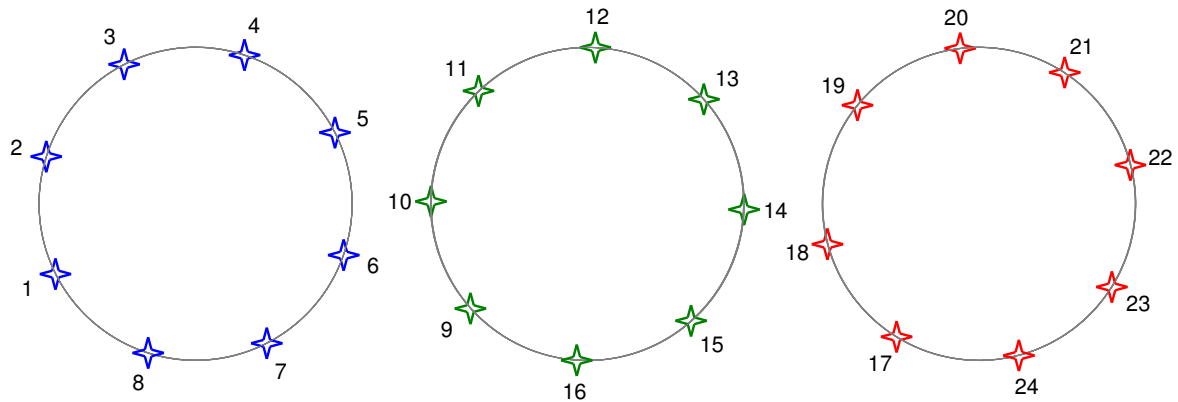


Figura 2.8: Planos Orbitales de la constelación de satélites GLONASS correspondiente al 7 de enero de 2014.

planos orbitales se encuentran separados cada 120° (Kaplan y Hegarty, 2005). La constelación elegida permite brindar una mejor precisión en la solución de navegación (en relación a la constelación base de GPS) para los usuarios en grandes latitudes, lo cual resulta más atractivo para usuarios en territorio ruso.

En la figura 2.7 se muestra una representación esquemática de la constelación de GLONASS presente el día 7 de enero de 2014. Esta constelación se obtuvo a partir de la información de almanaques disponible en GLONASS (2014). Para facilitar la visualización se utilizó un mismo color para indicar los satélites de cada plano orbital. Si bien existen anomalías en las órbitas (las órbitas no son perfectamente coincidentes, para los satélites de un mismo plano orbital), pueden distinguirse los mencionados 3 planos orbitales, conteniendo 8 satélites cada uno. Puede observarse también la distribución prácticamente uniforme de los satélites dentro de cada plano orbital. Esto último puede observarse más claramente en la gráfica de los planos orbitales esquematizada en la figura 2.8.

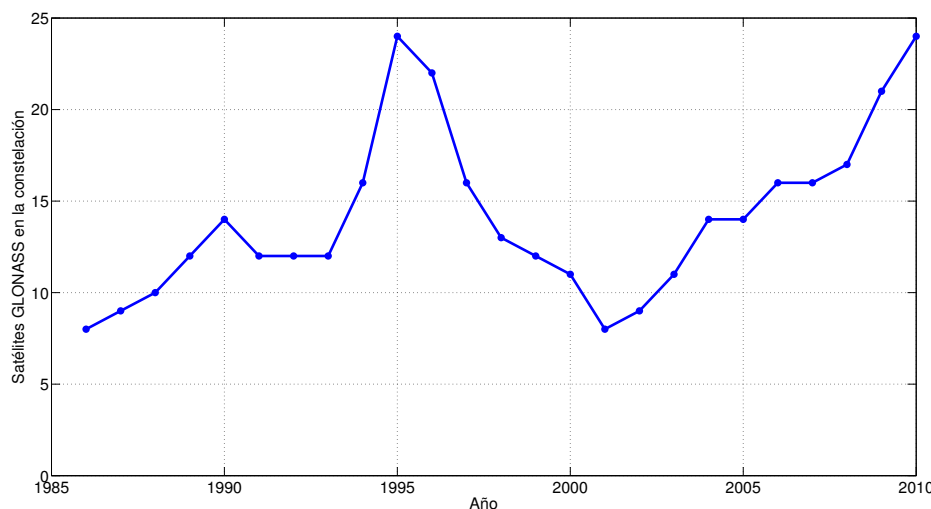


Figura 2.9: Cantidad aproximada de satélites en la constelación GLONASS entre 1985 y 2010.

Para la puesta en funcionamiento de la constelación, el programa del sistema GLONASS consideraba tres fases ([Polischuk *et al.*, 2002](#)):

- **Fase 1 (1983 - 1985):** Ensayos experimentales y refinamiento del concepto del sistema. Constelación de 4 - 6 satélites.
- **Fase 2 (1986 - 1993):** Operación inicial del sistema. Constelación de 12 satélites.
- **Fase 3 (1993 - 1995):** Desarrollo de la constelación nominal de 24 satélites y comienzo de operación del sistema.

Si bien en enero del año 1996 el sistema comenzó a ser completamente operativo, la situación económica de Rusia en los años 90 provocó que el proyecto fuese desfinanciado; lo que supuso no reemplazar los satélites que iban quedando fuera de operación, llegando al año 2002 con una constelación de tan sólo 8 satélites. No obstante, en el año 2001 se lanzó un programa tendiente a restaurar la operación del sistema ([Polischuk *et al.*, 2002](#)), llevando la constelación a su configuración nominal en el año 2010. En la figura 2.9 se muestra aproximadamente la cantidad de satélites de la constelación GLONASS entre los años 1985 y 2010 ([Chebotarev, 2007](#)).

Entre otras razones, esta eventual merma en la constelación ha provocado que en la bibliografía occidental no se haga demasiado énfasis en la utilidad y las potencialidades del sistema GLONASS. Sin embargo, en los últimos años, la constelación se ha mantenido en operación, contando con un buen número de satélites de recambio. En la figura 2.10 se muestra la cantidad de satélites de GLONASS tanto en la constelación como operativos entre los años 2008 y 2016, para lo cual se utilizó la información disponible en [GLONASS \(2016\)](#) para los días 1 de cada mes del período mencionado.

Al igual que en el caso de GPS, los satélites que conforman la constelación han evolucionado en el tiempo, en lo que se conoce como programa de modernización del sistema. Podemos dividir esta evolución en tres grupos de satélites o *series*:

- **GLONASS:** Estos satélites responden a un diseño tradicional ruso consistente en

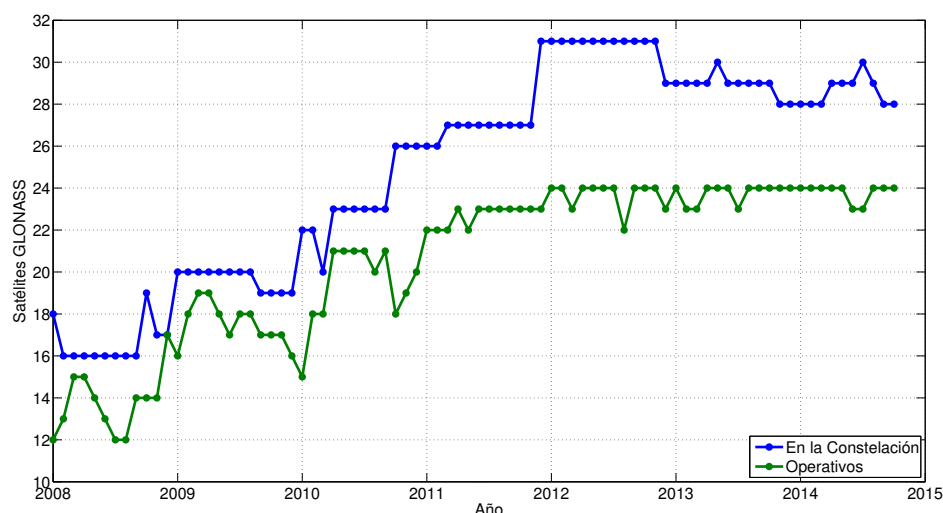


Figura 2.10: Cantidad de satélites en la constelación GLONASS entre 2008 y 2016.

un cilindro presurizado, sellado herméticamente, con estabilización en los tres ejes. Dentro de esta serie se encuentran varios bloques, definidos como Bloque I, IIa, IIb y IIc. El Bloque I, también referido como la generación cero, está constituido por los primeros prototipos de satélites, lanzados entre 1982 y 1985, con una vida útil de un año. Los bloques IIa, IIb y IIc, referidos como la primera generación, difieren entre sí principalmente en la vida útil prevista: de 1 a 2 años para los primeros bloques, y de 3 años para el último (Kaplan y Hegarty, 2005). Transmitían señales en dos bandas, L1 y L2, pero solamente la señal de L1 estaba recomendada para uso civil. Ningún satélite de esta serie se encuentra operativo en la actualidad.

- **GLONASS-M:** Los satélites de esta serie, o serie *GLONASS Modificada*, son una versión modernizada de la serie anterior, utilizando electrónica más moderna, y capaz de brindar nuevos servicios. No obstante, se conserva el concepto de mantener la electrónica en un habitáculo presurizado hermético. Las principales modificaciones consisten en agregar una nueva señal de uso civil en banda L2, y la incorporación de campos en el mensaje de navegación para facilitar el uso conjunto con el sistema GPS; además de una vida útil mayor, estimada en 7 años (Kaplan y Hegarty, 2005). En la constelación actual se encuentran 21 satélites operativos de esta serie. Es decir, la constelación nominal consta prácticamente de satélites GLONASS-M.
- **GLONASS-K:** Esta nueva generación de satélites incorpora por primera vez para GLONASS señales de acceso múltiple por división de código (CDMA, *Code Division Multiple Access*) en banda L3, además de las clásicas señales FDMA en banda L1 y L2⁹. En la actualidad existen sólo dos satélites de esta serie en la constelación, uno operativo y uno en etapa de *test*.

En la tabla 2.2 se resume la información de las diferentes series de satélites que conforman la constelación GLONASS (Uragan, 2016; Uragan-M, 2016; Uragan-K, 2016); mientras que en la figura 2.6 se muestran gráficas ilustrativas de los mismos.

⁹No obstante, en un lanzamiento de Junio de 2014 se puso en órbita un satélite de la serie GLONASS-M con una carga útil experimental de transmisión CDMA en banda L3 (GNSS, 2014).

Serie	Años	Exitosos	Fallas	En operación	<i>Spares - Test</i>
GLONASS	1985-2005	81	6	0	0
GLONASS-M	2001-	45	6	23	2
GLONASS-K	2011-	2	0	1	1
Total	-	128	12	24	3

Tabla 2.2: Diferentes Series que conforman la constelación GLONASS.



Figura 2.11: Esquema de los diferentes satélites de las series que conforman la constelación GLONASS.

2.2. Segmento de Control

El segmento de control (CS) o segmento terreno es el encargado de gobernar el sistema y supervisar la operación de los satélites de la constelación.

Las principales funciones del mismo son:

- Determinar la orientación y ubicación de los satélites, y predecir sus órbitas.
- Supervisar y mantener el estado de salud de los satélites.
- Analizar la operación de los relojes a bordo de los satélites y estimar parámetros que permitan caracterizar su comportamiento, v.g. sincronismo con respecto a la base de tiempo del sistema, corrimiento en la frecuencia de operación.
- Determinar parámetros que describan cuestiones ambientales como por ejemplo el comportamiento de la ionósfera.
- Generar los parámetros del mensaje de navegación y transmitir esta información a los satélites, para que los mismos puedan a su vez transmitirlos a los usuarios.
- Monitorear la integridad de las señales transmitidas por los satélites. Verificar y registrar los datos de navegación enviados al usuario.
- Disponer las maniobras necesarias para mantener la órbita de cada satélite en sus parámetros apropiados, o para realizar el reposicionamiento de satélites frente a fallas en alguno de ellos.

- Asegurar la cobertura reemplazando los satélites que quedan fuera de servicio.

En general, el segmento de control está compuesto por una estación maestra encargada de coordinar toda la operación, y una red de estaciones de monitoreo dispersadas sobre la superficie terrestre (ubicadas tanto en su territorio como en colonias, bases militares del propietario del sistema GNSS en cuestión, o en sitios convenidos con otros estados soberanos). Algunas de estas estaciones poseen además antenas que permiten transmitir datos hacia los satélites.

2.2.1. GPS

El segmento de control de GPS es el responsable de la correcta operación del sistema. Está compuesto por una red de estaciones de monitoreo (MS), una estación de control maestra (MCS), una segunda estación maestra de resguardo (BMCS), y antenas de transmisión terrestres (GA).

La MCS es el nodo central de control de la constelación de satélites GPS. Colecta los datos de seguimiento de las estaciones de monitoreo y calcula la órbita y los parámetros de reloj de los satélites mediante un algoritmo de estimación basado en el filtrado de Kalman. Estos resultados son luego transferidos a las antenas de transmisión terrestres, para ser eventualmente transmitidos a los satélites. Originalmente, la MCS se encontraba ubicada en la base Vandenberg de la Fuerza Aérea (*Vandenberg AFB*), California. Actualmente se encuentra en la Sriever AFB, en Colorado Springs, Colorado.

El sistema contaba originalmente con cinco estaciones de monitoreo ubicadas en Hawai, Colorado Springs (Colorado, USA), Isla Ascensión (ubicada en el Océano Atlántico Sur), Diego García (un atolón ubicado en el Océano Índico), y Kwajalein (un atolón ubicado en el Océano Pacífico Norte). A los efectos de incrementar el desempeño y la precisión, nuevas estaciones fueron incorporadas en sucesivas modernizaciones del sistema. En 2001 se incorporó una estación en Cabo Cañaveral, Florida (USA). En 2005 se incorporaron seis nuevas estaciones en Adelaida (Australia), Buenos Aires (Argentina), Hermitage (Reino Unido), Manama (capital de Baréin, en el Golfo Pérsico) Quito (Ecuador), y Washington DC (USA). Cinco estaciones más fueron añadidas en 2006: Fairbanks (Alaska), Osan (Korea del Sur), Papeete (Tahiti) Pretoria (Sudáfrica), y Wellington (Nueva Zelanda).

Cada una de estas estaciones se encuentra equipada con un reloj atómico de alta precisión y receptores que continuamente miden los pseudo-rangos de todos los satélites en vista. Las mediciones de pseudo-rango son suavizadas y corregidas utilizando información meteorológica y de retardo ionosférico, y luego transmitidas a la MCS (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007).

Existen cuatro GA, ubicadas en la misma locación que cuatro de las estaciones de monitoreo: Isla Ascensión, Diego García, Kwajalein, y Cabo Cañaveral; y su operación es controlada por la MCS. Cada GA está equipada para transmitir comandos y datos a los satélites, entre los que se incluyen las efemérides y los parámetros de reloj, previamente calculados en la MCS; y para recibir de los satélites la información de telemetría y de rango. El enlace de comunicaciones hacia los satélites (*uplink*) opera en banda S.

La actualización de datos de cada GA hacia el satélite tiene lugar, nominalmente, tres veces por día. No obstante, los satélites de la constelación cuentan con información almacenada, que les permite predecir sus parámetros en caso que no pueda establecerse la

comunicación con el segmento terreno. La capacidad de operación del servicio de navegación, sin comunicación de los satélites con el CS, ha ido incrementándose a medida que se actualizaba la constelación, siendo de una duración de 3 a 4 días para los satélites del Bloque I, de 14 días para el Bloque II, 180 días para el Bloque IIIA, y mayor a 180 días para el Bloque IIR (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007).

2.2.2. GLONASS

El segmento de control, o segmento terreno del sistema GLONASS es el responsable de la correcta operación del sistema. Está compuesto por un Centro de Control del Sistema (SCC), un Sincronizador Central (CS) o reloj del sistema, y estaciones de Telemetría, Seguimiento (*Tracking*) y Control (TT&C).

El SCC, ubicado en el Centro Espacial Krasnoznamensk, 70 Km al sudoeste de Moscú, coordina el funcionamiento y operación a nivel de sistema y es el responsable del manejo y control de la constelación de satélites GLONASS. El SCC procesa la información de las Estaciones de Comando y Seguimiento, a los efectos de determinar el estado de operación de los relojes y las órbitas de los satélites, y actualizar el mensaje de navegación para cada satélite.

El CS, ubicado en Schelkovo, en la región de Moscú, es el responsable de la escala de tiempo del sistema GLONASS, mediante un reloj atómico de hidrógeno de alta precisión.

Existen cinco estaciones de TT&C, distribuidas a lo largo y ancho del territorio ruso: Schelkovo, Komsomoisk, San Petersburgo, Ussuriysk, y Yenisseisk. Se complementan con cinco estaciones de medición de distancia con láser (SLR), ubicadas en Komsomolsk-na-Amure (la única en Rusia), Balkhash (Kazajistán), Evpatoria (Ucrania), Kitab (Uzbekistan), y Ternopol (Ucrania). Estas estaciones realizan el seguimiento de la señal y monitoreo de los satélites en vista. La información de rango y de telemetría obtenida es luego transmitida al SCC para su procesamiento. También se encargan de transmitir la información hacia los satélites vía enlaces de comunicaciones (*uplink*) (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007).

Existen seis estaciones adicionales previstas para comenzar su operación en el futuro cercano, ubicadas tanto en territorio ruso, como en la Comunidad de Estados Independientes, ubicadas en Yakutsk, Ulan-Ude, Nurek, Vorkuta, Murmansk, y Zelenchuk.

2.3. Segmento de Usuario

Este segmento incluye todos los usuarios equipados con un receptor GNSS, los cuales pueden clasificarse según: categorías de usuario, tipo de receptor GNSS, y/o servicios de información que utilizan.

Las categorías de usuario distinguen entre usuarios civiles y militares, y entre usuarios autorizados y no-autorizados. La principal diferencia consiste en que los usuarios civiles y los no-autorizados no tienen acceso a todas las señales y servicios de los sistemas GNSS. Dentro de las aplicaciones de índole civil podemos citar:

- La navegación de vehículos espaciales y aeroespaciales (tema del que trata esta tesis),

como satélites de órbita baja y cohetes lanzadores.

- La aviación, tanto como instrumento de guiado en vuelo como en maniobras de aproximación y aterrizaje.
- La industria automotriz, donde el dispositivo más ampliamente utilizado tiene la funcionalidad de asistir a los conductores con instrucciones para llegar desde el punto de partida a una meta determinada con un mínimo número de desvíos. Existen, sin embargo dispositivos más sofisticados que permiten mejorar la seguridad de la operación del vehículo, e incluso lograr el guiado automático en aplicaciones que lo requieran.
- La navegación marítima y fluvial, donde resulta de gran ayuda bajo condiciones de baja visibilidad.
- La asistencia y guiado autónomo de maquinaria (por ejemplo maquinaria agrícola).
- La topografía y la geodesia.
- Usos recreativos, como caminatas, excursiones, ciclismo, etc.

Cada una de estas aplicaciones requiere un receptor con características y desempeños diferentes, por ejemplo un caminante no está en general interesado en el nivel de precisión milimétrico que sí requiere un topógrafo. Éste a su vez podría no estar interesado en obtener posición en tiempo real, la cual es indispensable en el caso de guiado autónomo, etc. Así, existen en el mercado receptores GNSS con características particulares para cada tipo de aplicación que se clasifican según el tipo de observables que utilizan (por ejemplo: pseudo-rangos, fase de portadora, mediciones diferenciales, etc.); según si utilizan una, dos, o más frecuencias; según si utilizan uno o más sistemas GNSS específicos; y según si realizan la fusión con algún tipo de sensor complementario, como por ejemplo acelerómetros o giróscopos.

Existen diversos servicios de información adicionales, tanto estatales como privados, con la capacidad de proveer a los usuarios diferentes datos sobre la operación de los sistemas GNSS. Generalmente, la información contiene reportes del estado de la constelación, interrupciones de servicio programadas, y datos orbitales precisos.

2.4. Descripción de la señal

En los sistemas de navegación satelital GPS y GLONASS el usuario opera de forma pasiva: los satélites transmiten señales electromagnéticas, y el usuario las recibe, sin transmitir nada hacia los satélites¹⁰. Esto permite que el número de usuarios que puede satisfacer el sistema sea, en principio, ilimitado.

Cada una de estas señales está formada en general por tres componentes:

- Un mensaje de datos de baja tasa (< 1 Kbps), conocido como mensaje de navegación, en el que se transmiten los parámetros orbitales, las correcciones de reloj y demás parámetros del sistema. Este mensaje, utiliza en general señalización NRZ bipolar.

¹⁰Solamente el segmento de control se comunica en ambas direcciones con los satélites.

Denominación	Frecuencia [MHz]	Código	Tasa de código [Mcps]
L1	1575,42	C/A	1,023
		L1C	1,023
L2	1227,60	L2C	1,023
L5	1176,45	L5I	10,23
		L5Q	10,23

Tabla 2.3: Características de las señales de uso civil GPS.

- Un código pseudo-aleatorio o secuencia pseudo-aleatoria, de una tasa mucho mayor a la del mensaje de navegación, con propiedades de correlación que permiten la medición del tiempo de transmisión de la señal; y que en algunos casos se utiliza para acceso múltiple por división de código (CDMA). Para esta secuencia generalmente se utiliza codificación NRZ bipolar. Dado que no transporta información, a los valores binarios que componen esta secuencia se los denomina *chips*, para distinguirlos de los *bits* del mensaje de datos.
- Una portadora en banda L ($1 \sim 2$ GHz).

El mensaje de navegación, se modula o multiplica por la secuencia pseudo-aleatoria, produciendo una expansión del espectro por secuencia directa (DSSS, *Direct-Sequence Spread Spectrum*). La señal digital resultante se modula sobre la portadora, en general mediante la técnica BPSK (*Binary Phase-Shift Keying*)¹¹. Además, en general se transmiten varias señales digitales sobre una misma portadora, utilizando la modulación en fase, I, y en cuadratura, Q; o mediante multiplexación por división de tiempo, TDM.

2.4.1. GPS

Las señales de uso civil en el sistema GPS se transmiten en tres frecuencias de portadora, denominadas L1, L2 y L5, que se detallan en la tabla 2.3, donde también se muestran los códigos de uso civil modulados sobre dichas portadoras.

Las señales L1C se incorporarán a partir del Bloque III, y por tanto no se encuentran disponibles actualmente; de las señales L5 (Bloque IIF en adelante) se encuentran disponibles 12 satélites, y de las señales L2C (Bloque IIR-M en adelante) se encuentran disponibles 19 satélites (ver tabla 2.1). Por tanto, en la actualidad la única señal de uso civil que brinda cobertura completa del sistema es la señal de código C/A (de *Coarse Acquisition*) en banda L1.

El código C/A es una secuencia de largo 1023 con una tasa de 1023 kilochips por segundo, es decir, una duración de 1 ms, lo cual corresponde a aproximadamente 297 m (a la velocidad de la luz en el vacío). Este código pertenece a la familia de códigos PRN conocida como códigos

¹¹No entraremos en detalle sobre la modulación MBOC (*Multiplexed Binary Offset Carrier*) utilizada en una de las señales de uso militar de GPS a partir del bloque IIR-M, y en el sistema Galileo.

Denominación	Frecuencia [GHz]	Señal	Tasa de código [kcps]
L1	$\sim 1,6$	ST	511
L2	$\sim 1,25$	ST	511

Tabla 2.4: Características de las señales de uso civil GLONASS.

Gold, que se obtienen mediante la suma módulo-2 (XOR) de dos secuencias de máximo largo. Cada satélite de la constelación transmite un código diferente, lo que permite implementar un esquema de acceso múltiple por división de código, CDMA, en el que las señales de los diferentes satélites comparten el mismo intervalo de frecuencias.

El mensaje de navegación, con una tasa de 50 bps y codificación NRZ bipolar, se modula sobre este código de tal manera que en el intervalo que dura cada bit de datos se repite 20 veces el código; alineado de forma que las posibles transiciones de bit coincidan con el comienzo de una de estas 20 secuencias C/A. La señal resultante se modula mediante la técnica BPSK sobre la portadora en banda L1.

2.4.2. GLONASS

A partir de la serie GLONASS-M, las señales de uso civil en el sistema GLONASS se transmiten en dos sub-bandas de frecuencia de portadora, denominadas L1 y L2, que se detallan en la tabla 2.4. La misma señal de uso civil, denominada de precisión estándar (ST) se transmite en estas dos sub-bandas.

A partir de la serie GLONASS-K, se incluyen nuevas señales de uso civil con modulación CDMA en las bandas L1, L2, y en una nueva banda denominada L3 (1205 MHz); pero, en la actualidad existe un único satélite de la serie operativo en la constelación.

El código PR utilizado en la señal ST es una secuencia de máximo largo de 511 chips, a una tasa de 511 kilochips por segundo, dando una duración de 1 ms, al igual que en el caso GPS, lo cual corresponde a aproximadamente 297 m (a la velocidad de la luz en el vacío).

El mensaje de navegación consta de dos partes: 85 bits de datos a una tasa de 50 bps, que son sumados módulo 2 con una secuencia periódica a tasa 100 bps de 1s y 0s intercalados (10101010...), denominada *meander sequence* (GLONASS, 2008), dando una “tasa” de 100 bps¹²; seguidos de 30 bits de la secuencia de marca temporal (secuencia fija y conocida) a una tasa de 100 bps. Este mensaje, con señalización NRZ bipolar, se modula sobre el código PR de manera que en el intervalo que dura cada bit del mensaje se repite 10 veces el código. El mensaje de navegación está alineado de tal manera que las posibles transiciones de bit coincidan con el comienzo de una de estas 10 secuencias PR.

A diferencia de GPS, todos los satélites GLONASS transmiten el mismo código PR. La separación de canales se realiza por FDMA (*Frequency Division Multiple Access*). GLONASS

¹²Esta forma es la que utiliza el ICD de GLONASS, GLONASS (2008), para la descripción de la señal. Una descripción alternativa consiste en pensar que se trata de una secuencia de datos a 50 bps con señalización Manchester.

Canal (K)	Sub-banda L1 [MHz]	Sub-banda L2 [MHz]
-07	1598,0625	1242,9375
-06	1598,6250	1243,3750
-05	1599,1875	1243,8125
-04	1599,7500	1244,2500
-03	1600,3125	1244,6875
-02	1600,8750	1245,1250
-01	1601,4375	1245,5625
00	1602,0	1246,0
01	1602,5625	1246,4375
02	1603,125	1246,875
03	1603,6875	1247,3125
04	1604,25	1247,75
05	1604,8125	1248,1875
06	1605,375	1248,625

Tabla 2.5: Frecuencia nominal de portadora en las sub-bandas L1 y L2 de GLONASS.

define los siguientes canales de frecuencia (GLONASS, 2008)

$$f_{K1} = f_{01} + K\Delta f_1 \quad (2.1)$$

$$f_{K2} = f_{02} + K\Delta f_2 \quad (2.2)$$

donde

$$f_{01} = 1602 \text{ MHz}, \Delta f_1 = 562,5 \text{ KHz}, \text{ (sub-banda L1)} \quad (2.3)$$

$$f_{02} = 1246 \text{ MHz}, \Delta f_2 = 437,5 \text{ KHz}, \text{ (sub-banda L2)} \quad (2.4)$$

$$-7 \leq K \leq +6 \quad K \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

En la tabla 2.5 se muestran los valores nominales de frecuencia de portadora en las sub-bandas L1 y L2 para los diferentes canales GLONASS. Se puede notar que existen sólo 14 posibles canales para repartir entre los 24 satélites de la constelación. La solución consiste en que un mismo canal de frecuencia puede ser utilizado por hasta dos satélites que se encuentren ubicados de manera anti-podal en la constelación. Así, como estos dos satélites no podrían encontrarse visibles simultáneamente para un usuario en tierra, se logra la separación de las señales.

2.5. Principio de Determinación de la Posición

La determinación de la posición en los sistemas GNSS se basa en dos principios relativamente simples: la medición de distancia a partir de señales electromagnéticas, y la trilateración a partir de mediciones de distancia a puntos conocidos.

El primer principio consiste en determinar lo que se conoce como tiempo de arribo, TOA (por sus siglas en inglés, *Time Of Arrival*), esto es, el tiempo que demora una señal electromagnética en viajar desde el transmisor hasta el receptor. Si asumimos que este tiempo puede medirse, la distancia entre transmisor y receptor queda determinada por

$$r_1 = c \cdot TOA \quad (2.6)$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio, que en un principio puede asumirse que se corresponde con la velocidad de la luz en el vacío.

Esta medición permite determinar que el receptor se encuentra en algún punto sobre la superficie de una esfera de radio r_1 con centro en el transmisor. Si se repite este procedimiento para un segundo transmisor a distancia r_2 del receptor, la incertidumbre sobre la posición de este último quedará acotada a la intersección de la primera esfera con una segunda esfera de radio r_2 centrada en este segundo transmisor. Puede verse que la intersección de estas dos esferas resulta en una circunferencia en el espacio tridimensional, como se muestra en la figura 2.12(a). Es decir, la incertidumbre en la posición del receptor se reduce a esta circunferencia. Si se repite una vez más este procedimiento para un tercer transmisor a distancia r_3 del receptor, la incertidumbre sobre la posición del receptor se reducirá a la intersección de una tercera esfera de radio r_3 centrada en este tercer transmisor, con la circunferencia resultante de la intersección de las dos primeras esferas. Puede verse que la intersección de una esfera con una circunferencia en el espacio resulta en dos posibles puntos, como se muestra en la figura 2.12(b). Al procedimiento descrito anteriormente se lo conoce como trilateración o resección. En general, en un caso práctico, uno de estos dos posibles puntos puede eliminarse apelando a alguna fuente de información adicional, como por ejemplo el conocimiento de que el receptor se encuentra sobre o cercano a la superficie terrestre. De no ser posible esto, deberá recurrirse al conocimiento de la distancia a un cuarto transmisor para determinar finalmente la posición del receptor.

Un caso particular de lo anterior resulta cuando el receptor se encuentra sobre la línea que une dos transmisores. En este caso, no haría falta una tercer medición para obtener la posición del receptor. Otro caso particular ocurre cuando el receptor se encuentra en el mismo plano que los tres transmisores, con lo cual la intersección resulta en un único punto, y no haría falta contar con información adicional para determinar la posición del receptor. Un tercer caso particular ocurre cuando los tres transmisores se encuentran en la misma línea (y el receptor no está en esta misma línea, ya que esta situación se reduciría al primer caso analizado). En este caso, la intersección de las tres esferas coincide con el círculo intersección de dos cualesquiera de ellas, con lo cual una de las tres esferas no aporta información relevante para la determinación de la posición del usuario. En este último caso, se hará necesario tomar una cuarta medición.

En los sistemas GNSS, los transmisores son los satélites que forman la constelación del sistema, y la posición del receptor es lo que se conoce como posición de usuario. Denotamos con \mathbf{u} al vector que contiene las tres coordenadas de posición del usuario en un marco de referencia espacial determinado, con \mathbf{s}_i al vector que contiene las tres coordenadas de posición

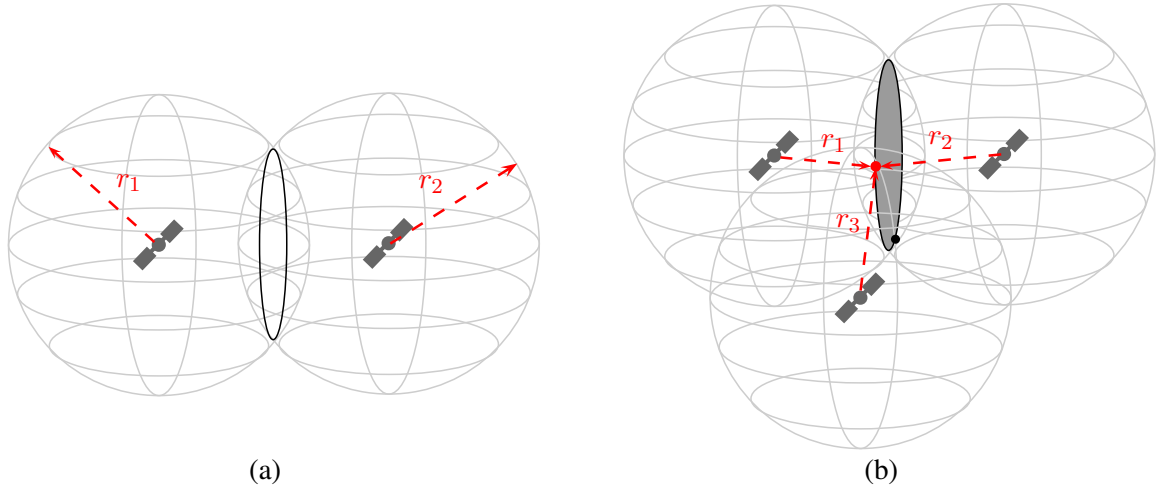


Figura 2.12: (a) Intersección de dos esferas de radios r_1 y r_2 . (b) Intersección con una tercer esfera de radio r_3 .

de un satélite particular en este mismo marco de referencia espacial, y con \mathbf{r}_i al vector diferencia entre ambos

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Esta relación se esquematiza en la figura 2.13. La distancia geométrica o rango entre el satélite y el usuario, lo que en el análisis anterior se corresponde con el radio de la esfera, r_i , está dada por la norma euclídea de \mathbf{r}_i , denotada $\|\mathbf{r}_i\|$.

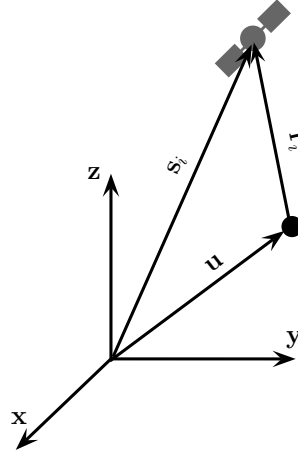


Figura 2.13: Posición del usuario y del satélite en un mismo marco de referencia espacial.

2.6. Tiempo de Transmisión

Como se menciona previamente, la medición de distancia entre transmisor y receptor, es decir, entre satélite y usuario, se basa en la medición del TOA de la señal. Las señales

transmitidas por los satélites que forman las constelaciones de los sistemas GNSS transportan información indicando en qué instante (relativo a la base de tiempo de cada sistema GNSS particular) han sido generadas. El receptor puede entonces determinar (dentro de un margen de error) el instante de transmisión a partir de la decodificación de la marca de tiempo presente en la señal. A esta estimación se la denomina Tiempo de Transmisión (TT). Si el receptor se encontrara sincronizado con la misma base de tiempo del sistema, podría conocer el instante de recepción de la señal medido según ese mismo patrón temporal, lo que se conoce como Tiempo de Recepción (TR). La diferencia entre el TR y el TT determinaría entonces el TOA

$$TOA = TR - TT. \quad (2.8)$$

La indicación de en qué instante fue generada la señal¹³ es justamente el código PR que modula al mensaje de navegación, cuyo comienzo está alineado con la base de tiempo del satélite. Si el receptor se encontrara sincronizado con la base de tiempo del sistema, podría generar este código de manera sincrónica con el generado por el satélite, como se muestra en la figura 2.14, a) y c). La señal transmitida por el satélite, llega al receptor retrasada por la cantidad TOA , como se muestra en la figura 2.14, b). El receptor, puede entonces retrasar la réplica local hasta que se logre el máximo de correlación con la señal recibida. El valor por el cual debe retardarse esta señal es justamente el TOA , como se muestra en la figura 2.14, d).

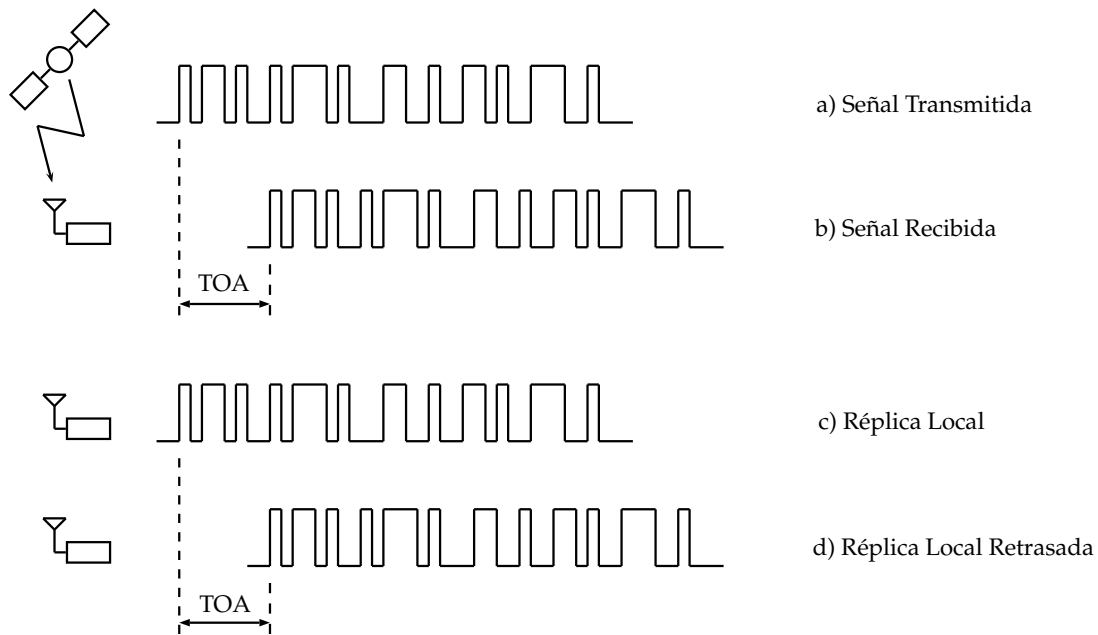


Figura 2.14: Medición del tiempo de arribo utilizando la réplica de código.

En la práctica, lograr el sincronismo entre el receptor y la base de tiempo del sistema requeriría la utilización de relojes atómicos muy precisos en los receptores, lo cual encarecería notablemente el precio de los mismos. Veremos que tampoco interesa realmente. Lo importante a resaltar es que lo que el receptor determina son los **tiempos de transmisión** de las señales provenientes de cada uno de los satélites, y esta determinación debe hacerse para todos ellos **en un mismo instante de recepción**. Esto último es lo que realmente interesa para la solución de posición. Para ello, el receptor debe tener una base de tiempo propia, no

¹³En realidad, la parte fina de esta indicación. La parte gruesa se determina en base al mensaje de navegación.

necesariamente demasiado precisa¹⁴, que le permita conocer a qué instante corresponde cada medición (a los efectos de que sean sincrónicas entre sí).

2.7. Pseudo-Rango

La medición del TOA asume implícitamente que tanto transmisor como receptor comparten una misma base de tiempo, contra la cual realizar esta medición. En la práctica, el marco de referencia temporal de los satélites del sistema GNSS no es sincrónico con el marco de referencia temporal del usuario, lo cual se interpreta diciendo que el reloj de usuario posee un error desconocido, (también denominado sesgo de reloj local) Δt_b , con respecto al reloj de los satélites. Si denominamos con TT_s al tiempo de transmisión de la señal en el marco de referencia del satélite; y con TR_s y TR_u al tiempo de recepción de la señal en el marco de referencia del satélite y del usuario, respectivamente, el tiempo de arribo medido, resulta

$$TOA_{med} = TR_u - TT_s = (TR_s + \Delta t_b) - TT_s = TR_s - TT_s + \Delta t_b \quad (2.9)$$

$$\therefore TOA_{med} = TOA_s + \Delta t_b. \quad (2.10)$$

Es decir, el tiempo de arribo medido es igual al tiempo de arribo de la señal (medido en la base de tiempo del satélite) más el término debido al error de sincronización de las bases de tiempo.

Si tomamos la ecuación (2.10) para un satélite particular i , multiplicamos ambos miembros por la velocidad de la luz, y definimos

$$\rho_i \triangleq c TOA_{med_i} \quad (2.11)$$

$$\|\mathbf{r}_i\| \triangleq c TOA_{s_i} \quad (2.12)$$

$$b \triangleq c \Delta t_b \quad (2.13)$$

llegamos a

$$\rho_i = \|\mathbf{r}_i\| + b \quad (2.14)$$

donde $\|\mathbf{r}_i\|$ es el rango o distancia geométrica entre el satélite i y el usuario, ecuación (2.6), y b es el error de sincronismo traducido a distancia. A ρ_i se lo denomina pseudo-distancia ó pseudo-rango, ya que no se corresponde con una distancia geométrica, sino con una distancia ficticia que incorpora el efecto del no-sincronismo de los relojes en la medición de distancia.

En general se interpreta que las mediciones obtenidas por los receptores GNSS son los pseudo-rangos. Si bien, como enfatizamos en la sección 2.6, las mediciones obtenidas son los tiempos de transmisión de la señal, lo expuesto previamente muestra la relación entre tiempos de transmisión y pseudo-rangos. En adelante, hablaremos de tiempos de transmisión o de pseudo-rangos, según convenga a nuestro análisis. En general, para pensar el armado de las mediciones internamente al receptor, y para el cálculo de los estados de los satélites conviene hablar de tiempos de transmisión, mientras que para obtener la solución de navegación resulta más cómodo pensar en mediciones de pseudo-rango.

¹⁴La estabilidad en frecuencia de la base de tiempo es no obstante un factor de diseño a tener en cuenta, ya que influye en por ejemplo el desempeño de los lazos de seguimiento de señal.

En principio, podemos asumir que todos los satélites que forman la constelación de un mismo sistema GNSS poseen una base de tiempo sincrónica, con lo cual el error de sincronismo con respecto a la base de tiempo del usuario es común para todas las mediciones. Por tanto, el término b es común a todos los pseudo-rangos.

Dado un conjunto de satélites de posición conocida, para los cuales se puede obtener mediciones de pseudo-rango, la obtención de la solución de posición de usuario consiste en resolver un sistema de ecuaciones no-lineales de la forma (2.14). Esta solución implica la obtención del parámetro b , lo que permite obtener el sesgo de reloj de usuario, y por ende sincronizar al usuario con la base de tiempo del sistema GNSS. Es por ello que a la solución obtenida se la denomina solución de posición-tiempo de usuario.

El mencionado sistema de ecuaciones posee 4 incógnitas, las tres coordenadas del vector posición de usuario y el sesgo de reloj local. Es por esto que para su resolución se requieren al menos 4 mediciones de pseudo-rango.

Volviendo a la interpretación geométrica, el problema consiste en hallar la intersección de esferas, centradas en los satélites, cuyos radios dependen de dos componentes. Por un lado el rango geométrico o distancia entre el satélite y el usuario, y por otro lado el sesgo de reloj de usuario, común a todas las mediciones.

2.8. Principio de Determinación de la Velocidad

Así como en base a las mediciones de rango geométrico o distancia entre los satélites y el usuario, y conociendo las posiciones de tales satélites, es posible obtener la solución de posición de dicho usuario; en base a mediciones de variación del rango geométrico o distancia entre los satélites y el usuario, y conociendo las velocidades de tales satélites, es posible determinar la velocidad del usuario.

Si definimos con $\dot{\mathbf{u}}$ al vector que contiene las tres coordenadas de velocidad del usuario en un marco de referencia espacial determinado, con $\dot{\mathbf{s}}_i$ al vector que contiene las tres coordenadas de velocidad de un satélite particular, en este mismo marco de referencia espacial, y con $\dot{\mathbf{r}}_i$ al vector diferencia entre ambos, o velocidad relativa

$$\dot{\mathbf{r}}_i \triangleq \dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

puede verse que la variación del rango geométrico (norma del vector \mathbf{r}_i) está dada por¹⁵

$$\dot{r}_i = \frac{d\|\mathbf{r}_i\|}{dt} = \frac{\mathbf{r}_i' \dot{\mathbf{r}}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} = \frac{\mathbf{r}_i' (\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{r}_i\|} = \mathbf{e}_i' (\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}}) \quad (2.16)$$

donde denotamos con

$$\mathbf{e}_i \triangleq \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \quad (2.17)$$

al vector que apunta desde la posición del usuario al i -ésimo satélite, denominado comúnmente vector de línea de vista. Una vez que se tiene una estimación de la posición del usuario, es simple determinar la dirección de la línea de vista (ver ecuación (2.7)).

¹⁵Utilizaremos la notación \mathbf{A}' para denotar la traspuesta de una matriz \mathbf{A} .

La ecuación (2.16) expresa matemáticamente un hecho que resulta bastante simple de interpretar intuitivamente: la variación del rango geométrico es igual a la proyección de la velocidad relativa sobre el vector de línea vista.

Si se cuenta con 3 mediciones de variación de rango geométrico \dot{r}_i entre el usuario y 3 satélites de velocidad conocida $\dot{\mathbf{s}}_i$, es posible armar un sistema de ecuaciones, que escrito en forma matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} (\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}}) \quad (2.18)$$

Resolviendo esta ecuación es posible hallar las tres incógnitas, las tres componentes del vector $\dot{\mathbf{u}}$ que representan las tres coordenadas de velocidad del usuario en el marco de referencia utilizado.

2.9. Delta-Rango

Se denomina delta-rango a la tasa de variación del rango debido a la velocidad relativa entre satélite y usuario. Este valor puede estimarse a partir del corrimiento de frecuencia de la portadora de la señal recibida, producto del movimiento relativo, lo que comúnmente se conoce como efecto Doppler¹⁶. Si definimos con f_{Ts} a la frecuencia de portadora de la señal transmitida por el satélite y con f_{Rs} a la frecuencia de portadora de la señal recibida por el usuario, la relación entre ambas está dada por

$$f_{Rs} = f_{Ts} \left(1 - \frac{\dot{r}_i}{c} \right) \quad (2.19)$$

donde en esta expresión se considera que ambas frecuencias han sido medidas en la base de tiempo del satélite.

Al igual que en el caso del pseudo-rango, esta medición resulta afectada por el hecho de que las bases de tiempo del satélite y el usuario no son sincrónicas. Existe una variación de frecuencia entre ambas bases de tiempo, lo que se conoce como deriva del reloj de usuario, con lo cual la frecuencia medida en una base no se corresponde con la medida en la otra. Si definimos como f_{Ru} a la frecuencia de portadora recibida por el usuario, medida en la base de tiempo del usuario (lo que realmente mide el receptor), y con Δf_d a la diferencia de la misma con respecto a la medida por el satélite

$$\Delta f_d \triangleq f_{Ru} - f_{Rs} \quad (2.20)$$

¹⁶Si bien en alguno de los primeros sistemas de posicionamiento satelital como Transit (USA) o Tsikada (URSS) se utilizaban mediciones de Doppler para obtener la solución de posición (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007), aquí nos restringiremos a su utilización como medio para la determinación de la velocidad, que es como usualmente se lo utiliza en los sistemas GNSS.

la ecuación (2.19) puede escribirse como

$$f_{Ru} = f_{Ts} \left(1 - \frac{\dot{r}_i}{c} \right) - \Delta f_d \quad (2.21)$$

$$f_{Ts} - f_{Ru} = \lambda \dot{r}_i + \Delta f_d \quad (2.22)$$

$$\frac{f_{Ts} - f_{Ru}}{\lambda} = \dot{r}_i + \frac{\Delta f_d}{\lambda} \quad (2.23)$$

$$\dot{\rho}_i = \dot{r}_i + d \quad (2.24)$$

donde λ es la longitud de onda nominal de la señal transmitida por el satélite, d es la deriva del reloj de usuario traducida a velocidad, y con $\dot{\rho}_i$ denotamos la medición de delta-rango para el satélite i . A partir de (2.16), puede escribirse

$$\dot{\rho}_i = \mathbf{e}_i'(\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}}) + d \quad (2.25)$$

la cual es una ecuación lineal que relaciona la medición de delta-rango con la velocidad del usuario. Al igual que el sesgo del reloj local, el término d constituye una incógnita adicional a resolver. Por su parte, la velocidad del satélite puede obtenerse a partir de la información del mensaje de navegación. Así, con al menos cuatro mediciones de delta-rango podría obtenerse la solución de velocidad y deriva del reloj de usuario.

2.10. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se presentaron los dos sistemas GNSS completamente operativos en la actualidad: GPS y GLONASS. Se expusieron brevemente la composición y las principales características de cada uno de ellos.

Se presentaron también algunas definiciones generales como la medición de TOA, pseudo-rango y delta-rango; además de conceptos generales como la determinación de la posición y velocidad en base a mediciones de los sistemas GNSS. Estos últimos conceptos exceden la particularidad de los sistemas GPS y GLONASS y son aplicables a la generalidad de los sistemas GNSS.

CAPÍTULO 3

MARCOS DE REFERENCIA

En la formulación matemática de la determinación de la posición y la velocidad con los sistemas GNSS (secciones 2.5 y 2.8) se asume que tanto las mediciones de pseudo-rango y de delta-rango como los estados de posición y velocidad de los satélites se encuentran medidos en un mismo marco de referencia espacial y corresponden a un mismo instante, también medido con respecto a un mismo marco de referencia temporal. Es decir, para la formulación matemática del problema de navegación se debe contar con un marco de referencia espacio-temporal al cual referir las variables intervinientes.

En general, cada sistema GNSS define su propio marco de referencia temporal, con lo cual en caso de formular el problema de navegación con mediciones de un único sistema GNSS¹ resulta natural escoger como marco de referencia para la solución de navegación, dicho marco de referencia temporal.

En caso de utilizar mediciones de más de un sistema GNSS a la vez, resulta conveniente escoger como marco de referencia temporal el propio de alguno de los sistemas GNSS intervinientes, y considerar como una incógnita adicional a la diferencia instantánea entre el marco escogido en primer término y el de cada uno de los demás sistemas intervinientes. Como parte de los esfuerzos por permitir la inter-operatividad de los sistemas GNSS, cada uno informa (o prevé informar) con cierto grado de precisión la diferencia estimada entre su marco de referencia temporal y el de los demás sistemas; con lo cual la incógnita adicional en la formulación del problema de navegación quedaría con un bajo grado de indeterminación.

El ejemplo típico de aplicación consiste en plantear el problema de navegación conjunto GPS/GLONASS, en el cual una opción es seleccionar el marco de referencia temporal de GPS (que resulta más conveniente por cuestiones que discutiremos más adelante) y añadir como incógnita la diferencia del marco de referencia temporal de GLONASS con respecto al de GPS.

¹Esto puede ser de interés también en receptores que utilizan más de un sistema GNSS, pero que obtienen la solución de navegación con cada uno de los sistemas de manera independiente, sin combinar mediciones de más de un sistema.

Por otra parte, la definición de un marco de referencia espacial se basa en la elección de un sistema de coordenadas apropiado. Dependiendo de lo que se quiera analizar, o del enfoque utilizado, resulta conveniente (incluso en un mismo problema) definir diferentes sistemas de coordenadas, con ciertas características particulares. Dependiendo de la aplicación, la relación entre estos sistemas de coordenadas será una variable conocida o una incógnita adicional a determinar. Desde nuestro enfoque diremos que para la *formulación* del problema resultará conveniente utilizar diferentes marcos de referencia, mientras que para la *resolución* del problema de navegación resulta conveniente referir todo a un mismo marco.

3.1. Marcos de Referencia Temporal

3.1.1. GPS

Los relojes atómicos ubicados tanto a bordo de los satélites GPS (segmento espacial) como en las estaciones de monitoreo (segmento de control) conforman una base de tiempos propia conocida como marco de referencia temporal del GPS². Esta base procede del procesamiento estadístico de las observaciones de estos relojes atómicos.

Además, el segmento de control se encarga de mantener el tiempo GPS dentro de un error de $1\ \mu\text{s}$ (módulo 1 s) con respecto al Tiempo Universal Coordinado del Observatorio Naval de los Estados Unidos, UTC (USNO). En la práctica esta diferencia está típicamente dentro de los 50 ns (módulo 1 s) (Kaplan y Hegarty, 2005).

A diferencia de la escala de tiempo UTC, en la cual se introducen ajustes de ± 1 segundo, conocidos como *leap-seconds*, cada determinados intervalos³ a los efectos de mantener dicha escala cercana al día solar medio, el tiempo GPS es una escala de tiempo continua. Esto hace que exista una diferencia de un número de segundos enteros entre el tiempo GPS y el marco UTC (USNO). Los dos marcos fueron coincidentes a las 0 horas del 6 de Enero de 1980. Al momento actual⁴ existe una diferencia de 17 segundos de adelanto del tiempo GPS con respecto al UTC. Esta relación, así como las relaciones con otros marcos de referencia temporales pueden obtenerse en Leapsecond (2016).

Para informar el tiempo GPS en el mensaje de navegación, se lo separa en dos partes o campos: el número de semana GPS, WN (acrónimo de *Week Number*), y los segundos transcurridos desde el inicio de la semana, TOW (acrónimo de *Time Of Week*). El cambio de semana GPS se produce en la medianoche del sábado/domingo (0 horas del día domingo), según la base de tiempo GPS. La cuenta se inició con el valor de semana 0, a las 0 horas del 6 de Enero de 1980. Dado que el campo utilizado para informar el número de semana consta de 10 bits, el valor máximo que puede representarse es 1023, con lo cual el valor realmente transmitido es el número de semana módulo 1024. El usuario debe tener en cuenta este hecho al momento de interpretar el campo WN. El primer desborde de WN se produjo en la medianoche del 21 al 22 de Agosto de 1999, con lo cual al valor transmitido actualmente se le debe adicionar 1024. El segundo desborde se producirá en el año 2019. El TOW toma el valor 0 al inicio de la semana, y adopta un valor máximo de $604800 - 1$.

²Que para abreviar denominaremos simplemente “tiempo GPS”.

³El estándar UTC habilita a introducir *leap seconds* al final de cualquier mes UTC, con mayor preferencia en Junio o Diciembre, y con segunda mayor preferencia en Marzo o Septiembre.

⁴1 de Septiembre de 2016.

3.1.2. GLONASS

La base de tiempo del sistema GLONASS⁵ es mantenida por la estación de Sincronización Central (CS) que forma parte del segmento de control del sistema. La estabilidad de los relojes de Hidrógeno utilizados por la CS es superior a 2×10^{-15} . Por su parte, cada uno de los satélites que forman la constelación del sistema se encuentra provisto de relojes de cesio (utilizados como referencias de tiempo/frecuencia) con una estabilidad en frecuencia superior a 5×10^{-13} , 1×10^{-13} y 1×10^{-14} (satélites GLONASS, GLONASS-M, y GLONASS-K, respectivamente).

Además, el tiempo GLONASS se encuentra acoplado al sistema de referencia temporal UTC, con un sesgo constante de 3 hs (correspondiente al sesgo existente entre el tiempo de Moscú y el tiempo Greenwich), y con errores del orden de los microsegundos, debido a que cada base temporal es mantenida por un reloj maestro diferente.

Lo anterior implica además que la escala de tiempos del sistema GLONASS debe considerar la adición/sustracción de segundos (*leap-seconds*) que se efectúa en el sistema UTC para mantenerlo en torno al día solar medio; lo que provoca que el tiempo GLONASS no constituya una escala temporal continua⁶ como en el caso del tiempo GPS. Esta última es la razón primordial por la que, en caso de utilizar ambos sistemas conjuntamente, se prefiera tomar como referencia temporal a la de GPS.

3.2. Marcos de Referencia Espacial

3.2.1. Equinoccio Vernal

Se denomina *plano de la eclíptica* al plano que contiene la órbita media de la Tierra alrededor del Sol, y *plano ecuatorial* al plano que contiene al ecuador terrestre. Dado que el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular a dicho plano sino que presenta una inclinación de aproximadamente $23,4^\circ$, el plano ecuatorial intersecta al plano de la eclíptica dando lugar a una línea, que se conoce como *línea del equinoccio vernal*.

El Sol se encuentra sobre la línea del equinoccio vernal dos veces al año, conocidas como *equinoccio vernal* y *equinoccio otoñal*⁷. La ubicación del Sol en el momento del equinoccio vernal, visto desde la Tierra, define un punto fijo en el espacio denotado por γ . La dirección positiva de la línea del equinoccio vernal se define como aquella que apunta desde la Tierra hacia el punto γ (Vallado, 1997).

Si bien existen efectos que producen variaciones de la dirección de γ , estas variaciones son del orden de $1,4^\circ$ por centuria, y a los fines prácticos puede considerarse como una dirección fija en el espacio.

⁵Que para abreviar denominaremos “tiempo GLONASS”.

⁶Si bien los saltos podrían tener lugar, en el peor de los casos, cada un mes, esto introduce complicaciones adicionales en la implementación de los receptores.

⁷La denominación depende del hemisferio desde donde se las mire. El equinoccio vernal o primaveral tiene lugar aproximadamente el 21 de septiembre (marzo) en el hemisferio sur (norte), mientras que el equinoccio otoñal tiene lugar aproximadamente el 21 de marzo (septiembre) en el hemisferio sur (norte).

3.2.2. Marco de Referencia Inercial Centrado en la Tierra (ECI)

La caracterización del movimiento tanto del vehículo que nos interesa navegar como de los satélites GNSS consiste básicamente en la aplicación de las leyes del movimiento de Newton; para lo cual se hace necesario la definición de un marco de referencia inercial⁸.

El sistema de coordenadas denominado ECI (acrónimo de *Earth-Centered Inertial*, Inercial Centrado en la Tierra) se define tomando como origen el centro de masa de la Tierra y los ejes coordenados de manera que permanezcan fijos con respecto a las estrellas distantes.

Típicamente, en un sistema ECI el plano xy se toma coincidente con el plano ecuatorial terrestre, el eje x permanece fijo en alguna dirección particular relativa a la esfera celeste, el eje z se toma perpendicular al plano xy en dirección al polo norte, y la dirección del eje y se elige de manera de completar una terna de “mano derecha”. Si bien este marco de referencia no es propiamente inercial, ya que el sistema acelera con el movimiento de rotación de la tierra alrededor del sol, resulta en general una muy buena aproximación.

Una sutileza en esta definición es que, debido a las irregularidades propias del movimiento terrestre, tomando el eje x en una dirección fija relativa a la esfera celeste, el sistema no resulta realmente inercial. La solución a esto es definir la orientación de los ejes en un determinado instante. Por ejemplo, el sistema ECI empleado en GPS utiliza la orientación del plano ecuatorial a las 12:00 hs del 1 de enero del 2000 (en el sistema UTC), el eje x se toma apuntando desde el centro de masa de la tierra hacia el equinoccio vernal, y los demás ejes de la forma antes descripta. Este sistema puede considerarse inercial para propósitos del sistema GPS (Kaplan y Hegarty, 2005).

3.2.3. Marco de Referencia Centrado en la Tierra, Fijo con la Tierra (ECEF)

Para la descripción de la solución de navegación resulta más conveniente contar con un sistema de coordenadas que permanezca fijo con respecto a la Tierra. Un sistema que cumple con estas características es el denominado sistema ECEF (acrónimo de *Earth-Centered Earth-Fixed*, Centrado en la Tierra, Fijo con la Tierra), en el cual se toma como origen el centro de masa de la Tierra, y el plano xy coincidente con el plano ecuatorial, al igual que en el sistema ECI. Sin embargo, en el sistema ECEF, el eje x se toma apuntando en la dirección de 0° de longitud (meridiano de Greenwich), y el eje y en la dirección de 90° de longitud Este. El eje z se toma perpendicular al plano ecuatorial en dirección al Norte geográfico, completando así una terna ordenada de “mano derecha”. Este sistema así descripto rota junto con la tierra y por tanto no constituye un marco de referencia inercial.

WGS-84

El marco de referencia terrestre utilizado por GPS es el *World Geodetic System 1984* (WGS-84), derivado originalmente en base a observaciones del sistema Transit. Según Roßbach (2000) la definición de este marco de referencia es la siguiente:

⁸Es decir, un marco de referencia en el que se asume que las leyes de Newton son válidas.

Parámetro	Valor	Significado
a	$6,3781370 \times 10^6$ m	Semi-eje mayor del elipsoide.
f	$1/298,257223563$	Factor de achatamiento del elipsoide.
ω_e	$7,292115 \times 10^{-5}$ rad/s	Velocidad angular de la Tierra.
μ	$3,986004418 \times 10^{14}$ m ³ /s ²	Constante de gravitación terrestre.

Tabla 3.1: Parámetros del elipsoide WGS-84.

- El origen es el centro de masa de la Tierra.
- El eje z es paralelo a la dirección del *Conventional International Origin* (CIO) del movimiento polar, según la definición del *Bureau International de l'Heure* (BIH).
- El eje x es la intersección del plano meridiano de referencia del WGS-84 y el ecuador medio astronómico.
- El eje y completa una terna ortogonal de mano derecha.

Asociado con este marco de referencia existe un elipsoide de revolución geocéntrico definido por el semi-eje mayor, a , el factor de achatamiento, $f = (a - b)/a$, la velocidad de rotación terrestre, ω_e , y la constante de gravitación terrestre, μ . Los valores de estas constantes han sido reajustados con el transcurso del tiempo, en sucesivas revisiones del WGS-84, denotadas WGS-84 (G730), WGS-84 (G873), WGS-84 (G1150), donde el número entre paréntesis refiere a la semana GPS en la que se introduce la modificación. Los valores utilizados actualmente por el sistema se presentan en la tabla 3.1 (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2007).

PZ-90

El marco de referencia terrestre empleado por el sistema GLONASS es el denotado PZ-90, abreviatura de *Parametry Zemli* 1990 (también PE-90, abreviatura de *Parameters of the Earth* 1990). Según GLONASS (2008) la definición de este marco de referencia es la siguiente:

- El origen es el centro de masa de la Tierra.
- El eje z es paralelo a la dirección del Polo Norte Medio, de acuerdo con las recomendaciones de la *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS).
- El eje x está dirigido al punto de intersección entre el plano ecuatorial terrestre y el meridiano cero establecido por el *Bureau International de l'Heure* (BIH).
- El eje y completa una terna ortogonal de mano derecha.

También asociado a este marco de referencia existe un elipsoide de revolución geocéntrico, cuyos valores utilizados actualmente por el sistema se presentan en la tabla 3.2 (GLONASS, 2008).

Parámetro	Valor	Significado
a	$6,3781360 \times 10^6$ m	Semi-eje mayor del elipsoide.
f	$1/298,25784$	Factor de achatamiento del elipsoide.
ω_e	$7,292115 \times 10^{-5}$ rad/s	Velocidad angular de la Tierra.
μ	$3,9860044 \times 10^{14}$ m ³ /s ²	Constante de gravitación terrestre.

Tabla 3.2: Parámetros del elipsoide PZ-90.

Δx	Δy	Δz	δs	$\delta \epsilon$	$\delta \psi$	$\delta \omega$
0	2,5	0	0	0	0	$1,9 \times 10^{-6}$

Tabla 3.3: Parámetros de la transformación entre los marcos de referencia de GPS y GLONASS.

Si bien las definiciones anteriores se basan a su vez en definiciones de otros organismos, lo que debe rescatarse es que cada una se basa en definiciones particulares de centro de masa de la Tierra, plano ecuatorial y polo norte terrestre. No obstante las definiciones adoptadas, los marcos ECEF utilizados por GPS y por GLONASS son muy similares, difiriendo principalmente en una rotación en torno al eje z y una traslación del origen. Existen una serie de mediciones que apuntan a determinar con cierto grado de exactitud esta transformación, que resulta de relevancia en campos más cercanos a la geodesia. Un resumen de esta discusión se encuentra en [Roßbach \(2000\)](#). Por cuestiones prácticas adoptaremos la siguiente transformación entre los sistemas, con los valores indicados en la tabla 3.3

$$\begin{bmatrix} x^{eGPS} \\ y^{eGPS} \\ z^{eGPS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + (1 + \delta s) \begin{bmatrix} 1 & \delta \omega & -\delta \psi \\ -\delta \omega & 1 & \delta \epsilon \\ \delta \psi & -\delta \epsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{eGLO} \\ y^{eGLO} \\ z^{eGLO} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde el superíndice e_{GPS} indica que la coordenada corresponde al sistema ECEF de GPS, mientras que e_{GLO} indica que la coordenada corresponde al sistema ECEF de GLONASS.

En lo que sigue, adoptaremos como sistema ECEF el propio de GPS, sin hacer referencia explícita, y cuando sea necesario se realizarán las transformaciones necesarias para llevar a este marco de referencia.

3.2.4. Marco de Referencia del Cuerpo

A los efectos de caracterizar diferentes partes del vehículo (generalmente modelado como cuerpo rígido) que permanecen solidarias al mismo, como es el caso de la/s antena/s que reciben las señales GNSS; así como también para describir la orientación del vehículo relativa a otro marco de referencia, resulta conveniente definir un sistema de coordenadas propio del cuerpo. Esto es, una terna ordenada que se mantenga fija con respecto al vehículo.

En general, resulta conveniente elegir como origen de este sistema de coordenadas el centro de masa del vehículo. La elección de los ejes se relaciona con algún eje de simetría del vehículo, y/o con la línea tangente a la trayectoria nominal del mismo, como se ejemplifica en la figura 3.1.

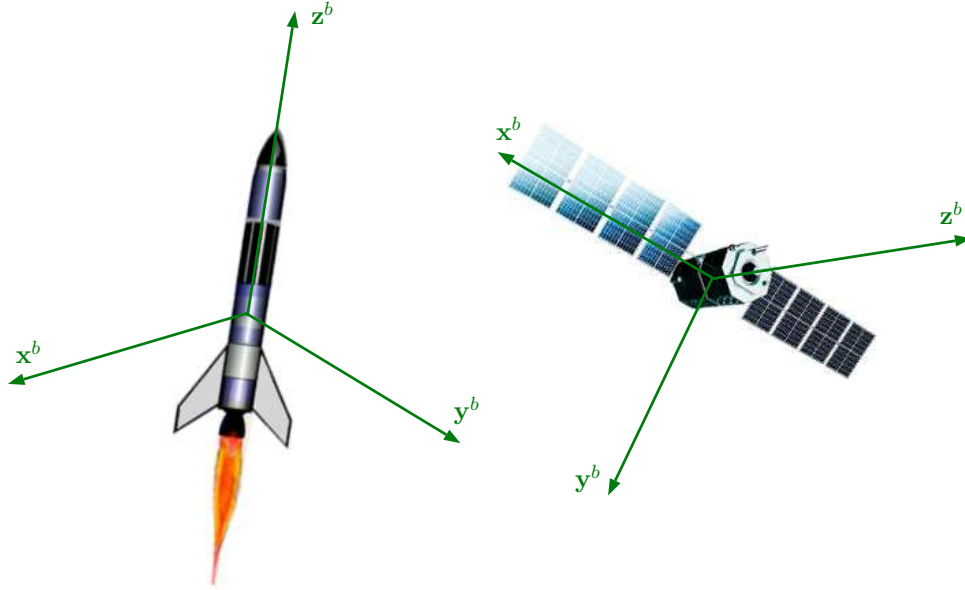


Figura 3.1: Sistema de referencia del vehículo.

3.2.5. Marco de Referencia de la Antena

Con el propósito de describir efectos que son relativos a la ubicación y orientación de la/s antena/s GNSS, resulta conveniente definir un sistema de coordenadas propio de cada antena. Esto es, una terna ordenada que se mantenga fija con respecto a la misma.

En la figura 3.2 se muestra el sistema de coordenadas definido para una antena tipo *patch*, denotada a_j . El origen se define como el centro geométrico de la cara superior de la antena, con el eje z normal a la superficie y los ejes x e y paralelos a los lados de la misma. También se muestra cómo se definen los ángulos de inclinación (θ) y de azimut (ϕ) que se utilizan en las especificaciones del ángulo con el que la señal de los diferentes satélites GNSS incide sobre la antena.

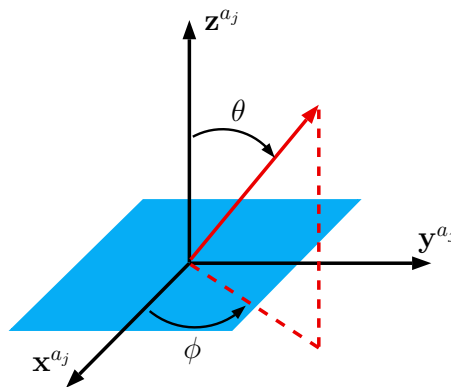


Figura 3.2: Sistema de coordenadas de la antena.

A partir de la definición de este sistema de referencia se puede describir la orientación de la antena según algún sistema de referencia de interés, mediante por ejemplo la matriz de rotación que transforma un vector desde el sistema de referencia de la antena en este otro sistema de referencia de interés. En nuestro caso este otro sistema de referencia será el sistema

ECEF definido previamente.

Conocer la orientación de la antena en coordenadas ECEF resulta de utilidad para determinar los ángulos con los que inciden las señales de GNSS sobre la misma. A partir del conocimiento de estos ángulos y del patrón de irradiación de la antena es posible modelar la potencia con la que la señal será recibida en un determinado escenario.

3.3. Transformación entre Marcos de Referencia

La posición de un determinado punto (por ejemplo el centro de masa de un dado vehículo, el centro de fase de una dada antena, etc.) en el espacio se representa en un dado marco de referencia α (cualquiera de los marcos de referencia descritos previamente, sin pérdida de generalidad), mediante un vector que denotaremos \mathbf{p}^α , cuyos elementos son las tres coordenadas de posición de dicho punto.

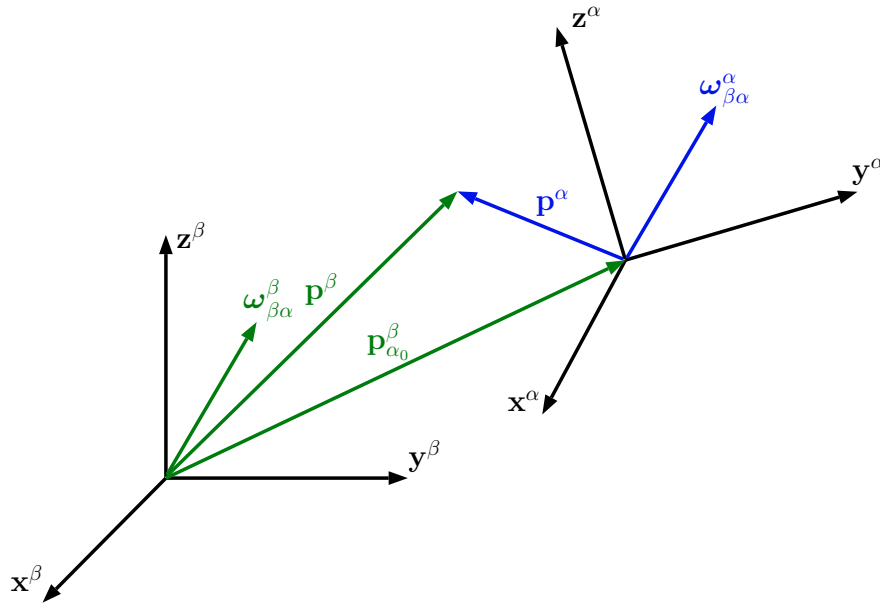


Figura 3.3: Relación entre dos marcos de referencia α y β .

La posición de este punto en otro marco de referencia β (cualquiera de los marcos de referencia previamente analizados, sin pérdida de generalidad), descrita mediante el vector \mathbf{p}^β , se obtiene mediante

$$\mathbf{p}^\beta = \mathbf{p}_{\alpha_0}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{p}_{\alpha_0}^\beta$ representa la ubicación del origen del sistema de referencia α en coordenadas del sistema de referencia β , y \mathbf{C}_α^β denota la matriz de rotación que lleva del sistema α al β . Puede verse que las columnas de la matriz \mathbf{C}_α^β son iguales a los vectores unitarios que definen a los ejes coordenados del marco de referencia α expresados en el marco de referencia β ⁹.

⁹En base a plantear $\mathbf{C}_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{C}_\alpha^\beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Así, la vinculación entre los sistemas está dada por dos transformaciones: una rotación, representada por la matriz de rotación, y una traslación, representada por la suma de un vector¹⁰.

De igual manera puede plantearse la transformación inversa, que lleva del sistema β al α

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{p}_{\beta_o}^\alpha + \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{p}^\beta \quad (3.3)$$

donde

$$\mathbf{p}_{\beta_o}^\alpha = -\mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{p}_{\alpha_o}^\beta \quad (3.4)$$

$$\mathbf{C}_\beta^\alpha = \left(\mathbf{C}_\alpha^\beta \right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_\alpha^\beta \right)' \quad (3.5)$$

La matriz de rotación también se utiliza para definir la orientación del sistema *de llegada* con respecto al sistema *de partida*. En este caso \mathbf{C}_α^β define la orientación del sistema β con respecto al sistema α ; \mathbf{C}_β^α define la orientación del sistema α con respecto al sistema β .

La velocidad del punto, medida en un dado marco de referencia equivale a la tasa de cambio del vector posición, expresado en dicho marco de referencia, en función del tiempo. Si denotamos con \mathbf{v}^α y \mathbf{v}^β a las velocidades medidas en los marcos de referencia α y β , respectivamente

$$\mathbf{v}^\alpha = \frac{d\mathbf{p}^\alpha}{dt} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v}^\beta = \frac{d\mathbf{p}^\beta}{dt} \quad (3.7)$$

En base a (3.2), se puede escribir

$$\mathbf{v}^\beta = \frac{d\mathbf{p}_{\alpha_o}^\beta}{dt} + \mathbf{C}_\alpha^\beta \frac{d\mathbf{p}^\alpha}{dt} + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} \mathbf{p}^\alpha = \mathbf{v}_{\alpha_o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} \mathbf{p}^\alpha \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{v}_{\alpha_o}^\beta$ representa la velocidad del origen del marco de referencia α medida en el marco de referencia β . Por otra parte, la derivada de la matriz de rotación, \mathbf{C}_α^β resulta (España, 2010)

$$\frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \quad (3.9)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta$ es el denominado *vector de velocidad angular* del marco de referencia α con respecto al β , y se encuentra expresado según el marco de referencia β . La matriz anti-simétrica $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$ se expresa mediante

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

¹⁰Una transformación más general podría incluir también un cambio de escala κ , resultando $\mathbf{p}^\beta = \mathbf{p}_{\alpha_o}^\beta + \kappa \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha$. Sin embargo, en los casos que utilizaremos, siempre tomaremos $\kappa = 1$, con lo cual puede omitirse.

Esta definición permite escribir el producto vectorial entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (3.11)$$

En base a (3.9), la ecuación (3.8) resulta

$$\mathbf{v}^\beta = \mathbf{v}_{\alpha_o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha \quad (3.12)$$

donde aparecen tres efectos que dan lugar a la velocidad observada en el marco de referencia β : la velocidad lineal de un marco de referencia con respecto a otro, la velocidad del punto con respecto al marco de referencia α (que debe ser rotada para que quede expresada en el marco de referencia β) y la velocidad angular del marco de referencia α con respecto al marco β , cuya magnitud depende de la posición del punto.

De la misma manera, se llega a

$$\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}_{\beta_o}^\alpha + \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{v}^\beta + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha) \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{p}^\beta. \quad (3.13)$$

Intuitivamente, puede verse que el vector de velocidad angular del marco de referencia β con respecto al α , es el opuesto del vector de velocidad angular del marco α con respecto al β , si ambos están expresados según el marco de referencia β

$$\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\beta = -\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta. \quad (3.14)$$

Por otra parte

$$\frac{d\mathbf{C}_\beta^\alpha}{dt} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha) \mathbf{C}_\beta^\alpha \quad (3.15)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha$ es el vector de velocidad angular del marco de referencia β con respecto al α , y se encuentra expresado según el marco de referencia α . Y de igual manera que en (3.14)

$$\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\alpha = -\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha. \quad (3.16)$$

Por otra parte, en base a (3.5)

$$\frac{d\mathbf{C}_\beta^\alpha}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} \right)' = \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta)' = -\mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) = \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\beta) \quad (3.17)$$

con lo cual

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha) \mathbf{C}_\beta^\alpha = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\alpha) \mathbf{C}_\beta^\alpha = \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\beta) = -\mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta). \quad (3.18)$$

Con un planteo similar, se puede escribir

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta = -\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta = \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\alpha) = -\mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha). \quad (3.19)$$

Con estas ecuaciones, se pueden reescribir las ecuaciones (3.12) y (3.13) en función del dato con el que se cuente. Una forma de reescribir (3.12) que resulta interesante, desde el punto de vista de la interpretación intuitiva es

$$\mathbf{v}^\beta = \mathbf{v}_{\alpha_o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\alpha) \mathbf{p}^\alpha = \mathbf{v}_{\alpha_o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{C}_\alpha^\beta (\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\alpha \times \mathbf{p}^\alpha) \quad (3.20)$$

donde el último término contiene la conocida vinculación de la velocidad angular con la velocidad lineal.

Por otra parte, la aceleración del punto, medida en un dado marco de referencia equivale a la tasa de cambio del vector velocidad, expresado en dicho marco de referencia, en función del tiempo. Si denotamos con \mathbf{a}^α y \mathbf{a}^β a las aceleraciones medidas en los marcos de referencia α y β , respectivamente

$$\mathbf{a}^\alpha = \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} = \frac{d^2\mathbf{p}^\alpha}{dt^2} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{a}^\beta = \frac{d\mathbf{v}^\beta}{dt} = \frac{d^2\mathbf{p}^\beta}{dt^2}. \quad (3.22)$$

A partir de la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\beta = & \frac{d\mathbf{v}_{\alpha o}^\beta}{dt} + \mathbf{C}_\alpha^\beta \frac{d\mathbf{v}^\alpha}{dt} + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \frac{d\mathbf{p}^\alpha}{dt} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \frac{d\mathbf{C}_\alpha^\beta}{dt} \mathbf{p}^\alpha + \\ & + \frac{d\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta)}{dt} \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\beta = & \mathbf{a}_{\alpha o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{a}^\alpha + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha + \\ & + \frac{d\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta)}{dt} \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha \end{aligned} \quad (3.24)$$

que puede reescribirse

$$\mathbf{a}^\beta = \mathbf{a}_{\alpha o}^\beta + \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{a}^\alpha + 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{v}^\alpha + \left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta)^2 + \frac{d\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\beta\alpha}^\beta)}{dt} \right) \mathbf{C}_\alpha^\beta \mathbf{p}^\alpha \quad (3.25)$$

donde vemos que aparecen cinco efectos que dan lugar a la aceleración observada en el marco de referencia β : la aceleración lineal de un marco de referencia con respecto a otro, la aceleración del punto con respecto al marco de referencia α (que debe ser rotada para que quede expresada en el marco de referencia β), la *aceleración de Coriolis* debida a la velocidad lineal del punto con respecto a un marco que está rotando, la *aceleración centrípeta* debida solamente al efecto de la velocidad angular, y por último un término debido a la tasa de cambio de esta velocidad angular; dependiendo la magnitud de estos dos últimos efectos de la posición del punto.

De la misma manera, se llega a

$$\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_{\beta o}^\alpha + \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{a}^\beta + 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha) \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{v}^\beta + \left(\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha)^2 + \frac{d\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{\alpha\beta}^\alpha)}{dt} \right) \mathbf{C}_\beta^\alpha \mathbf{p}^\beta. \quad (3.26)$$

En base a (3.18) y (3.19) es posible reformular las ecuaciones (3.25) y (3.26) en función del dato con el que se cuente.

3.3.1. Vinculación entre los sistemas ECI y ECEF

Si consideramos sólo el efecto de rotación de la Tierra sobre su eje, y asumimos que tanto el origen como el eje z de ambos sistemas son coincidentes, como se muestra en la figura 3.4

el vector de velocidad angular del sistema ECEF con respecto al sistema ECI, representado en el sistema ECEF, resulta

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Omega}_{ie} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde $\dot{\Omega}_{ie} = 7,2921151467 \times 10^{-5}$ rad/s es la velocidad de rotación terrestre.

Si definimos como

$$\Omega_{er}(t) = \dot{\Omega}_{ie}(t - t_0) = \Omega_0 + \dot{\Omega}_{ie}t \quad (3.28)$$

al ángulo rotado entre los dos sistemas en el instante t , la matriz de rotación que lleva del sistema ECI al ECEF resulta

$$\mathbf{C}_i^e(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_{er}(t)) & \sin(\Omega_{er}(t)) & 0 \\ -\sin(\Omega_{er}(t)) & \cos(\Omega_{er}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

cuyas columnas representan, efectivamente, los vectores unitarios que definen a los ejes coordenados del marco de referencia ECI ($\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i, \mathbf{z}^i$) expresados en el marco de referencia ECEF.

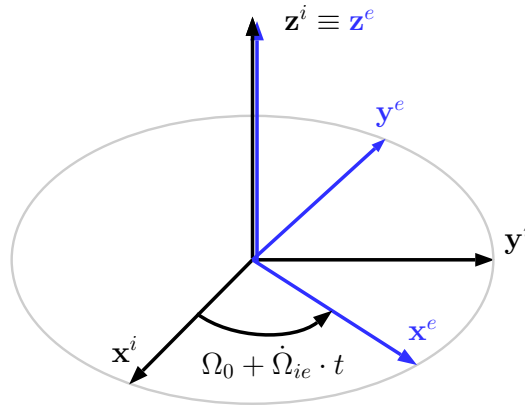


Figura 3.4: Relación entre el sistema ECI y el ECEF.

De igual manera, la matriz de rotación que lleva del sistema ECEF al ECI, resulta

$$\mathbf{C}_e^i(t) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_{er}(t)) & -\sin(\Omega_{er}(t)) & 0 \\ \sin(\Omega_{er}(t)) & \cos(\Omega_{er}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Así, las transformaciones que vinculan la posición en uno y otro sistema de coordenadas, resultan

$$\mathbf{p}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}^i(t) \quad (3.31)$$

$$\mathbf{p}^i(t) = \mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{p}^e(t). \quad (3.32)$$

Por su parte, en base a (3.27) y teniendo en cuenta que $\omega_{ei}^e = -\omega_{ie}^e$, y que además $\omega_{ie}^i = \omega_{ie}^e$ (esto último porque estos vectores tienen solamente componente en coordenada z , que coincide en ambos sistemas), las matrices $\mathbf{S}(\omega_{ei}^e)$ y $\mathbf{S}(\omega_{ie}^i)$ resultan

$$\mathbf{S}(\omega_{ei}^e) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ -\dot{\Omega}_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{S}(\omega_{ie}^i) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ \dot{\Omega}_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

A partir de la ecuación (3.12), las velocidades en ambos sistemas se vinculan mediante

$$\mathbf{v}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{v}^i(t) + \mathbf{S}(\omega_{ei}^e)\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}^i(t) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{v}^i(t) = \mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{v}^e(t) + \mathbf{S}(\omega_{ie}^i)\mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{p}^e(t). \quad (3.36)$$

A partir de la ecuación (3.25), y teniendo en cuenta que las matrices $\mathbf{S}(\omega_{ei}^e)$ y $\mathbf{S}(\omega_{ie}^i)$ no dependen del tiempo, las aceleraciones en ambos sistemas se vinculan mediante

$$\mathbf{a}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{a}^i(t) + 2\mathbf{S}(\omega_{ei}^e)\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{v}^i(t) + \mathbf{S}(\omega_{ei}^e)^2\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}^i(t) \quad (3.37)$$

$$\mathbf{a}^i(t) = \mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{a}^e(t) + 2\mathbf{S}(\omega_{ie}^i)\mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{v}^e(t) + \mathbf{S}(\omega_{ie}^i)^2\mathbf{C}_e^i(t)\mathbf{p}^e(t) \quad (3.38)$$

3.3.2. Vinculación del sistema del cuerpo con los demás

La posición y la velocidad del origen del sistema del cuerpo, expresada en coordenadas ECEF, son por un lado las magnitudes que nos interesará conocer o estimar en la formulación del problema de navegación; son parte de lo que llamaremos la solución de navegación.

Por otro lado, esta posición y velocidad, y posiblemente también la aceleración, en conjunto con la matriz de rotación que relaciona los marcos de referencia y el vector de velocidad angular son las magnitudes que en general utilizaremos para modelar el comportamiento del vehículo, a los efectos de generar mediciones sintéticas con el objeto de verificar los algoritmos de navegación implementados. Estas magnitudes provendrán de modelar el comportamiento del vehículo.

Las cantidades de interés son

$$\mathbf{p}_{b_o}^e(t); \quad \mathbf{v}_{b_o}^e(t); \quad \mathbf{a}_{b_o}^e(t); \quad \mathbf{C}_b^e(t); \quad \omega_{eb}^b(t). \quad (3.39)$$

Dado que en general el modelo del comportamiento dinámico del vehículo se realizará en el marco de referencia inercial, las cantidades conocidas serán

$$\mathbf{p}_{b_o}^i(t); \quad \mathbf{v}_{b_o}^i(t); \quad \mathbf{a}_{b_o}^i(t); \quad \mathbf{C}_b^i(t); \quad \omega_{ib}^b(t). \quad (3.40)$$

En base a las ecuaciones (3.31), (3.35) y (3.37)

$$\mathbf{p}_{b_o}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}_{b_o}^i(t) \quad (3.41)$$

$$\mathbf{v}_{b_o}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{v}_{b_o}^i(t) + \mathbf{S}(\omega_{ei}^e)\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}_{b_o}^i(t) \quad (3.42)$$

$$\mathbf{a}_{b_o}^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{a}_{b_o}^i(t) + 2\mathbf{S}(\omega_{ei}^e)\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{v}_{b_o}^i(t) + \mathbf{S}(\omega_{ei}^e)^2\mathbf{C}_i^e(t)\mathbf{p}_{b_o}^i(t) \quad (3.43)$$

y además

$$\mathbf{C}_b^e(t) = \mathbf{C}_i^e(t) \mathbf{C}_b^i(t) \quad (3.44)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{eb}^b(t) = \boldsymbol{\omega}_{ei}^e + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t). \quad (3.45)$$

3.3.3. Vinculación del sistema de la antena con los demás

Asumiendo que las antenas permanecen solidarias al cuerpo, y despreciando las deformaciones que pueda sufrir dicho cuerpo, la ubicación y orientación de la antena a_j queda definida por

$$\mathbf{p}_{a_{j_o}}^b; \quad \mathbf{C}_{a_j}^b \quad (3.46)$$

ambas invariantes en el tiempo.

En general, no nos interesará referenciar un punto con respecto a la antena, sino simplemente conocer la ubicación de la antena (el origen de su marco de referencia) y la orientación de la misma; no obstante, si se planteasen las transformaciones, no aparecerían los efectos ni de velocidad ni de aceleración del origen, como así tampoco de velocidad angular de un marco con respecto al otro.

Dado que nos interesa plantear la ubicación, velocidad y orientación de la antena en el sistema ECEF, en base al conocimiento de la ubicación y orientación del vehículo en dicho sistema planteamos

$$\mathbf{p}_{a_j}^e(t) = \mathbf{p}_{b_o}^e(t) + \mathbf{C}_b^e(t) \mathbf{p}_{a_j}^b \quad (3.47)$$

$$\mathbf{v}_{a_j}^e(t) = \mathbf{v}_{b_o}^e(t) + \mathbf{C}_b^e(t) \mathbf{S} \left(\boldsymbol{\omega}_{eb}^b(t) \right) \mathbf{p}_{a_j}^b \quad (3.48)$$

$$\mathbf{C}_{a_j}^e(t) = \mathbf{C}_b^e(t) \mathbf{C}_{a_j}^b \quad (3.49)$$

donde por simplicidad se utiliza la notación $\mathbf{p}_{a_j}^e(t)$ y $\mathbf{v}_{a_j}^e(t)$ en lugar de $\mathbf{p}_{a_{j_o}}^e(t)$ y $\mathbf{v}_{a_{j_o}}^e(t)$ para referir a la posición y velocidad del origen del sistema de referencia de la antena.

Estas últimas magnitudes son las que se relacionan directamente con la solución de navegación; ya que el receptor obtiene como solución la posición y velocidad de la antena¹¹, y la potencia de señal recibida de cada satélite depende, a través del patrón de irradiación, de la orientación de la antena relativa a la dirección de arribo de la señal proveniente de dicho satélite.

3.4. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se describieron los diferentes marcos de referencia tanto espacial como temporal que se utilizan para la descripción de la solución de navegación con los sistemas GNSS. Algunos de estos marcos de referencia han sido establecidos o definidos por los operadores responsables de estos sistemas GNSS, mientras que otros son definidos por nosotros por simplicidad en la descripción de las simulaciones y de la obtención de la solución de navegación. Se formularon además las vinculaciones existentes entre las variables de posición, velocidad y aceleración en diferentes marcos de referencia.

¹¹Más estrictamente, de su *centro de fase*, que en general no coincide estrictamente con el centro geométrico.

CAPÍTULO 4

VEHÍCULOS AEROESPACIALES

En este capítulo nos abocaremos al estudio de los vehículos aeroespaciales que serán objeto de la tesis, enfocándonos particularmente en la descripción de los mismos mediante modelos en variables de estado. Esta descripción resultará necesaria para al menos dos operaciones: modelar el movimiento de dichos vehículos a los efectos de simular los estados que tendría el usuario en función del tiempo, y contar con un modelo en variables de estado para implementar los algoritmos de navegación. Es decir, por un lado nos interesará contar con un modelo apropiado para implementar las diferentes estrategias de navegación y por otro lado nos interesará sintetizar trayectorias de los vehículos con las cuales testear las estrategias de navegación implementadas. Existen dos enfoques de la física clásica que utilizaremos para este modelado: el enfoque de la *cinemática* y el enfoque de la *dinámica*.

La cinemática estudia las leyes del movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo originan. Así, por ejemplo para una descripción en base a objetos puntuales en un dado marco de referencia, la velocidad es la tasa de cambio de la posición, la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad, el *jerk*¹ es la tasa de cambio de la aceleración, etc. En este tipo de descripción, en general se parte del conocimiento de alguna de las variables intervinientes, y se obtienen las demás de interés en base a derivación/integración según corresponda, como en el ejemplo clásico del *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*.

En contraparte, la dinámica estudia las leyes del movimiento de los cuerpos en relación a las causas que lo originan, las fuerzas intervinientes. En mecánica clásica existen varias formulaciones que permiten plantear las ecuaciones de movimiento como: la mecánica newtoniana, la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana. La primera de ellas, la mecánica newtoniana, permite describir el movimiento en base a ecuaciones diferenciales ordinarias formuladas en coordenadas cartesianas; y resultará en general suficiente para los modelos de vehículos que plantearemos.

¹Si bien existen traducciones al castellano, como sobreaceleración, tirón, sacudida o pique, por simplicidad utilizaremos el término anglosajón *jerk*.

4.1. Enfoque Cinemático

Si definimos con $p_x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$ y $j_x(t)$ a la posición, velocidad, aceleración y jerk, respectivamente, de un vehículo en coordenada x al instante t , las relaciones entre las mismas resultan, por definición

$$v_x(t) = \frac{dp_x(t)}{dt} \Leftrightarrow p_x(t) = \int_{-\infty}^t v_x(\lambda) d\lambda \quad (4.1)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \Leftrightarrow v_x(t) = \int_{-\infty}^t a_x(\lambda) d\lambda \quad (4.2)$$

$$j_x(t) = \frac{da_x(t)}{dt} \Leftrightarrow a_x(t) = \int_{-\infty}^t j_x(\lambda) d\lambda \quad (4.3)$$

y ecuaciones similares pueden plantearse para las coordenadas y y z .

En general, interesa conocer estas variables en instantes discretos con separación uniforme $t_k = k T + t_0$ donde $k \in \mathbb{Z}$ y T es el período de muestreo utilizado. En este caso resulta más práctico simplificar la notación mediante lo siguiente

$$x_k = p_x(t_k) \quad y_k = p_y(t_k) \quad z_k = p_z(t_k) \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_k = v_x(t_k) \quad \dot{y}_k = v_y(t_k) \quad \dot{z}_k = v_z(t_k) \quad (4.5)$$

$$\ddot{x}_k = a_x(t_k) \quad \ddot{y}_k = a_y(t_k) \quad \ddot{z}_k = a_z(t_k) \quad (4.6)$$

$$\ddot{\ddot{x}}_k = j_x(t_k) \quad \ddot{\ddot{y}}_k = j_y(t_k) \quad \ddot{\ddot{z}}_k = j_z(t_k) \quad (4.7)$$

En base al desarrollo en serie de Taylor de la posición en coordenada x en el instante $k + 1$, y utilizando las definiciones (4.1), (4.2) y (4.3), se puede plantear

$$x_{k+1} = p_x(t_k + T) = x_k + T \dot{x}_k + \frac{T^2}{2} \ddot{x}_k + \mathcal{O}_3(T) \quad (4.8)$$

$$\therefore x_{k+1} \approx x_k + T \dot{x}_k + \frac{T^2}{2} \ddot{x}_k \quad (4.9)$$

donde $\mathcal{O}_3(T)$ representa el efecto de los términos de orden 3 en T o superiores, y la aproximación consiste en despreciar dichos términos.

De igual manera, en base al desarrollo en serie de Taylor de la velocidad en coordenada x en el instante $k + 1$, se puede plantear

$$\dot{x}_{k+1} = v_x(t_k + T) = \dot{x}_k + T \ddot{x}_k + \mathcal{O}_2(T) \quad (4.10)$$

$$\therefore \dot{x}_{k+1} \approx \dot{x}_k + T \ddot{x}_k \quad (4.11)$$

donde $\mathcal{O}_2(T)$ representa el efecto de los términos de orden 2 en T o superiores, y la aproximación consiste en despreciar dichos términos.

Pueden plantearse ecuaciones similares a (4.9) y (4.11) en coordenadas y y z . Estas

ecuaciones pueden resumirse en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \dot{y}_{k+1} \\ \dot{z}_{k+1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_k \\ \ddot{y}_k \\ \ddot{z}_k \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

que puede escribirse de manera abreviada²

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{a}_k \quad (4.13)$$

donde se ha definido

$$\mathbf{x}_k \triangleq \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (4.14)$$

$$\mathbf{a}_k \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}'. \quad (4.15)$$

Definiendo además,

$$\mathbf{F}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{G}_k \triangleq \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

y obviando la aproximación, se puede escribir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{a}_k. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) es la representación en variables de estado de un sistema lineal discreto³; donde las variables de estado corresponden a las tres coordenadas de posición y las tres coordenadas de velocidad. Se considera que el vector de aceleración es una excitación o entrada del sistema.

Con un planteo similar, si se agrega un término en los desarrollos en serie de Taylor, se consideran las tres coordenadas de aceleración también como estados, y el *jerk* como

²Utilizaremos $\mathbf{I}_{M \times M}$ para denotar la matriz identidad de $M \times M$ y $\mathbf{0}_{M \times N}$ para denotar la matriz de $M \times N$ que contiene ceros en todos sus elementos.

³En particular, como en este caso \mathbf{F}_k y \mathbf{G}_k no dependen del instante k , corresponde a un sistema lineal invariante en el tiempo.

excitación o entrada del sistema, se puede formular el modelo siguiente

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (4.19)$$

$$\mathbf{j}_k = \begin{bmatrix} \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{j}_k. \quad (4.23)$$

Al igual que la ecuación (4.18), la ecuación (4.23) es la representación en variables de estado de un sistema lineal discreto invariante en el tiempo. En este caso las variables de estado corresponden a las tres coordenadas de posición, las tres coordenadas de velocidad y las tres coordenadas de aceleración; y se considera que el vector de jerk es una excitación o entrada del sistema.

En la formulación de los modelos anteriores no se consideró ninguna hipótesis respecto al marco de referencia, resultando válido en cualquier marco de referencia utilizado, siempre y cuando todas las variables se encuentren referidas a dicho marco de referencia.

Por otra parte, el modelo no realiza ninguna suposición acerca de las causas que originan la aceleración, correspondiendo al enfoque cinemático, y resulta por tanto totalmente general y válido para cualquier vehículo; y puede ser utilizado en caso que no se disponga de otro modelo que describa más fielmente el comportamiento. Por último, al ser un modelo muy sencillo e invariante en el tiempo, no involucra una gran carga computacional y resulta una opción a considerar al momento de formular los algoritmos de navegación.

4.2. Enfoque Dinámico

Para este enfoque se parte de considerar un marco de referencia inercial, en el cual son aplicables las tres leyes de Newton; las cuales establecen resumidamente que:

1. Una partícula en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme permanece en dicho estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que actúe sobre él una fuerza.
2. El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} es proporcional a la fuerza \mathbf{F} impresa sobre ella y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual dicha fuerza se imprime. En notación matemática moderna, significa que (Tewari, 2007)

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.24)$$

3. A cada fuerza aplicada sobre una partícula (acción) corresponde una fuerza de igual magnitud y en sentido opuesto (reacción) de la partícula.

4.3. Movimiento Orbital

Tal como se describe en el apéndice A una forma de describir el movimiento de un satélite, en caso de considerar que la única fuerza interviniente es la atracción gravitatoria de la Tierra, considerada en primer término como masa puntual (o con distribución de masa con simetría esférica), es en base a la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos, (A.8), expresada en coordenadas ECI

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.25)$$

donde \mathbf{r} y $\ddot{\mathbf{r}}$ son los vectores posición y aceleración del satélite, respectivamente, en el marco ECI; $r = \|\mathbf{r}\|$; y μ es la constante de gravitación terrestre.

Esta ecuación diferencial no-lineal de segundo orden, puede verse como 3 ecuaciones escalares de segundo orden

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3} x \quad \ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3} y \quad \ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3} z \quad (4.26)$$

para la resolución de las cuales se requieren 6 constantes de integración, o condiciones iniciales.

Si se toman como variables de estado las tres coordenadas de posición y las tres coordenadas de velocidad del satélite, la ecuación (4.25) puede escribirse como un modelo no-lineal continuo en variables de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}' \quad (4.28)$$

Una forma de obtener el valor del estado para un dado instante t consiste en resolver la ecuación de órbita, tal como se describe en el Apéndice A. Una forma alternativa de obtener el valor del estado en instantes discretos $t_k = k T$, $k \in \mathbb{Z}$, consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, (4.27), mediante la utilización de algún método numérico, como por ejemplo alguna de las variantes de Runge-Kutta.

Por ejemplo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden se implementa con el siguiente algoritmo (Burden y Faires, 2002)

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \frac{h}{6} (\boldsymbol{\alpha}_{1,k} + \boldsymbol{\alpha}_{2,k} + \boldsymbol{\alpha}_{3,k} + \boldsymbol{\alpha}_{4,k}) \quad (4.29)$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha}_{1,k} = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}(t_k)) \quad (4.30)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{2,k} = \mathbf{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t_k) + \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{1,k}\right) \quad (4.31)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{3,k} = \mathbf{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}(t_k) + \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{2,k}\right) \quad (4.32)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{4,k} = \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{x}(t_k) + h \boldsymbol{\alpha}_{3,k}) \quad (4.33)$$

y h es el paso del método numérico⁴.

En la figura, 4.1 se presenta el error entre la solución obtenida con este método numérico, considerando un paso $h = 1$ segundo, y la solución que se obtiene utilizando la ecuación de órbita, para un intervalo igual a 15 períodos orbitales. En este caso se ha considerado un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m. Se observa que la discrepancia entre ambas es prácticamente despreciable.

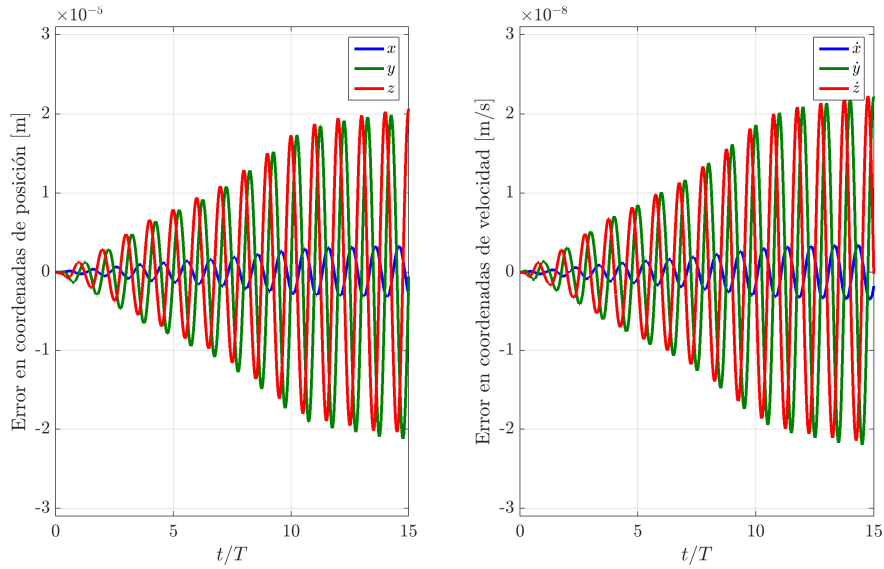


Figura 4.1: Error entre la solución obtenida con el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, tomando un paso $h = 1$ s, y la solución obtenida con la ecuación de órbita. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).

4.4. Perturbaciones a la Órbita

En la ecuación anterior, (4.25), se asume que la única fuerza interviniente es la atracción gravitatoria terrestre, considerando un modelo de Tierra con distribución de masa con simetría esférica. Para obtener un modelo más realista se deben considerar otros efectos, que denominaremos “perturbaciones a la órbita” ya que harán que el movimiento orbital se aparte de la trayectoria elíptica contenida en un plano analizada en el Apéndice A. Para considerar estos efectos, se modifica la ecuación (4.25) incorporando un término de aceleración provocada por otras fuerzas, \mathbf{a}_p

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_p \quad (4.34)$$

Si bien existen varios factores, consideraremos cuatro efectos que contribuyen a \mathbf{a}_p : el efecto de distribución no uniforme de masa de la Tierra, \mathbf{a}_{ne} , el efecto de la atracción

⁴Se optó por utilizar h para el paso de iteración del método numérico a los efectos de respetar la nomenclatura de la bibliografía. Se debe considerar que en algunos casos el paso h puede coincidir con T (instantes en los que nos interesa conocer los estados del satélite) o bien puede ser un submúltiplo.

gravitatoria de otros cuerpos celestes \mathbf{a}_{3b} el efecto del arrastre atmosférico, \mathbf{a}_d , y el empuje o *thrust* de los motores utilizados para realizar maniobras orbitales, \mathbf{a}_t

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{ne} + \mathbf{a}_{3b} + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_t. \quad (4.35)$$

4.4.1. Potencial Gravitatorio Terrestre

Para analizar el efecto de la distribución no uniforme de masa de la Tierra, conviene plantear la magnitud escalar conocida como potencial gravitatorio, Φ . La aceleración gravitatoria (el efecto de aceleración producto de la fuerza de atracción gravitatoria) se obtiene luego como el gradiente de dicho potencial gravitatorio

$$\mathbf{g} = \nabla\Phi = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]'. \quad (4.36)$$

Si bien existen diferentes modelos para describir el potencial gravitatorio en función de la posición (Vallado, 1997; Montenbruck y Gill, 2012), uno de los más sencillos se obtiene de asumir una simetría axial de la Tierra, con respecto al eje z del marco de referencia ECI (Tewari, 2007)

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \phi) \right] \quad (4.37)$$

donde R_e es el radio medio ecuatorial terrestre, J_n son constantes del modelo conocidas como *constantes de Jeffery*, P_n son los polinomios de Legendre de grado n , r es la distancia del satélite al centro de la tierra ó magnitud del vector posición del satélite y ϕ es el ángulo medido entre dicho vector de posición del satélite y el eje z , por tanto

$$\cos \phi = \frac{z}{r}. \quad (4.38)$$

Puede verse que al asumir simetría axial con respecto al eje z , el potencial gravitatorio sólo depende de la distancia y del ángulo con respecto a dicho eje. Si se define

$$\Phi_0 = \frac{\mu}{r} \quad (4.39)$$

$$\Phi_{J_n} = -\frac{\mu R_e^n J_n}{r^{n+1}} P_n \left(\frac{z}{r} \right) \quad (4.40)$$

puede verse que

$$\nabla\Phi_0 = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.41)$$

correspondiendo a la aceleración gravitatoria propia de un cuerpo con simetría esférica o masa puntual. Por otra parte

$$\frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial x} = \frac{\mu R_e^n J_n}{r^{n+3}} \left[(n+1) P_n \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{z}{r} D P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right] x \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial y} = \frac{\mu R_e^n J_n}{r^{n+3}} \left[(n+1) P_n \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{z}{r} D P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right] y \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial z} = \frac{\mu R_e^n J_n}{r^{n+3}} \left[(n+1) P_n \left(\frac{z}{r} \right) z + \frac{z^2 - r^2}{r} D P_n \left(\frac{z}{r} \right) \right] \quad (4.44)$$

$$\nabla\Phi_{J_n} = \left[\frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial x} \quad \frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial y} \quad \frac{\partial\Phi_{J_n}}{\partial z} \right]' \quad (4.45)$$

donde DP_n denota la primera derivada del polinomio de Legendre de grado n ⁵.

Con lo cual

$$\mathbf{g} = \nabla\Phi_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \nabla\Phi_{J_n}. \quad (4.46)$$

Si se trunca la sumatoria en los primeros N valores, el efecto de aceleración producto de la distribución no uniforme de masa de la Tierra puede modelarse como

$$\mathbf{a}_{ne} = \sum_{n=2}^{N+1} \nabla\Phi_{J_n}. \quad (4.47)$$

En la figura, 4.2 se presenta la magnitud de la aceleración debida a cada una de las componentes del modelo de potencial gravitatorio que afectaría a un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m, para un intervalo igual a un período orbital. Puede observarse que el efecto del término correspondiente a J_2 es por lo menos dos órdenes de magnitud superior al de los demás.

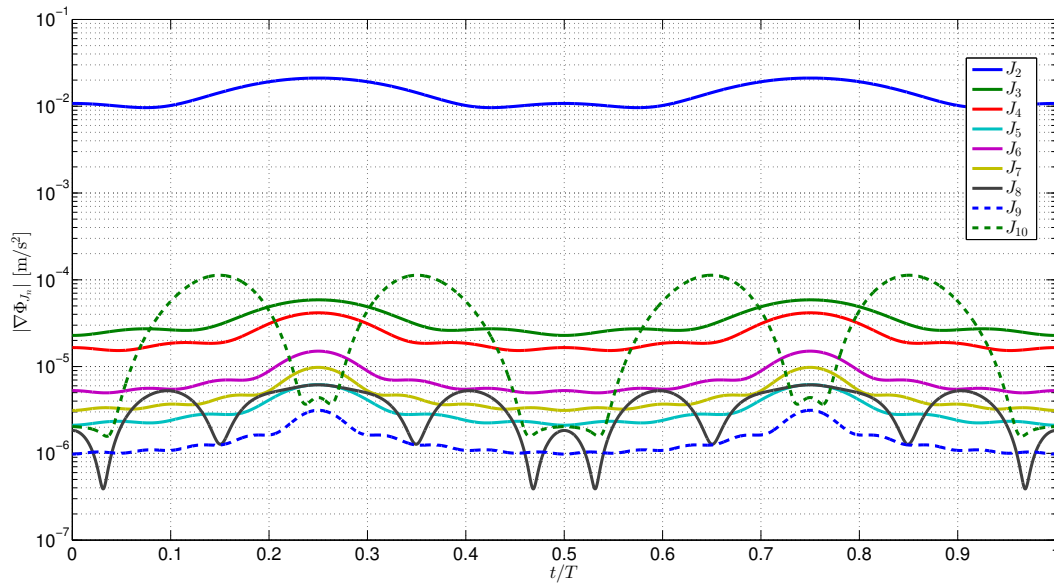


Figura 4.2: Aceleración debida a las componentes del modelo de potencial gravitatorio.

4.4.2. Atracción Gravitatoria de Otros Cuerpos Celestes

La aceleración debida a la atracción gravitatoria de un dado cuerpo celeste modelado como masa puntual está dada por (Montenbruck y Gill, 2012)

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3b} = GM \frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^3} \quad (4.48)$$

⁵En nuestra notación $DP_n(\cdot)$ corresponde a calcular la derivada del polinomio con respecto a una variable genérica y luego evaluar esta función en el argumento correspondiente. Es decir, no se debe aplicar regla de la cadena en la derivación, ya que la misma ya ha sido aplicada en las ecuaciones presentadas.

donde M y \mathbf{s} son respectivamente la masa y la posición de dicho cuerpo, expresada esta última en el mismo marco de referencia que \mathbf{r} . Dado que este cuerpo también ejerce atracción gravitatoria sobre la Tierra, se debe restar este efecto a (4.48) para obtener la perturbación a la órbita

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3b} = GM \left(\frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^3} \right). \quad (4.49)$$

Las mayores perturbaciones están dadas por la Luna y el Sol. Utilizando las expresiones aproximadas para el cálculo de las posiciones de la estos cuerpos, dadas en Vallado (1997), y considerando un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m, se obtiene la aceleración mostrada en la figura 4.3, para el día 14 de Marzo de 2015. Analizando este efecto para otros días se observa un comportamiento similar (de los mismos órdenes de magnitud).

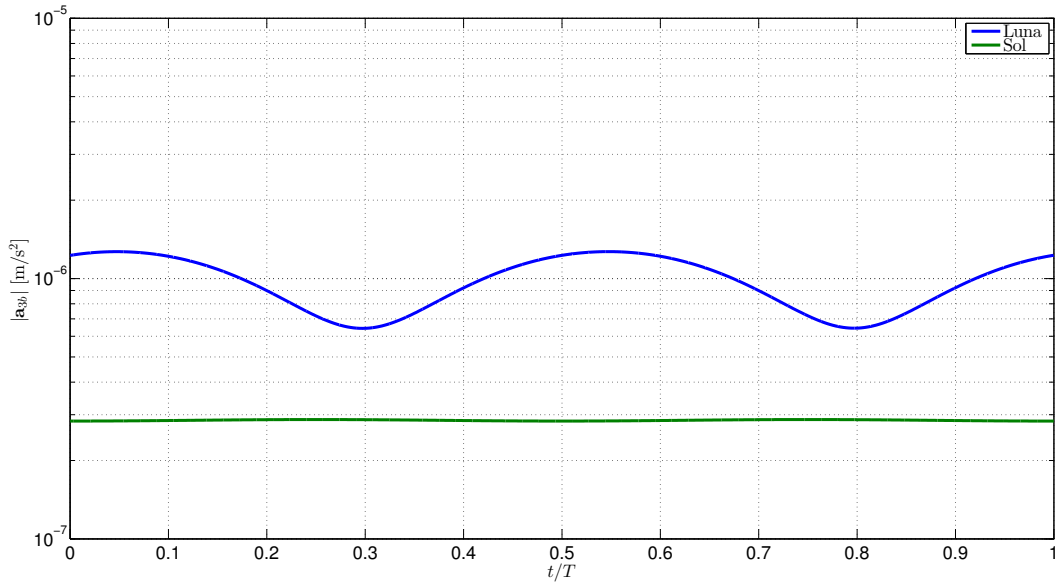


Figura 4.3: Aceleración debida a la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

4.4.3. Arrastre Atmosférico (*Drag*)

Las fuerzas atmosféricas representan la mayor perturbación no gravitatoria que afecta a los satélites de órbita baja. El mayor de estos efectos es el conocido como efecto de arrastre atmosférico o *drag*, que actúa en la dirección opuesta a la velocidad del satélite (relativa a la atmósfera). La aceleración producto de este efecto, puede escribirse como (Montenbruck y Gill, 2012)

$$\mathbf{a}_d = -\frac{1}{2}C_D \frac{A}{m} \rho v_r \mathbf{v}_r \quad (4.50)$$

donde C_D , denominado coeficiente de drag, es una constante adimensional que describe la interacción de la atmósfera con el material de la superficie del satélite, \mathbf{v}_r es la velocidad del satélite relativa a la atmósfera, $v_r = \|\mathbf{v}_r\|$, A es el área de la sección transversal a \mathbf{v}_r del satélite, m es la masa del satélite y ρ es la densidad atmosférica en la ubicación del satélite. Con la suposición razonable de que la atmósfera rota junto con la Tierra, la velocidad relativa

en un marco de referencia ECI puede escribirse como (Montenbruck y Gill, 2012)

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ie}^i)\mathbf{r} \quad (4.51)$$

donde se utiliza la ecuación (3.36)

Si bien la densidad de la atmósfera alta depende de una forma compleja de una variedad de diferentes parámetros; la dependencia más evidente es su decrecimiento al aumentar la altura. Una forma simple de modelar esta dependencia es mediante la expresión (Vallado, 1997)

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H_0}} \quad (4.52)$$

donde ρ_0 es la densidad atmosférica en alguna altura de referencia h_0 , y H es la escala de variación de la densidad con la altura. Una forma de utilizar esta expresión es mediante una serie de valores tabulados de ρ_0 , h_0 y H válidos para diferentes rangos de altura. En la figura 4.4 se muestra una gráfica del valor de densidad en función de la altura utilizando la tabla de (Vallado, 1997, p. 510).

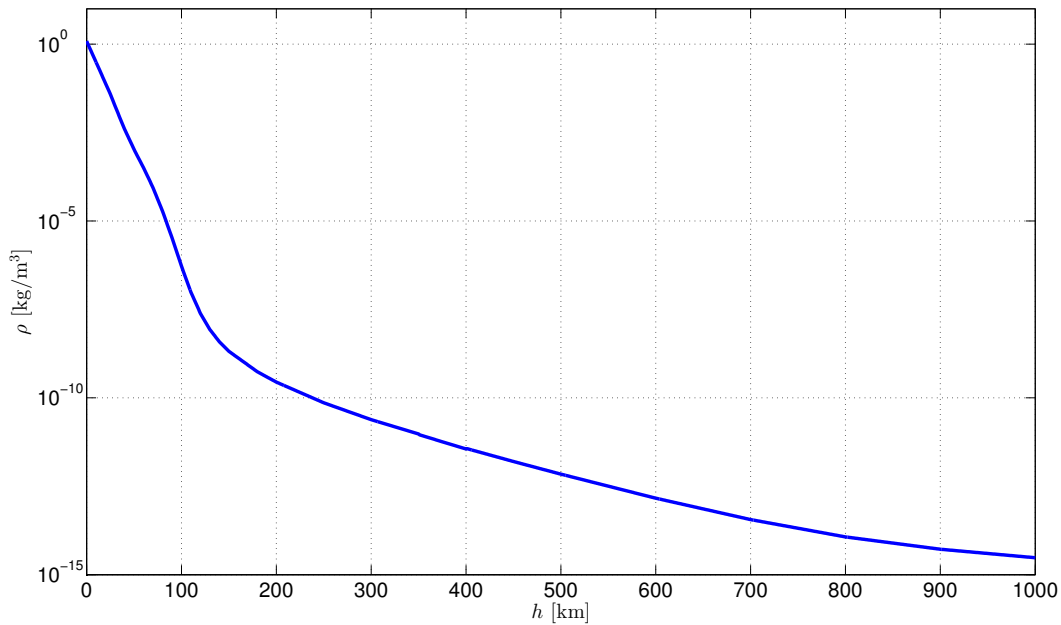


Figura 4.4: Modelo de la densidad atmosférica en función de la altura.

4.4.4. Fuerzas de Empuje o *Thrust*

Las fuerzas de empuje o *thrust* son debidas a los actuadores utilizados para realizar maniobras sobre el satélite, para, por ejemplo corregir su trayectoria orbital. En nuestro caso, las modelaremos como un conjunto de aceleraciones de magnitud y dirección constantes que cada una se aplican durante un determinado intervalo de tiempo,

$$\mathbf{a}_{t_i}^b = \begin{cases} A_i \mathbf{u}_i & t_{0_i} \leq t \leq t_{f_i} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{a}_t^b = \sum_i \mathbf{a}_{t_i}^b \quad (4.54)$$

donde A_i y \mathbf{u}_i indican, respectivamente, la magnitud y la dirección de cada uno de los elementos que componen el empuje total. Cabe aclarar que estas magnitudes se encuentran expresadas en el marco de referencia del cuerpo, y deben ser transformadas al marco de referencia en el que se resuelvan las ecuaciones de movimiento (ver capítulo 3).

4.5. Movimiento Orbital Perturbado

Una vez que se tienen las caracterizaciones de las aceleraciones que perturban la órbita, en base a las ecuaciones (4.34) y (4.35) se puede escribir

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_{ne} + \mathbf{a}_{3b} + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_t \quad (4.55)$$

la cual puede resolverse mediante el método numérico de Runge-Kutta, de la misma manera que como se presenta en la sección 4.3.

En la figura, 4.5 se muestra el error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones, para un intervalo igual a 15 períodos orbitales, y asumiendo que ambas comienzan en los mismos valores iniciales. En ambos casos se utiliza el mismo método numérico, Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. En este caso se ha considerado un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m, y no se han incluido los efectos de las fuerzas de *thrust*. Se observa que la discrepancia entre ambas crece notablemente con el tiempo, evidenciando lo que ocurriría si se utilizara el modelo sencillo (que considera sólo los efectos de la atracción gravitatoria de la Tierra con distribución de masa uniforme) para propagar los estados del satélite.

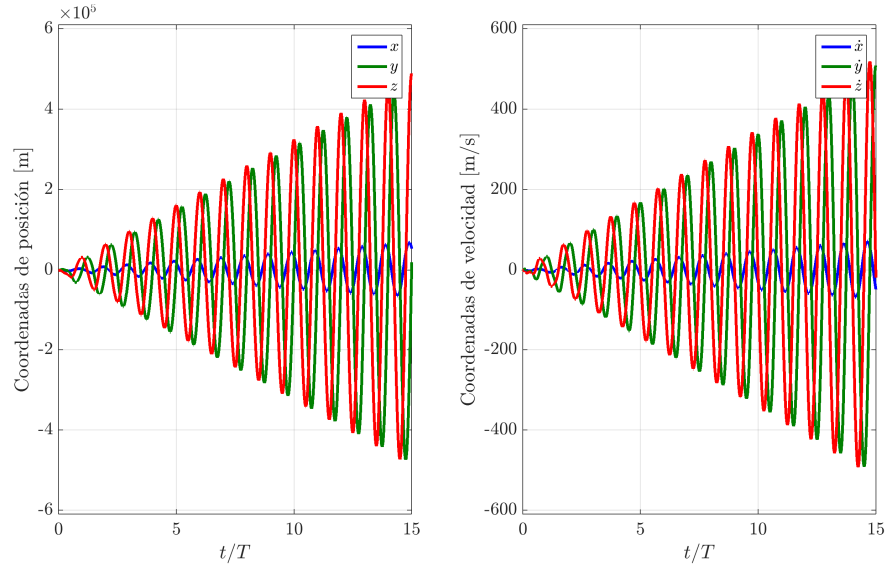


Figura 4.5: Error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones; utilizando en ambos casos el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).

4.6. Formulación en Coordenadas ECEF

En general, resulta útil formular la ecuación de órbita en coordenadas ECEF, para lo cual, en base a la ecuaciones (3.37), (3.36) y (3.31), se puede escribir

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ei}^e) \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ei}^e)^2 \mathbf{r} \quad (4.56)$$

donde los tres vectores $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{r}}$ y \mathbf{r} están expresados en coordenadas ECEF.

En la figura, 4.6 se presenta el error entre la solución obtenida con el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, considerando un paso $h = 1$ segundo, y la solución que se obtiene utilizando la ecuación de órbita (y la transformación a coordenadas ECEF correspondiente), para un intervalo igual a 15 períodos orbitales. Al igual que en el caso de coordenadas ECI, se ha considerado un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m. Se observa que la discrepancia entre ambas es despreciable.

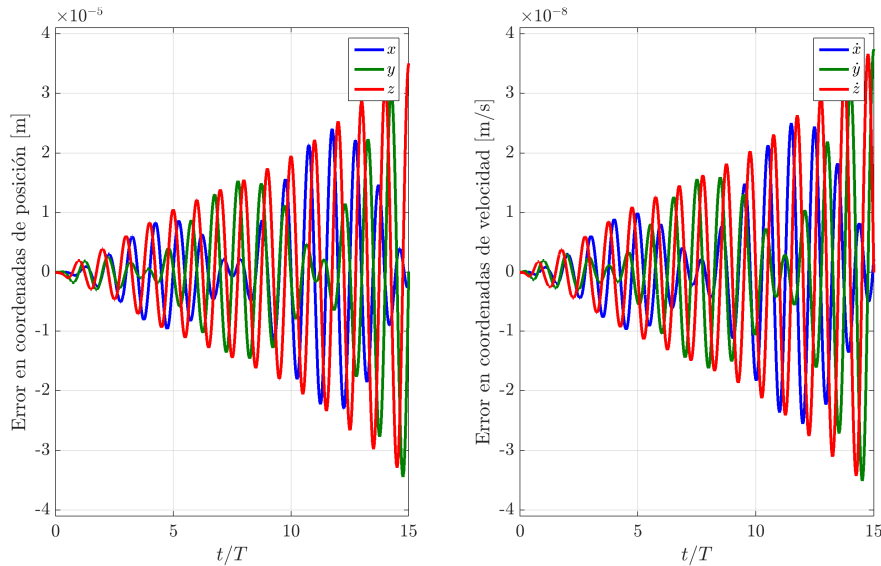


Figura 4.6: Error entre la solución obtenida en coordenadas ECEF con el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, tomando un paso $h = 1$ s, y la solución obtenida con la ecuación de órbita (y la transformación correspondiente a coordenadas ECEF). Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).

De igual manera, pueden plantearse las ecuaciones de órbita perturbada en coordenadas ECEF, teniendo en cuenta realizar las transformaciones de sistemas de coordenadas necesarios, tanto al momento de calcular las perturbaciones, como al momento de utilizar los resultados.

En la figura, 4.7 se presenta el error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones, ambos en coordenadas ECEF, para un intervalo igual a 15 períodos orbitales, y asumiendo que ambas comienzan en los mismos valores iniciales. En ambos casos se utiliza el mismo método numérico, Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. En este caso se ha considerado un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m. Se observa que la discrepancia

entre ambas crece notablemente con el tiempo. El efecto de “modulación” observado en las coordenadas x e y se debe a la rotación entre los marcos ECI y ECEF, producto de la rotación terrestre.

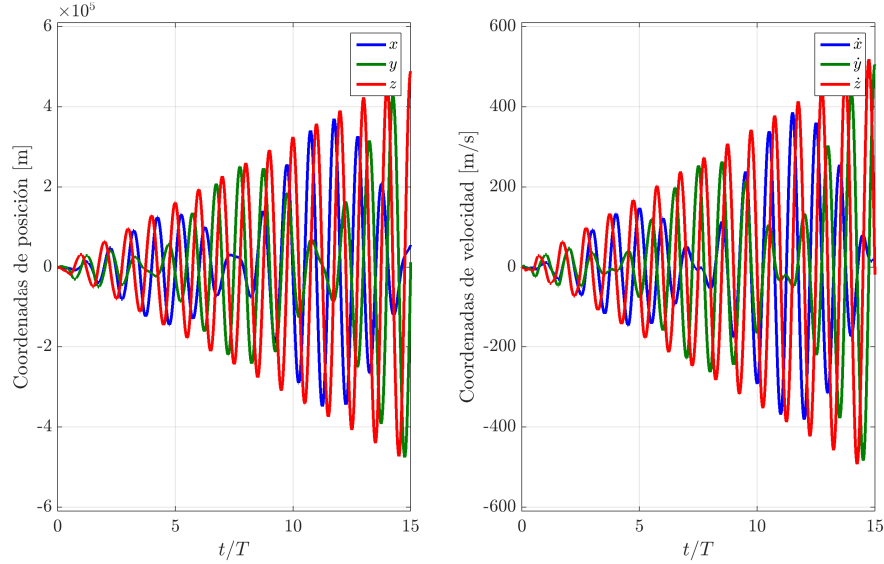


Figura 4.7: Error entre la solución obtenida con el modelo de órbita con perturbaciones y la solución obtenida con el modelo de órbita sin perturbaciones, ambos formulados en coordenadas ECEF; utilizando en ambos casos el método numérico Runge-Kutta de 4.º orden, con un paso $h = 1$ s. Coordenadas de posición (izq.) y velocidad (der.).

4.7. Linealización del Modelo Dinámico

Una variante a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales, y que será de utilidad cuando analicemos los métodos de filtrado, consiste en la linealización y discretización del modelo no-lineal. Desarrollando $x(t_{k+1})$ y $\dot{x}(t_{k+1})$ en serie de Taylor, y truncando hasta el término que contiene derivada segunda

$$x(t_{k+1}) \simeq x(t_k) + h \dot{x}(t_k) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}(t_k) \quad (4.57)$$

$$\dot{x}(t_{k+1}) \simeq \dot{x}(t_k) + h \ddot{x}(t_k) \quad (4.58)$$

y reemplazando $\ddot{x}(t_k)$ en base a la expresión dada por la ecuación (4.34) se llega a

$$x(t_{k+1}) \simeq x(t_k) + h \dot{x}(t_k) - \frac{h^2}{2} \frac{\mu}{(r(t_k))^3} x(t_k) + \frac{h^2}{2} a_{p_x}(t_k) \quad (4.59)$$

$$\dot{x}(t_{k+1}) \simeq \dot{x}(t_k) - h \frac{\mu}{(r(t_k))^3} x(t_k) + h a_{p_x}(t_k) \quad (4.60)$$

y expresiones equivalentes pueden escribirse para las variables de estado y , \dot{y} , z , y \dot{z} .

Por tanto, las ecuaciones en variables de estado del sistema linealizado y discretizado resultan

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{a}_{p,k} \quad (4.61)$$

donde se denota $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$, y además

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (4.62)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{h^2}{2} \frac{\mu}{r_k^3}\right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & h \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -h \frac{\mu}{r_k^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ h \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

En la figura 4.8 se presenta el error entre la solución obtenida con el modelo linealizado, y la solución que se obtiene con el modelo no lineal, para tres valores diferentes de paso h : $h = 1$, $h = 10$ y $h = 60$. Se ha considerado un satélite LEO con $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m, y se ha tomado un intervalo de simulación igual a un período orbital. En línea punteada se muestra la comparación del modelo linealizado contra el modelo no-lineal sin perturbaciones, mientras que en línea llena se muestra la comparación contra el modelo no-lineal con perturbaciones. Se observa que para un paso de 1 segundo, la linealización da lugar a errores del orden de 10^{-2} , tanto en posición como en velocidad ([m] y [m/s], respectivamente).

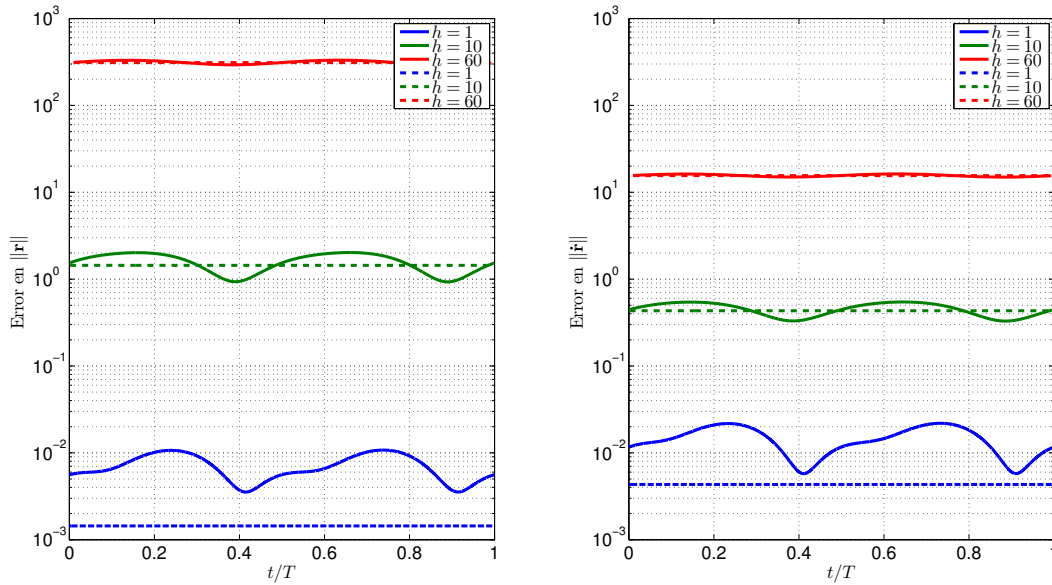


Figura 4.8: Error entre la solución obtenida con el modelo linealizado y la solución obtenida con el modelo no lineal, para distintos valores de paso h . Modelo con (línea llena) y sin (línea punteada) perturbaciones.

La comparación con el modelo con perturbaciones, también permite inferir que si se incorporasen los efectos de las perturbaciones en el modelo linealizado, complejizándolo, no se obtendría una mejora significativa en lo que respecta al error de linealización.

De la misma manera, considerando los efectos descritos en la ecuación (4.56) se puede

plantear la linealización del modelo en coordenadas ECEF, obteniéndose

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{h^2}{2} \frac{\mu}{r_k^3}\right) \mathbf{I}_{3 \times 3} & h \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -h \frac{\mu}{r_k^3} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \dot{\Omega}_{ie}^2 & 0 & 0 & 0 & h^2 \dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{2} \dot{\Omega}_{ie}^2 & 0 & -h^2 \dot{\Omega}_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h \dot{\Omega}_{ie}^2 & 0 & 0 & 0 & 2h \dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ 0 & h \dot{\Omega}_{ie}^2 & 0 & -2h \dot{\Omega}_{ie} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

La comparación de la solución obtenida con el modelo linealizado con respecto a la que se obtiene con el modelo no lineal, ambas en coordenadas ECEF, para tres valores diferentes de h : $h = 1$, $h = 10$ y $h = 60$, resulta prácticamente idéntica a la observada en la figura 4.8.

4.8. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se presentó la descripción en términos de modelos en variables de estado para caracterizar el comportamiento de los vehículos aeroespaciales; para lo cual se recurrió a dos enfoques de la física clásica: el enfoque *cinemático* y el enfoque *dinámico*. El primero considera la relación existente entre los estados sin analizar las causas (fuerzas) que originan el movimiento, lo que permite obtener modelos sencillos, útiles para una gran variedad de vehículos. El segundo enfoque parte de modelar las causas que originan el movimiento, las fuerzas intervinientes. Con este enfoque analizamos la descripción de un vehículo particular, un satélite LEO, incorporando los principales efectos que intervienen, lo que permitió obtener modelos que serán útiles tanto para realizar simulaciones del movimiento del vehículo como para implementar las estrategias de filtrado que permitan obtener la solución de navegación.

CAPÍTULO 5

NAVEGACIÓN

La navegación, en términos generales, puede definirse como *el proceso que permite conducir a una persona o vehículo a través de su movimiento entre dos puntos cualesquiera, siguiendo una trayectoria establecida*. Esta definición abarca los conceptos de *determinación de la trayectoria* y de *guiado*. El primero se relaciona con la obtención del vector de estados del vehículo, típicamente posición, velocidad y orientación, en cualquier instante dado; mientras que el segundo se refiere a las fuerzas que actúan sobre el vehículo a los efectos de alcanzar una meta establecida, siguiendo una trayectoria determinada (Hofmann-Wellenhof *et al.*, 2003).

Sin embargo, en el marco de nuestro trabajo, con el término navegación nos referiremos a la estimación de la posición y velocidad (y posiblemente, orientación) de un vehículo en movimiento, en el instante presente¹ en base a mediciones tomadas por instrumentos colocados a bordo del propio vehículo (Bar-Shalom *et al.*, 2004). Es decir, nos abocamos a lo que desde una perspectiva más amplia podría llamarse *estimación de estados para la navegación*, y lo denominamos simplemente *navegación*.

Es importante resaltar el hecho de que las mediciones son tomadas a bordo del propio vehículo, lo que en general marca la diferencia con las técnicas de *tracking*, en las cuales la estimación se basa en mediciones remotas (Bar-Shalom *et al.*, 2004).

En nuestro caso particular, estas mediciones se refieren a las mediciones de un receptor GNSS, en particular pseudo-rango y delta-rango, vinculadas con la distancia satélite-receptor y con la tasa de cambio de dicha distancia, respectivamente. Como se analiza en el capítulo 6, existen diversos factores que introducen errores en estas mediciones, tanto de naturaleza sistemática como aleatoria. Para los primeros en general se recurre a la utilización de modelos que permiten descontar o mitigar sus efectos. Para los errores de naturaleza aleatoria, se recurre a técnicas de filtrado estadístico, que en general emplean información sobre la evolución temporal de los estados del vehículo, obtenida en base a un modelo de su dinámica esperada, como los descritos en el capítulo 4. Dado que estos modelos son de naturaleza no lineal, y que las mediciones obtenidas con las señales GNSS se relacionan de manera no lineal

¹O con un mínimo retardo, tolerable según la aplicación, lo que usualmente se conoce como *tiempo real*.

con los estados, el problema de estimación resulta también no lineal.

El más conocido de los métodos de filtrado estadístico para la estimación de estados de un sistema lineal (tanto continuo como discreto), en base a mediciones relacionadas linealmente con el estado, es el denominado *Filtro de Kalman* (KF). Existen variantes de este método aplicables al caso no lineal, de las cuales analizaremos dos: el *Filtro de Kalman Extendido* (EKF) y el *Filtro de Kalman de Posición* (PKF); siendo este último una alternativa *ad-hoc* para el caso de navegación con señales GNSS. Además, existen otra multiplicidad de esquemas de filtrado aplicables al caso no-lineal como el *Filtro de Kalman Unscented*, UKF, el *Filtro de Kalman Sigma-Point*, SPKF, y el *Filtro de Partículas*; que en general requieren una carga computacional superior, y en los que no ahondaremos.

5.1. Filtro de Kalman (KF)

El Filtro de Kalman es un estimador para lo que se conoce como *problema lineal cuadrático* que consiste en estimar el estado de un sistema dinámico lineal perturbado por ruido blanco, utilizando mediciones relacionadas linealmente con dicho estado, afectadas linealmente por ruido blanco. El estimador resultante es estadísticamente óptimo con respecto a cualquier función cuadrática del error de estimación (Grewal y Andrews, 2001).

Si bien existen variantes del KF tanto para sistemas continuos como para sistemas discretos, nos enfocaremos en analizar este último caso, cuya descripción matemática en términos de variables de estado es la siguiente,²

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (5.2)$$

donde \mathbf{x}_k denota el vector de estados, o simplemente estado³, del sistema en el instante k ; \mathbf{x}_{k-1} denota el estado del sistema en el instante previo, $k-1$; \mathbf{y}_k denota el vector de mediciones tomados en el instante k ; a las matrices \mathbf{F}_{k-1} , \mathbf{G}_{k-1} y \mathbf{H}_k (en general son variantes en el tiempo) comúnmente se las denomina *matriz de sistema*, *matriz de entrada* y *matriz de salida*, respectivamente. Los vectores \mathbf{w}_{k-1} y \mathbf{v}_k , denominados *ruido de modelo* y *ruido de medición*, respectivamente, son modelados como procesos estocásticos blancos, de media nula, no-correlacionados, con matrices de covarianza conocidas, denotadas \mathbf{Q}_k y \mathbf{R}_k , respectivamente

$$\mathbf{w}_k \sim (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \quad (5.4)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j'\} = \mathbf{Q}_k \delta[k-j] \quad (5.5)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j'\} = \mathbf{R}_k \delta[k-j] \quad (5.6)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{w}_j'\} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

²Si bien en el resto de la tesis se utiliza la descripción matemática $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k$, por simplicidad en la presentación, aquí se opta por esta descripción alternativa. No obstante, la vinculación entre ambas descripciones es directa.

³La denominación *estado del sistema* se utilizará como equivalente a *vector de estados del sistema*, y no a un componente de dicho vector. Cuando sea necesario referir a un componente, utilizaremos la terminología *el estado de posición en x*, por ejemplo.

En la Figura 5.1 se presenta una descripción en diagrama de bloques de este sistema.

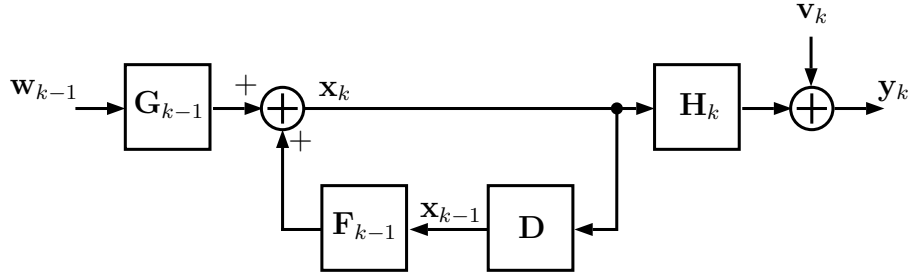


Figura 5.1: Sistema Lineal Discreto.

El objetivo es estimar el estado \mathbf{x}_k a partir de las mediciones \mathbf{y}_k , utilizando además el conocimiento del sistema. Denotamos

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\} \quad (5.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\} \quad (5.9)$$

donde a $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ se lo denomina estimado *a priori*, pues para estimar el estado en el instante k incorpora las mediciones tomadas hasta el instante $k-1$, es decir, previas a dicho instante; mientras que a $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ se lo denomina estimado *a posteriori*⁴, dado que también incorpora la medición tomada en el instante k , \mathbf{y}_k . En línea con lo anterior denotamos

$$\mathbf{P}_k^- = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)'\} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)'\} \quad (5.11)$$

donde \mathbf{P}_k^- es la matriz de covarianza del error de estimación *a priori*, mientras que \mathbf{P}_k^+ es la matriz de covarianza del error de estimación *a posteriori*. En la figura 5.2 se esquematizan las relaciones entre los estimados *a priori*, *a posteriori*, y sus respectivas matrices de covarianza del error de estimación.

Puede verse que $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-$ es la estimación del estado en el instante $k-1$, previa a la incorporación de la medición \mathbf{y}_{k-1} , y \mathbf{P}_{k-1}^- su correspondiente matriz de covarianza del error de estimación. Al incorporar la medición \mathbf{y}_{k-1} se obtiene una nueva estimación del estado en el instante $k-1$, denotada $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$. Por supuesto, esta nueva estimación tendrá una matriz de covarianza del error de estimación diferente, denotada \mathbf{P}_{k-1}^+ .

Al arribar el instante k , se desea obtener una estimación del estado en dicho instante. A la estimación obtenida sin incorporar ninguna nueva medición se la denota $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, y tendrá matriz de covarianza del error de estimación \mathbf{P}_k^- . Nuevamente, al incorporar la medición obtenida en este instante, \mathbf{y}_k , se obtiene el estimador $\hat{\mathbf{x}}_k^+$, con matriz de covarianza del error de estimación \mathbf{P}_k^+ .

Partiendo de la definición (5.8), y utilizando el conocimiento del sistema provisto por (5.1) se puede ver que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\} = E\{\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\} = \\ &= \mathbf{F}_{k-1} E\{\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\} + \mathbf{G}_{k-1} E\{\mathbf{w}_{k-1}\} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \end{aligned} \quad (5.12)$$

⁴En la bibliografía también es común la notación $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ para el estimado *a priori*, y $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ para el estimado *a posteriori*. También es común plantear el *estimado de predicción*, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-M} = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k-M}\}$, y el *estimado de suavizado*, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k+N} = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{k+N}\}$.

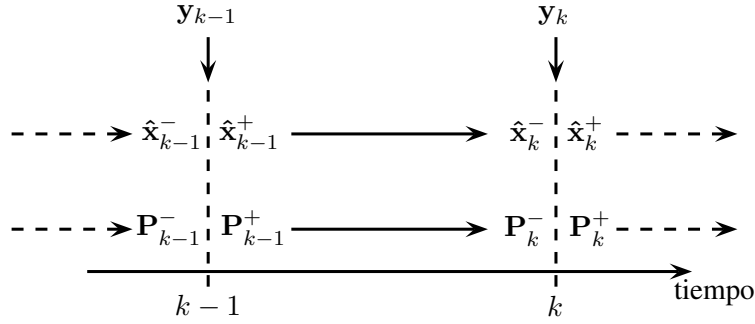


Figura 5.2: Estimación del estado *a priori* y *a posteriori*, y sus respectivas matrices de covarianza del error de estimación.

donde se ha utilizado el hecho de que $E\{\mathbf{w}_{k-1}\} = 0$.

$$\therefore \boxed{\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (5.13)$$

De la misma manera puede verse que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)'\} = E\{(\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1})(\dots)'\} = \\ &= \mathbf{F}_{k-1} E\{(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)'\} \mathbf{F}_{k-1}' + \mathbf{G}_{k-1} E\{\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_{k-1}'\} \mathbf{G}_{k-1}' = \\ &= \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}' + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}' \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $E\{(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)\mathbf{w}_{k-1}'\} = E\{\mathbf{w}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+)'\} = \mathbf{0}$, dado que el ruido de modelo no está correlacionado instante a instante, y por ende no lo está con el estado (que depende en parte del ruido en los instantes previos).

$$\therefore \boxed{\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}' + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}'} \quad (5.15)$$

A la ecuación (5.13) se la denomina *actualización temporal* de la estimación del estado, mientras que a la ecuación (5.15) se la denomina *actualización temporal* de la matriz de covarianza del error de estimación del estado. Puede verse que mediante la actualización temporal del estado, la estimación se propaga de la misma forma en la que se propagaría el estado a través del sistema en ausencia de perturbaciones. Dado que no se incorporan mediciones en esta etapa, la única información con la que se cuenta para obtener la nueva estimación es la estructura del sistema. En la ecuación (5.15) puede verse cómo la matriz de covarianza del error de estimación resulta afectada por la matriz de covarianza de la perturbación. Esto es, dado que la propagación de la estimación del estado se realizó utilizando el modelo de estados, con la consideración de no-perturbación, mientras que el estado realmente se propagaría de acuerdo a (5.1), resulta lógico que al tener una mayor varianza en el ruido que perturba al sistema, la estimación del estado difiera en mayor medida del verdadero valor que toma dicho estado, lo cual se ve reflejado en un incremento del valor de \mathbf{P}_k^- .

Por otra parte puede verse que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ son dos estimaciones del mismo vector de estado \mathbf{x}_k en el instante k . La única diferencia reside en que $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ incorpora la medición en el instante k , y_k . Si se plantea el estimador lineal recursivo,

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(y_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (5.16)$$

y se busca el valor de \mathbf{K}_k que minimice el error cuadrático medio de $\hat{\mathbf{x}}_k^+$, la función de costo resulta⁵

$$J_k = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)'(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)\} = E\{\text{Tr}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^']\} = \text{Tr}(\mathbf{P}_k^+). \quad (5.17)$$

A partir de las ecuaciones (5.16) y (5.2) puede verse que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^'\} = E\{[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k][\cdot \cdot]^'\} = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^'\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^' + \mathbf{K}_k E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^'\} \mathbf{K}_k' = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^' + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k' \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \mathbf{v}_k^'\} = E\{\mathbf{v}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^'\} = \mathbf{0}$, dado que el ruido de medición no está correlacionado instante a instante, y por ende para un instante k no está correlacionado con la estimación $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, que no incorpora la medición en dicho instante; y tampoco está correlacionado con el estado.

$$\therefore \boxed{\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^' + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k'} \quad (5.19)$$

Para buscar el valor de \mathbf{K}_k que minimice la función de costo (5.17), derivamos esta última con respecto a \mathbf{K}_k , e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k}{\partial \mathbf{K}_k} &= 2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (-\mathbf{H}_k') + 2\mathbf{K}_k \mathbf{R}_k = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' + \mathbf{R}_k) &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' + \mathbf{R}_k)^{-1}} \quad (5.21)$$

Operando con las ecuaciones (5.16), (5.18) y (5.20) se llega, en resumen, a

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+} \quad (5.22)$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)} \quad (5.23)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}' + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}'} \quad (5.24)$$

$$\boxed{\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^' + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k'} \quad (5.25)$$

$$= [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k' \mathbf{R}_k \mathbf{H}_k]^{-1} \quad (5.26)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (5.27)$$

$$\boxed{\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' + \mathbf{R}_k)^{-1}} \quad (5.28)$$

$$= \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k' \mathbf{R}_k^{-1} \quad (5.29)$$

⁵Donde $\text{Tr}(\mathbf{A})$ denota la traza de la matriz \mathbf{A} .

Donde las ecuaciones (5.26) y (5.27), variantes de la ecuación (5.25); y la ecuación (5.29), variante de (5.28) se obtienen operando con las demás ecuaciones presentadas. Debe considerarse que si se opta por utilizar la expresión (5.29) para obtener \mathbf{K}_k , necesariamente debe obtenerse \mathbf{P}_k^+ mediante (5.26). De igual modo, en caso de utilizar (5.25) o (5.27) para calcular \mathbf{P}_k^+ , se debe obtener \mathbf{K}_k mediante (5.28).

Estas variantes presentan alternativas matemáticamente equivalentes, pero que difieren en el comportamiento numérico. La expresión (5.25), denominada *forma estabilizada de Joseph*, es más estable y robusta que (5.27). Si bien (5.27) es una expresión computacionalmente más simple que (5.25), no garantiza que la \mathbf{P}_k^+ obtenida sea simétrica y positiva definida. Por el contrario, (5.25) garantiza que la \mathbf{P}_k^+ obtenida sea simétrica y positiva definida, siempre y cuando \mathbf{P}_k^- sea simétrica y positiva definida (Simon, 2006).

El proceso de estimación comienza con nuestro mejor estimado del estado \mathbf{x}_0 , denotado $\hat{\mathbf{x}}_0^+$, cuya matriz de covarianza del error de estimación se denota \mathbf{P}_0^+

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E\{\mathbf{x}_0\} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^'\}. \quad (5.31)$$

En la Figura 5.3 se presenta un diagrama en bloques que esquematiza la operación del algoritmo.

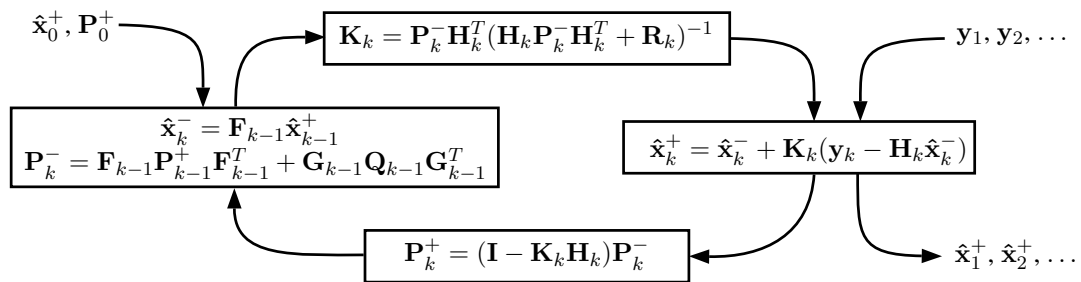


Figura 5.3: Representación en diagrama en bloques de la operación del algoritmo del filtro de Kalman.

5.2. Propiedades del Filtro de Kalman

Si partimos de un sistema lineal como el descrito en las ecuaciones (5.1) a (5.7), dado que el estado es en parte determinado por el proceso estocástico $\{\mathbf{w}_k\}$, \mathbf{x}_k es una variable aleatoria. Si además consideramos que se busca un filtro causal que estime el estado del sistema, $\hat{\mathbf{x}}_k$, en base a la secuencia de mediciones $\{\mathbf{y}_k\}$, afectadas por el proceso estocástico $\{\mathbf{v}_k\}$, $\hat{\mathbf{x}}_k$ es también una variable aleatoria. Si denotamos con $\tilde{\mathbf{x}}_k$ al error entre el estado verdadero y el estimado

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (5.32)$$

y busquemos el estimador que minimice (para cada valor de k)

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}_k} (E\{\tilde{\mathbf{x}}_k' \mathbf{S}_k \tilde{\mathbf{x}}_k\}) \quad (5.33)$$

esto es, el valor esperado de la norma 2 pesada del error de estimación, donde \mathbf{S}_k es una matriz de peso definida positiva, es posible asegurar que (Simon, 2006)

- Si $\{\mathbf{w}_k\}$ y $\{\mathbf{v}_k\}$ son Gaussianas, de media nula, no-correlacionadas, y blancas, entonces el Filtro de Kalman es la solución a la minimización propuesta.
- Si $\{\mathbf{w}_k\}$ y $\{\mathbf{v}_k\}$ son de media nula, no-correlacionadas, y blancas (no necesariamente ambas Gaussianas), entonces el Filtro de Kalman es la mejor solución lineal (estimador combinación lineal de las mediciones) a la minimización propuesta. Puede existir otro estimador no-lineal que obtenga una mejor solución, pero el KF es el mejor filtro lineal.
- Si $\{\mathbf{w}_k\}$ y/o $\{\mathbf{v}_k\}$ son correlacionadas o coloreadas, puede modificarse el KF para resolver el problema propuesto.
- Para el caso de sistemas no-lineales existen formulaciones del filtro de Kalman, como por ejemplo el EKF y PKF que analizaremos en las secciones 5.3 y 5.4, respectivamente.

5.3. Filtro de Kalman Extendido (EKF)

En la formulación del Filtro de Kalman de la sección 5.1 se parte de considerar un modelo en variables de estado lineal, y una relación lineal entre los estados y las mediciones disponibles. En la práctica, estas consideraciones no siempre se verifican, sea porque el modelo en variables de estado es no-lineal⁶, y/o porque la relación entre los estados y las mediciones de las que disponemos es no-lineal.

Para tratar con estas no-linealidades, una alternativa consiste en linealizar, y aplicar el esquema lineal sobre el modelo linealizado. Esto conduce a un esquema subóptimo de filtrado, pero que mantiene la simpleza del filtrado lineal. Existen dos formulaciones clásicas, según en torno a qué punto se realiza la linealización.

Una de estas formulaciones plantea la linealización en torno a una trayectoria nominal, conocida a-priori. Eso se conoce como *Filtro de Kalman Linealizado*. Un inconveniente que tiene esta formulación consiste en que debe conocerse la trayectoria nominal, y cuanto más difiera ésta de la trayectoria real del vehículo, más lejano resultará el punto de linealización del punto real en el que se encuentra el sistema, siendo mayor el error de linealización.

Una segunda opción consiste en linealizar el sistema en torno a la estimación del estado obtenida por el Filtro de Kalman, esquema que se conoce como *Filtro de Kalman Extendido* (EKF). Esta estimación se obtiene a partir de aplicar el Filtro de Kalman al sistema linealizado en torno a una estimación previa del estado (Simon, 2006).

Partimos del sistema discreto no lineal

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (5.35)$$

⁶O, siendo más precisos, existe un modelo no-lineal en variables de estado que representa más fielmente el comportamiento de nuestro vehículo, y por ello optamos por usarlo.

donde, al igual que antes los vectores \mathbf{w}_{k-1} y \mathbf{v}_{k-1} son procesos estocásticos blancos, de media nula, no-correlacionados, con matrices de covarianza conocidas, denotadas \mathbf{Q}_k y \mathbf{R}_k , respectivamente

$$\mathbf{w}_k \sim (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k) \quad (5.36)$$

$$\mathbf{v}_k \sim (\mathbf{0}, \mathbf{R}_k) \quad (5.37)$$

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j'\} = \mathbf{Q}_k \delta[k - j] \quad (5.38)$$

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j'\} = \mathbf{R}_k \delta[k - j] \quad (5.39)$$

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{w}_j'\} = \mathbf{0}. \quad (5.40)$$

Al igual que en caso del Filtro de Kalman lineal, el proceso de estimación comienza con nuestro mejor estimado del estado \mathbf{x}_0 , denotado $\hat{\mathbf{x}}_0^+$, cuya matriz de covarianza del error de estimación se denota \mathbf{P}_0^+

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E\{\mathbf{x}_0\} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)' \}. \quad (5.42)$$

La actualización temporal de la estimación del estado se realiza aplicando el modelo sin considerar las perturbaciones, de manera análoga al caso del KF, pero teniendo en cuenta que ahora el modelo es no-lineal

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0}). \quad (5.43)$$

Si, al igual que en el caso del KF, se plantea el cálculo por definición de la matriz de covarianza del error de estimación

$$\mathbf{P}_k^- = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)'\} = E\{[\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) - \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})][\dots]'\} \quad (5.44)$$

vemos que aparece una función no-lineal dentro del cálculo de la esperanza. Cabe destacar que aquí tanto \mathbf{w}_{k-1} como $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ son variables aleatorias, con lo cual se requiere conocer sus distribuciones para realizar este cálculo. Una manera posible de resolver esta cuenta consiste en desarrollar la función no-lineal, $\mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})$, en serie de Taylor (Papoulis, 1980). Una aproximación consiste en conservar solamente los términos de orden 1 de este desarrollo en torno al punto $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) &\simeq \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) + \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})} \mathbf{w}_{k-1}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Denotando

$$\mathbf{F}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{G}_{k-1} \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})}. \quad (5.47)$$

Si se reemplazan (5.46) y (5.47) en (5.45), y esto en (5.44) se llega a una expresión similar a (5.15)

$$\mathbf{P}_k^- \simeq \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}' + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}'. \quad (5.48)$$

Esta aproximación es la que se utiliza en el EKF, como actualización temporal de la matriz de covarianza del error de estimación. Dependiendo de qué peso tengan los términos que se han truncado en el desarrollo en serie de Taylor de la función no-lineal, es decir, de qué tan buena sea la linealización, la aproximación resultará aceptable. Dado que la mejor estimación del estado en el instante $k - 1$ está dada por $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$, es en torno a este punto que se realiza la linealización del modelo.

Por otra parte, si se plantea la actualización por mediciones del estado mediante una expresión similar a la ecuación (5.23), pero teniendo en cuenta la relación no-lineal entre el vector de estado y el de mediciones⁷

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})] \quad (5.49)$$

y si al igual que en (5.18) se calcula la matriz de covarianza del error de estimación

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^+ &= \mathbf{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)'\} = \\ &= \mathbf{E}\{(\mathbf{x}_k - \{\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k[\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})]\})(\dots)'\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

nuevamente aparece una función no-lineal dentro del cálculo de la esperanza. Aquí tanto \mathbf{v}_{k-1} como $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ son variables aleatorias, con lo cual se requiere conocer sus distribuciones para realizar este cálculo. Si se plantea el desarrollo en serie de Taylor, en torno al punto $(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})$, que conserve solamente términos de orden 1, se obtiene

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \simeq \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})} \mathbf{v}_k. \quad (5.51)$$

Se define

$$\mathbf{H}_k \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{M}_k \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})}. \quad (5.53)$$

Si se reemplazan (5.52) y (5.53) en (5.51), y esto en (5.50) se llega a una expresión similar a (5.19), con la salvedad de incluir el efecto de la matriz \mathbf{M}_k

$$\mathbf{P}_k^+ \simeq (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)' + \mathbf{K}_k \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k' \mathbf{K}_k'. \quad (5.54)$$

Esta aproximación es la que se utiliza como actualización por incorporación de mediciones en el EKF. Al igual que antes, esta expresión no es exactamente la matriz de covarianza del error de estimación, sino una aproximación. Dependiendo de qué peso tengan los términos que se han truncado en el desarrollo en serie de Taylor de la función no-lineal, es decir, de qué tan buena sea la linealización, qué tan buena resultará la aproximación. Puede verse también

⁷Donde ya se ha tomado una decisión, que consiste en utilizar un estimador lineal recursivo para actualizar el estado.

que la mejor estimación del estado en el instante k está dada por $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, y es precisamente en torno a este punto que se realiza la linealización entre el estado y las mediciones.

A partir de esto, y mediante un procedimiento similar al de (5.20), se llega a una expresión similar a (5.28), que contempla el efecto de la matriz \mathbf{M}_k

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k' + \mathbf{M}_k \mathbf{R}_k \mathbf{M}_k')^{-1}. \quad (5.55)$$

A partir de las expresiones anteriores, se puede llegar a una expresión similar a (5.27) para la actualización por mediciones de la matriz de covarianza del error de estimación, pero utilizando el valor de \mathbf{H}_k dado por la ecuación (5.52)

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-. \quad (5.56)$$

En resumen, en la formulación del EKF se utiliza el modelo no-lineal para realizar la actualización temporal de la estimación del estado, mientras que la actualización temporal de la matriz del error de estimación del estado se realiza en base a la linealización del modelo en torno a la mejor estimación del estado en dicho momento. Para realizar la actualización por mediciones interviene la relación no-lineal entre el estado y las mediciones, pero se utiliza una variante del estimador lineal recursivo. La actualización por incorporación de mediciones de la matriz de covarianza del error de estimación del estado se aproxima mediante la linealización del modelo en torno a la mejor estimación del estado en dicho instante. La matriz de ganancias de Kalman se obtiene en base a esta aproximación de la matriz \mathbf{P}_k^+ . En este último punto vemos que el esquema es subóptimo por dos razones: por un lado la optimización se hace considerando una variante del estimador lineal recursivo, cuando podrían existir otras opciones no-lineales que alcanzaran un menor error cuadrático medio, y por otra parte la matriz de covarianza utilizada para esta optimización es una aproximación de la verdadera.

5.4. Filtro de Kalman de Posición (PKF)

La idea del PKF, presentada en Chaffee y Abel (1992) para el caso de estimación de la posición con señales GPS consiste en plantear un estimador de dos etapas:

- En base a las mediciones de pseudo-rango para un determinado instante se obtiene la solución de posición mediante algún método que resuelva el problema no-lineal (por ejemplo, el algoritmo de Bancroft, que presentaremos en la sección 6.8).
- Se consideran como mediciones a las soluciones de posición y tiempo, que ahora guardan una relación lineal con el estado (de hecho, son parte del estado a estimar). La matriz de covarianza del ruido de mediciones puede obtenerse (aproximación lineal) mediante la matriz de DOP (que presentaremos en la sección 6.11).

Asumiendo un modelo lineal para el sistema (como por ejemplo los presentado en 4.1), el resto de la formulación es similar a la del KF.

En nuestro caso, plantearemos una variante a este esquema con las siguientes consideraciones:

- En base a las mediciones de pseudo-rango y delta-rango para un determinado instante se obtiene la solución de posición mediante algún método que resuelva el problema no-lineal, y la solución de velocidad mediante el método presentado en 6.10. En caso de utilizar más de un sistema GNSS, la solución de posición se obtiene mediante el método presentado en 6.9.
- La matriz de covarianza del ruido de mediciones (aproximación lineal) se obtiene en base a la matriz de DOP adecuadamente modificada.
- En caso de utilizar un modelo de estados no-lineal, para las actualizaciones temporales de la estimación y de la matriz de covarianza del error de estimación se utilizará la misma formulación que la utilizada en el caso del EKF.

5.5. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se presentaron los métodos de filtrado estadístico que serán utilizados para la obtención de la solución de navegación. Partiendo de la formulación general del Filtro de Kalman (KF) que considera tanto un modelo de estados lineal como una relación lineal de los estados con las mediciones, en la variante de tiempo discreto; se particularizó en la descripción de la formulación del Filtro de Kalman Extendido (EKF), aplicable en el caso de modelos no-lineales y/o relación no-lineal entre los estados y las mediciones; y el denominado Filtro de Kalman de Posición (PKF), una formulación *ad-hoc* propuesta para el caso de contar con mediciones de los sistemas GNSS.

CAPÍTULO 6

ASPECTOS DE IMPLEMENTACIÓN DE RECEPTORES GNSS

En este capítulo describiremos con mayor detalle una serie de aspectos de los sistemas GNSS que se relacionan con la implementación práctica de receptores, que si bien exceden a las aplicaciones aeroespaciales, son indispensables también en estas. Dado que el foco de la tesis está puesto en los algoritmos de navegación con este tipo de receptores, entraremos en detalle en la parte algorítmica, y en particular, en los algoritmos de más alto nivel, más cercanos al cálculo de la solución de navegación.

6.1. Demodulación del Mensaje de Navegación

Una de las tareas imprescindibles que debe realizar un receptor para la obtención de la solución de navegación utilizando un determinado sistema GNSS consiste en la demodulación del mensaje de navegación transmitido por dicho sistema.

En primer lugar, la sincronización con la trama de datos, y la recuperación de la información que permite referir un determinado instante en dicha trama al marco temporal correspondiente (ver capítulo 3) es necesaria para completar el armado de lo que denominamos tiempo de transmisión de la señal recibida desde un satélite particular (ver capítulo 2).

En segundo lugar, cada satélite transmite en su propio mensaje de navegación la información que permite al receptor determinar los estados de posición y velocidad de dicho satélite (ver sección 6.7), además de diversos parámetros de corrección que deben ser tenidos en cuenta en el armado de las mediciones de tiempo de transmisión.

Finalmente, cada satélite transmite información acerca del estado del sistema GNSS al que pertenece. Un ejemplo de esto último es la denominada información de almanaque, que describe la constelación completa de los satélites que forman el sistema GNSS de pertenencia.

Denominaremos información inmediata a la información necesaria para las dos primeras acciones enunciadas, e información no-inmediata a la referida en último lugar. Si bien a nivel

“macroscópico” la estructura es similar, el mensaje de navegación de cada sistema GNSS presenta sus particularidades propias.

En el caso del sistema GPS la estructura mayor que presenta el mensaje es un conjunto de 25 *páginas*, las cuales requieren un tiempo total de transmisión de 12,5 minutos a la tasa de 50 bps. Esta estructura contiene toda la información necesaria para la descripción del sistema (tanto inmediata como no-inmediata). Es decir, para el armado del almanaque completo de la constelación se requiere la demodulación de las 25 páginas completas.

Cada *página*, de 30 segundos de duración, se encuentra formada por 5 *subtramas*, cada una de 6 segundos de duración. La información inmediata se encuentra en las subtramas 1 a 3 de todas las páginas.

Cada *subtrama* está formada por 10 *palabras* de 30 bits. Las dos primeras palabras de cualquier subtrama son la denominada TLM, o palabra de *telemetría* (palabra 1) y la denominada HOW, o palabra de *hand over* (palabra 2). Veremos la importancia de estas dos palabras en la sincronización de la señal recibida. Los primeros 24 bits de cada palabra contienen la información útil (datos) mientras que los 6 bits restantes se utilizan para el chequeo de paridad. En la figura 6.1 se muestra gráficamente la estructura de este mensaje de navegación.

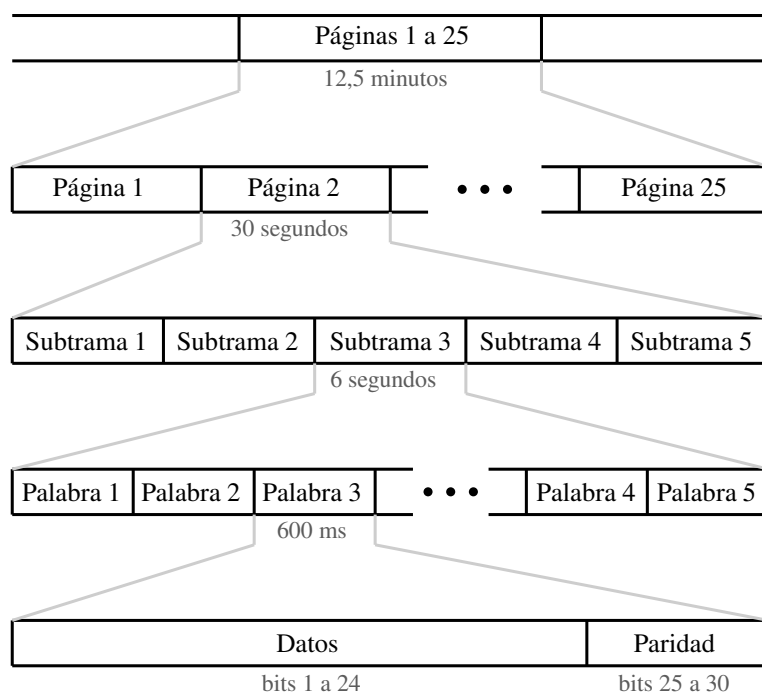


Figura 6.1: Estructura del Mensaje de Navegación de GPS.

En el caso del sistema GLONASS, la estructura mayor que presenta el mensaje de navegación se denomina *supertrama*, y requiere un tiempo de transmisión de 2,5 minutos, a la tasa de 50 bps. Al igual que en el caso de GPS esta estructura contiene toda la información necesaria para la descripción del sistema (tanto inmediata como no-inmediata). Para el armado del almanaque se requiere una supertrama completa.

La supertrama se encuentra formada por cinco *tramas*, cada una de 30 segundos de duración, y a su vez cada trama se encuentra formada por 15 *líneas*, cada una de 2 segundos

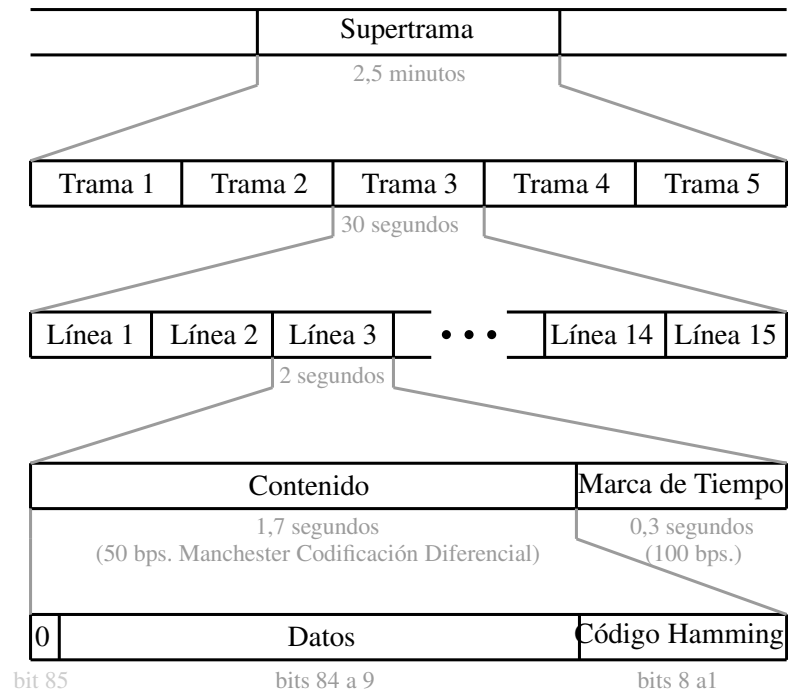


Figura 6.2: Estructura del Mensaje de Navegación de GLONASS.

de duración. La información inmediata se encuentra contenida en las primeras 4 líneas de cualquiera de las cinco tramas.

Cada línea, contiene información en los primeros 1,7 segundos. Esta información se encuentra codificada en formato diferencial con codificación tipo Manchester (a 50 bps). Los 0,3 segundos restantes de cada línea contienen una secuencia conocida denominada marca de tiempo (a 100 bps). Veremos la utilidad de esta secuencia en la sincronización de la señal recibida.

De los 1,7 segundos que contienen información de cada línea, el primer bit es siempre cero, los 76 bits siguientes contienen la información útil (datos), mientras que los últimos 8 contienen los bits de redundancia para la detección de errores en la línea recibida. En la figura 6.2 se muestra gráficamente la estructura de este mensaje de navegación.

Si bien la nomenclatura utilizada para cada sistema puede resultar confusa, se ha privilegiado conservar (una traducción literal de) la nomenclatura utilizada por los documentos de descripción respectivos de cada sistema (GPS, 2014; GLONASS, 2008). Con este mismo criterio se denomina bit 85 al MSB de cada línea de GLONASS (siendo el primero en recibirse de su línea respectiva), mientras que se denomina bit 1 al MSB de cada palabra de GPS (siendo el primero en recibirse de su palabra respectiva).

6.1.1. Sincronización a Nivel de Palabra/Línea

Nos basaremos en una arquitectura de receptor con N canales de seguimiento¹, que proveen los resultados de integraciones de 10 ms sincronizadas con los flancos de los bits de datos, tanto en el caso de GPS como en el caso de GLONASS. En Puga (2015) se describe el algoritmo encargado de esta sincronización.

GPS

En el caso de GPS se utiliza codificación antipodal para los bits del mensaje de navegación a 50 bps, y por ende cada integración de 10 ms contiene la información referente a medio bit de datos. Para obtener los bits de datos propiamente dichos, se deben combinar (sumar) de a pares las integraciones de 10 ms, y luego decidir en base al signo de esta combinación, si se trata de un 1 ó un 0. No obstante, no existe información a priori de cuáles son los pares de resultados que corresponden a un mismo bit de datos. Dicho de otra manera, existe una ambigüedad de 10 ms en la ubicación del flanco de bit de datos. La sincronización se realiza buscando una cadena conocida que se denomina preámbulo, ubicada al inicio de la palabra de telemetría, que contiene los valores expresados en (6.1).

$$\{P_n\} = 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1 \quad (6.1)$$

Dada la mencionada ambigüedad de 10 ms, durante la sincronización se deben armar dos posibles secuencias, que contienen las dos posibles combinaciones de a medio bit, y comparar ambas secuencias con la correspondiente al preámbulo. Dado que también existe ambigüedad de signo, se debe comparar también con el complemento del preámbulo.

Dado que el preámbulo es una secuencia válida de datos, aún en ausencia de ruido, se corre el riesgo de una detección errónea del mismo, por lo cual, una vez detectado, para darlo por válido se verifica que la palabra completa pase el chequeo de paridad que describiremos posteriormente. Este procedimiento permite resolver la ambigüedad de 10 ms en el flanco de bit de datos, la ambigüedad de signo, y permite obtener el sincronismo a nivel de palabra. Se debe continuar verificando que el preámbulo se halle presente en las ubicaciones que corresponde, en la subsiguiente trama de datos. En caso de no verificarse esto, se declara pérdida de sincronismo y se debe recomenzar el proceso. Este procedimiento se debe realizar para cada canal que posea un satélite de GPS en seguimiento.

GLONASS

En el caso de GLONASS, cada integración corresponde a un chip de la marca de tiempo, o a medio bit (con señalización Manchester) de datos. La primera etapa de sincronización consiste en ubicar la marca de tiempo, dada por la secuencia de 30 chips (6.2).

$$\{TM_n\} = 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0 \quad (6.2)$$

¹Por canal de seguimiento aquí entendemos tanto el *hardware* encargado del procesamiento, en general correladores, como las tareas de *software* asociadas al mismo.

Dado que en la recepción de la señal existe ambigüedad de signo, se debe buscar tanto la marca de tiempo como su complemento en bits.

En ausencia de ruido, la marca de tiempo es una secuencia que no puede encontrarse como parte de los datos, ya que estos contienen señalización Manchester, que obliga a una transición en cada bit de datos, y por tanto no pueden ocurrir más de dos unos ó dos ceros consecutivos. En presencia de ruido, si bien es posible, existe una muy baja probabilidad de detectar erróneamente la marca de tiempo.

Una vez que se detecta la marca de tiempo, y se resuelve la ambigüedad de signo, los 170 resultados de integración siguientes se combinan de a pares, quitando la señalización Manchester, y obteniendo así los 85 bits de datos de la línea. Los 30 resultados siguientes deben corresponder a la siguiente marca de tiempo, luego los 170 resultados siguientes al contenido de la siguiente línea, y así consecutivamente. En caso que en algún momento no se encuentre la marca de tiempo donde debiera, se declara que se perdió sincronismo y se vuelve a comenzar el proceso.

Este procedimiento se debe realizar para cada canal que se encuentre en seguimiento de la señal de un satélite de GLONASS, y permite obtener la sincronización a nivel de línea.

Una consideración importante de implementación, es que las rutinas encargadas del sincronismo de línea o palabra no requieren una periodicidad demasiado alta, ya que como analizamos previamente, una línea tiene una duración de 2 segundos, y una palabra una duración de 600 ms. No obstante, dado que cada resultado de integración corresponde a un intervalo de integración de 10 ms, se requieren almacenar 100 resultados de integración por cada canal por cada segundo de datos a procesar. Esto debe ser tenido en cuenta al momento de planificar la periodicidad con que se ejecutan estas tareas y la cantidad de memoria a utilizar.

6.1.2. Detección de Errores

Luego de la sincronización a nivel de palabra (GPS) o de línea (GLONASS) se debe chequear que los datos recibidos no contengan errores; para lo cual en cada caso se incluyen una determinada cantidad de bits de redundancia en el mensaje de navegación.

GPS

En el caso de GPS, los bits 25 a 30 de cada palabra, en conjunto con los bits 29 y 30 de la palabra anterior se utilizan para el chequeo de paridad de los datos contenidos en los bits 1 a 24. El bit 30 de la palabra anterior se utiliza también para corregir la polaridad del mensaje, con lo cual no es necesario resolver esta ambigüedad durante el sincronismo de palabra. Si se denota con b_i , con i de 1 a 30, a los bits recibidos de una determinada palabra, con b_{29*} y b_{30*} a los bits 29 y 30 recibidos de la palabra anterior, y con d_i a los bits de datos que se busca recuperar en base a los bits recibidos, el algoritmo de chequeo de paridad es el que se

presenta en las ecuaciones (6.3) a (6.9)

$$d_i = b_i \oplus b_{30^*} \quad i = 1, \dots, 24 \quad (6.3)$$

$$p_{25} = b_{29^*} \oplus \bigoplus_{i=i_0} d_i \quad i_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 20, 23\} \quad (6.4)$$

$$p_{26} = b_{30^*} \oplus \bigoplus_{i=i_1} d_i \quad i_1 = \{2, 3, 4, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 21, 24\} \quad (6.5)$$

$$p_{27} = b_{29^*} \oplus \bigoplus_{i=i_2} d_i \quad i_2 = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 22\} \quad (6.6)$$

$$p_{28} = b_{30^*} \oplus \bigoplus_{i=i_3} d_i \quad i_3 = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 23\} \quad (6.7)$$

$$p_{29} = b_{30^*} \oplus \bigoplus_{i=i_4} d_i \quad i_4 = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 24\} \quad (6.8)$$

$$p_{30} = b_{29^*} \oplus \bigoplus_{i=i_5} d_i \quad i_5 = \{3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 19, 22, 23, 24\} \quad (6.9)$$

donde el símbolo \oplus indica la suma módulo 2 (también descrita por la operación XOR) entre los bits. Para que la palabra pueda considerarse correcta, se debe verificar que la secuencia $\{p_{25}, p_{26}, p_{27}, p_{28}, p_{29}, p_{30}\}$ sea idénticamente igual a la secuencia $\{b_{25}, b_{26}, b_{27}, b_{28}, b_{29}, b_{30}\}$. Caso contrario, se debe descartar la palabra por contener errores.

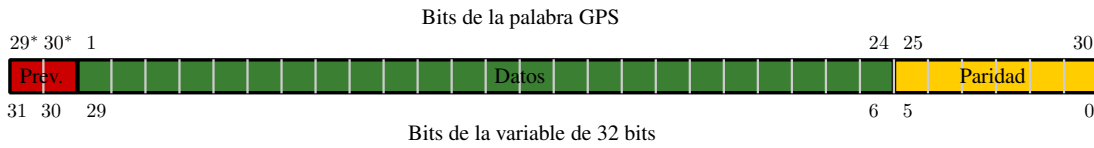


Figura 6.3: Ejemplo de almacenamiento de una palabra del mensaje de navegación de GPS en una variable de 32 bits.

Para una implementación en por ejemplo arquitecturas de 32 bits, una opción interesante consiste en almacenar cada palabra recibida en los 30 bits menos significativos, y los bits 29 y 30 de la palabra anterior en los restantes dos bits más significativos, como se presenta en la figura 6.3. La implementación de la corrección de polaridad, ecuación (6.3) consiste simplemente en tomar el complemento de los bits 1 a 24 (almacenados en las posiciones 6 a 29 de la palabra de 32 bits) solo en caso que el bit 30 de la palabra anterior (almacenado en la posición 30) sea igual a uno. Luego de esta operación, se realiza la operación AND de la variable de 32 bits almacenada como se detalla anteriormente con las máscaras que se detallan en la tabla 6.1, y luego se realiza la XOR entre los bits de la variable que resulta de esta operación, obteniendo cada uno de los p_i del chequeo de paridad. Finalmente, se comparan estos valores con los bits 25 a 30 de la palabra recibida (almacenados en las posiciones 0 a 5).

GLONASS

En el caso de GLONASS, una vez que se realiza la sincronización a nivel de línea, la primer operación consiste en remover la codificación relativa. De esta manera, se obtienen los 85 bits de datos del mensaje, de los cuales 76 (bits 9 a 84) contienen información, uno es siempre cero (bit 85) y 8 son de comprobación de paridad (bits 1 a 8). Si denotamos con b_i a cada uno de estos bits, para la comprobación de paridad se deben calcular los valores c_1 a c_7 , y c_8 presentados en las ecuaciones (6.10) a (6.17).

p_i	Máscara
p_{25}	0X3B1F3480 + 0X80000000
p_{26}	0X1D8F9A40 + 0X40000000
p_{27}	0X2EC7CD00 + 0X80000000
p_{28}	0X1763E680 + 0X40000000
p_{29}	0X2BB1F340 + 0X40000000
p_{30}	0X0B7A89C0 + 0X80000000

Tabla 6.1: Máscaras para calcular los p_i .

$$c_1 = b_1 \oplus \bigoplus_{i=i_1} b_i \quad (6.10)$$

$$i_1 = \{9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84\}$$

$$c_2 = b_2 \oplus \bigoplus_{i=i_2} b_i \quad (6.11)$$

$$i_2 = \{9, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 33, 34, 36, 37, 40, 41, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 61, 64, 65, 67, 68, 71, 72, 75, 76, 79, 80, 83, 84\}$$

$$c_3 = b_3 \oplus \bigoplus_{i=i_3} b_i \quad (6.12)$$

$$i_3 = \{10 \dots 12, 16 \dots 19, 23 \dots 26, 31 \dots 34, 38 \dots 41, 46 \dots 49, 54 \dots 57, 62 \dots 65, 69 \dots 72, 77 \dots 80, 85\}$$

$$c_4 = b_4 \oplus \bigoplus_{i=i_4} b_i \quad (6.13)$$

$$i_4 = \{13 \dots 19, 27 \dots 34, 42 \dots 49, 58 \dots 65, 73 \dots 80\}$$

$$c_5 = b_5 \oplus \bigoplus_{i=i_5} b_i \quad (6.14)$$

$$i_5 = \{20 \dots 34, 50 \dots 65, 81 \dots 85\}$$

$$c_6 = b_6 \oplus \bigoplus_{i=35}^{65} b_i \quad (6.15)$$

$$c_7 = b_7 \oplus \bigoplus_{i=66}^{85} b_i \quad (6.16)$$

$$c_S = \bigoplus_{i=1}^{85} b_i \quad (6.17)$$

Luego, en base a estos valores

- Si $c_S = 0$ y además $c_i = 0 \quad \forall \quad i = 1 \dots 7$, la línea no contiene errores.

c_i	Palabra A	Palabra B	Palabra C
c_1	0x55555AAA	0xAAAAB555	0x000D5B01
c_2	0x66666CCC	0xCCCCD999	0x00166D02
c_3	0x87878F0F	0x0F0F1E1E	0x00078E04
c_4	0x07F80FF0	0x0FF01FE0	0x0007F008
c_5	0xF8000FFF	0xF0001FFF	0x00180010
c_6	0x00000FFF	0xFFFFFE000	0x00000020
c_7	0xFFFFF000	0x00000000	0x00000040
c_S	0xFFFFFFFF	0xFFFFFFFF	0x001FFFFFFF

Tabla 6.2: Máscaras para calcular los c_i .

- Si $c_S = 1$ y además sólo uno de los $c_i = 0$, la línea no contiene errores.
- Caso contrario, la línea contiene errores.

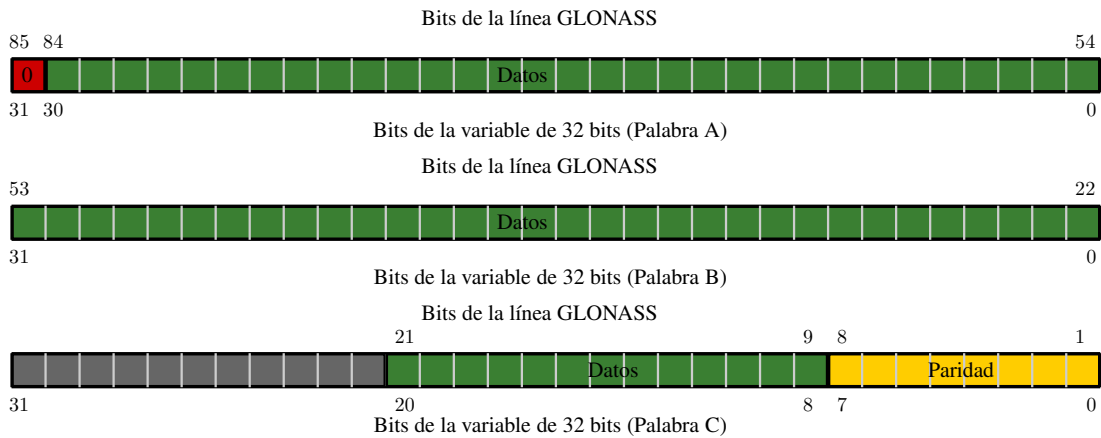


Figura 6.4: Ejemplo de almacenamiento de una línea del mensaje de navegación de GLONASS en tres variables de 32 bits.

Para una implementación en por ejemplo arquitecturas de 32 bits, una opción interesante consiste en almacenar cada línea recibida en 3 variables de 32 bits, que denominaremos *Palabra A*, *Palabra B* y *Palabra C*, como se presenta en la figura 6.4. Esta denominación (así como la distribución de los bits para el almacenamiento) es arbitraria, y no se corresponde con una división de la línea propia del sistema GLONASS.

Con esta elección de almacenamiento, para la obtención de los valores necesarios para el chequeo de paridad, se realiza la operación AND de cada una de las 3 variables de 32 bits con las máscaras que se detallan en la tabla 6.2, luego se realiza la XOR entre las tres variables de 32 bits resultantes de esta operación, y por último la XOR entre los bits de la variable resultante (la operación XOR es asociativa).

6.1.3. Sincronización a Nivel de Subtrama/Trama

Una vez que se consigue el sincronismo de palabra (GPS) ó línea (GLONASS), y se chequea que no existan errores en las palabras/líneas demoduladas, se debe identificar a qué parte de la estructura superior pertenece, a los efectos de armar una Página (GPS) completa (en rigor, para recuperar la información inmediata se requieren solamente las primeras 3 subtramas), ó una Trama (GLONASS) completa (en rigor, para recuperar la información inmediata se requieren solamente las primeras 4 líneas).

GPS

En el caso de GPS, cada palabra no posee un identificador propio. El único identificador es el preámbulo, que se encuentra siempre en la primer palabra (TLM). Esta palabra es siempre la primer palabra de cada subtrama. Por tanto, una vez que se detecta el preámbulo, se detecta también la primer palabra de cada subtrama. Luego el usuario debe llevar la cuenta de las palabras que van llegando a continuación. En la segunda palabra (HOW), se encuentra un campo denotado SFID que identifica la subtrama, como se indica en las tablas 6.3 y 6.4.

Antes de la demodulación de los datos, el receptor debe recibir y almacenar todas las palabras de las primeras tres subtramas, verificando que las mismas correspondan a la misma versión de los datos, para lo cual utiliza los campos IODC e IODE. Por otra parte, el campo TOW de la palabra 2 de cualquier subtrama permite identificar el instante de comienzo de la subtrama siguiente, dentro de la semana GPS. El campo WN, presente en la subtrama 1 (ver tabla 6.3), permite identificar la semana a la que corresponde dicho comienzo. Esto, en conjunto con las mediciones del lazo de seguimiento permite armar el tiempo de transmisión de la señal.

GLONASS

En el caso de GLONASS, cada línea contiene un parámetro que permite identificarla. Antes de la demodulación de los datos, el receptor debe recibir y almacenar las cuatro primeras líneas que forman la Trama. El campo t_k permite determinar a qué momento dentro del día, en la base de tiempo de referencia del sistema GLONASS, corresponde el inicio de la Trama, mientras que el parámetro N_t permite determinar el día de que se trata (ver tablas 6.6 y 6.7). Al igual que en el caso de GPS, esto, en conjunto con las mediciones del lazo de seguimiento permite armar el tiempo de transmisión de la señal.

6.1.4. Parámetros de Interés del Mensaje de GPS

En las subtramas 1 a 3 de cada página se transmiten todos los campos correspondientes a la información inmediata (efemérides y parámetros de corrección de reloj) correspondientes al satélite transmisor. En la tabla 6.3 se describen brevemente estos parámetros, mientras que en la tabla 6.4 se detalla en qué palabra se encuentra cada uno de los parámetros, en qué subtrama se encuentran y cuáles bits ocupa dentro de la subtrama (de acuerdo a la numeración de los bits dada en la figura 6.1, continuando la numeración en el resto de la subtrama hasta el valor 300), el factor de escala que debe aplicarse a cada uno de estos

parámetros, y las dimensiones en las cuales se encuentra expresada la información. Se debe notar que los parámetros que pertenecen a las palabras 1 y 2 forman parte de todas las subtramas.

Parámetro	Descripción
TOW	Tiempo de semana en unidades de 6 segundos, al que corresponde el inicio de la subtrama siguiente.
WN	Número de semanas desde la medianoche del 5 de Enero de 1980 (Noche del 5, mañana del 6), expresado en módulo 1024.
$SFID$	Identificador de la subtrama.
t_{oe}	Tiempo de referencia de las efemérides.
\sqrt{a}	Raíz cuadrada del semieje mayor de la órbita.
e	Excentricidad de la órbita.
i_0	Inclinación del plano orbital al tiempo t_{oe} .
Ω_0	Longitud del nodo ascendente al tiempo t_{oe} .
ω	Argumento de perigeo.
M_0	Anomalía media al tiempo t_{oe} .
di/dt	Variación de la inclinación del plano orbital.
$\dot{\Omega}$	Variación de la longitud del nodo ascendente.
Δn	Corrección del movimiento medio del satélite.
C_{uc}	Amplitud del armónico coseno de corrección del argumento de latitud del satélite.
C_{us}	Amplitud del armónico seno de corrección del argumento de latitud del satélite.
C_{ic}	Amplitud del armónico coseno de corrección de la inclinación del plano orbital del satélite.
C_{is}	Amplitud del armónico seno de corrección de la inclinación del plano orbital del satélite.
C_{rc}	Amplitud del armónico coseno de corrección del radio orbital.
C_{rs}	Amplitud del armónico seno de corrección del radio orbital.
T_{GD}	Retardo de grupo diferencial del satélite.
t_{oc}	Tiempo de referencia de los parámetros de corrección de reloj (a_{f2} , a_{f1} , a_{f0}).
a_{f2}	Coefficiente polinomial de orden 2 de la corrección de reloj del satélite.
a_{f1}	Coefficiente polinomial de orden 1 de la corrección de reloj del satélite.
a_{f0}	Coefficiente polinomial de orden 0 de la corrección de reloj del satélite.
$A1$	Flag de Alerta. Cuando es igual a “1” indica que la precisión (URA) del satélite puede ser peor que el indicado por el parámetro Acc , y que la utilización o no de dicho satélite queda bajo la responsabilidad del usuario.
$A2$	Flag de Anti-spoof. Cuando es igual a “1” indica que el modo Anti-spoof se encuentra habilitado en el satélite transmisor.
Acc	Indicador de la precisión (URA). Ver tabla 6.5.
H	Indicación de salud del satélite transmisor. El MSB indica un resumen del estado de salud de los datos, “0” en este bit indica que todos los datos son correctos, “1” indica que existe algún dato incorrecto.

<i>IODC</i>	Versión de datos de reloj. Indicador del número de versión del conjunto de datos, proveyendo al usuario de una forma conveniente de detección de cambios en los parámetros de corrección.
<i>IODE</i>	Versión de datos de efemérides. Este parámetro tiene 8 bits y coincide con los 8 MSB del IODC. Indica el número de versión de los datos y provee al usuario de una forma conveniente de detección de cambios en los parámetros de efemérides. Como puede verse en la tabla 6.4, el IODC se encuentra en la subtrama 1, mientras que el IODE se encuentra en las subtramas 2 y 3.

Tabla 6.3: Parámetros del mensaje de navegación de GPS.

Parámetro	Número de Bits	Subtrama	Bit dentro de la Subtrama (palabra)	Factor de Escala	Unidades
<i>TOW</i>	17	1...5	31...47 (2)	6	Ver tabla 6.3
<i>WN</i>	10	1	61...70 (3)	1	semanas
<i>SFID</i>	3	1...5	50...52 (2)	1	adimensional
t_{oe}	16	2	271...286 (10)	2^4	segundos
\sqrt{a}	32	2	227...234 (8) 241...264 (9)	2^{-19}	$\sqrt{\text{metros}}$
e	32	2	167...174 (6) 181...204 (7)	2^{-33}	adimensional
i_0	32 (*)	3	137...144 (5) 151...174 (6)	2^{-31}	semicírculos
Ω_0	32 (*)	3	77...84 (3) 91...114 (4)	2^{-31}	semicírculos
ω	32 (*)	3	197...204 (7) 211...234 (8)	2^{-31}	semicírculos
M_0	32 (*)	2	107...114 (4) 121...144 (5)	2^{-31}	semicírculos
di/dt	14 (*)	3	279...292 (10)	2^{-43}	semicírculos/s
$\dot{\Omega}$	24 (*)	3	241...264 (9)	2^{-43}	semicírculos/s
Δn	16 (*)	2	91...106 (4)	2^{-43}	semicírculos/s
C_{uc}	16 (*)	2	151...166 (6)	2^{-29}	radianes
C_{us}	16 (*)	2	211...226 (8)	2^{-29}	radianes
C_{ic}	16 (*)	3	61...76 (3)	2^{-29}	radianes
C_{is}	16 (*)	3	121...136 (5)	2^{-29}	radianes
C_{rc}	16 (*)	3	181...196 (7)	2^{-5}	metros
C_{rs}	16 (*)	2	69...84 (3)	2^{-5}	metros
T_{GD}	8 (*)	1	197...204 (7)	2^{-31}	segundos

t_{oc}	16	1	219 ... 234 (8)	24	segundos
a_{f2}	8 (*)	1	241 ... 248 (9)	2^{-55}	s/s ²
a_{f1}	16 (*)	1	249 ... 264 (9)	2^{-43}	s/s
a_{f0}	22 (*)	1	271 ... 292 (10)	2^{-31}	segundos
$A1$	1	1 ... 5	48 (2)	Ver tabla 6.3	
$A2$	1	1 ... 5	49 (2)	Ver tabla 6.3	
Acc	4	1	73 ... 76 (3)	Ver tabla 6.5	
H	6	1	77 ... 82 (3)	Ver tabla 6.3	
$IODC$	10	1	83 ... 84 (3) 211 ... 218 (8)	Ver tabla 6.3	
$IODE$	8	2	61 ... 68 (3)	Ver tabla 6.3	
	8	3	271 ... 278 (10)		

(*) Indica que el parámetro es con signo.

Tabla 6.4: Características de los parámetros del mensaje de navegación de GPS.

Parámetro Acc	Precisión (URA) [m]
0	$0,00 < URA \leq 2,40$
1	$2,40 < URA \leq 3,40$
2	$3,40 < URA \leq 4,85$
3	$4,85 < URA \leq 6,85$
4	$6,85 < URA \leq 9,65$
5	$9,65 < URA \leq 13,65$
6	$13,65 < URA \leq 24,00$
7	$24,00 < URA \leq 48,00$
8	$48,00 < URA \leq 96,00$
9	$96,00 < URA \leq 192,00$
10	$192,00 < URA \leq 384,00$
11	$384,00 < URA \leq 768,00$
12	$768,00 < URA \leq 1536,00$
13	$1536,00 < URA \leq 3072,00$
14	$3072,00 < URA \leq 6144,00$
15	$6144,00 < URA (*)$

(*) O, ninguna predicción de la precisión disponible.

Tabla 6.5: Interpretación del parámetro A_{cc} .

6.1.5. Parámetros de Interés del Mensaje GLONASS

En las líneas 1 a 4 de cada trama se transmiten todos los campos correspondientes a la información inmediata (efemérides y parámetros de corrección de reloj) correspondientes al satélite transmisor. En la tabla 6.6 se describen brevemente estos parámetros, mientras que en la tabla 6.7 se detalla en qué línea se encuentra cada uno de los parámetros, cuáles bits ocupa dentro de la línea (de acuerdo a la numeración de los bits dada en la figura 6.2), el factor de escala que debe aplicarse a cada uno de estos parámetros, y las dimensiones en las cuales se encuentra expresada la información. En esta tabla se detalla que el parámetro m forma parte de todas las líneas (no es exclusivo de las líneas que nos interesan), y que el parámetro l_n , indicador de estado de operación del satélite se encuentra también presente en las líneas 5, 7, 9, 11, 13 y 15. Esto permite conocer el estado de operación del satélite con una frecuencia mayor que si únicamente se utilizase la información de las primeras cuatro líneas. Por tanto, consideraremos este parámetro también de interés para la solución de navegación.

Parámetro	Descripción
m	Número de línea dentro de la trama.
t_k	Tiempo relativo al comienzo del día actual en la escala de tiempo del satélite. Contiene la cantidad entera de horas, la cantidad entera de minutos, y la cantidad entera de intervalos de 30 segundos; en los 5 bits más significativos, los siguientes 6 bits, y el bit menos significativo, respectivamente.
t_b	Índice de la ventana de tiempo donde son válidos los campos de las efemérides y de corrección de reloj. Todos los parámetros dependientes del tiempo están referidos la mitad del intervalo de tiempo señalado por este índice. La duración de los intervalos de tiempo que cuenta este índice se indica en el campo $P1$. El comienzo del intervalo de tiempo señalado por este índice, medido en relación al comienzo del día se calcula como el valor de t_b multiplicado por la duración indicada por el campo $P1$.
M	Indica la generación a la que pertenece el satélite GLONASS transmisor. “00” señala un satélite de la generación original, mientras que “01” indica un satélite GLONASS-M.
γ	Deriva relativa de la frecuencia de portadora del satélite transmisor respecto del valor nominal en el instante t_b (drift de reloj).
τ	Desviación de la escala del tiempo del satélite transmisor respecto de la hora GLONASS oficial (bias de reloj).
$x(t_b)$	Coordenada x de posición del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$y(t_b)$	Coordenada y de posición del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$z(t_b)$	Coordenada z de posición del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$\dot{x}(t_b)$	Coordenada x de velocidad del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$\dot{y}(t_b)$	Coordenada y de velocidad del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.

$\dot{z}(t_b)$	Coordenada z de velocidad del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$\ddot{x}(t_b)$	Coordenada x de aceleración del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$\ddot{y}(t_b)$	Coordenada y de aceleración del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
$\ddot{z}(t_b)$	Coordenada z de aceleración del satélite transmisor en el instante t_b en el marco PZ-90.
P	Modo de cálculo de la corrección de frecuencia/tiempo. Si P vale “1”, los datos de la corrección fueron calculados por la computadora de a bordo; si P es “0” los datos fueron calculados por el segmento de control del sistema y cargados en el satélite.
N_t	Fecha actual. Es el número de días transcurridos desde el último año bisiesto.
n	Número de índice del satélite transmisor. Se corresponde con el índice del satélite dentro de la constelación GLONASS.
F_t	Indicador de precisión de las mediciones. Ver tabla 6.8.
E_n	Antigüedad de los datos inmediatos desde el momento en que fueron cargados en el satélite contando hasta el instante señalado por t_b . La cuenta está en días.
B_n	Estado de funcionamiento del satélite. Los receptores del segmento de usuario deben verificar el bit más significativo de este código. Si este bit se encuentra en “1” el satélite transmisor está atravesando algún tipo de falla en su funcionamiento. Los equipos de usuario no deben interpretar los bits restantes.
P_1	Duración de los intervalos de tiempo señalados por t_b . Si vale “00” el intervalo son cero minutos. Si “01” son 30 minutos. Si “10” son 45 minutos. Si “11” son 60 minutos.
P_2	Número de actualización del campo t_b . Si vale “1” número par, si vale “0” número impar.
P_3	Si “1” indica que en esta trama se transmiten los almanaques de 5 satélites. Si vale “0” se transmiten sólo 4 almanaques.
P_4	Indica que en la trama actual se transmiten valores actualizados de parámetros de corrección de frecuencia/tiempo.
$\Delta\tau$	Diferencia de tiempo entre la señal de radiofrecuencia transmitida en la banda L2 y la transmitida en la banda L1. $\Delta\tau = \tau_{L2} - \tau_{L1}$.
l_n	Estado de operación del satélite. “1” significa que existe alguna condición de error a bordo, “0” funcionamiento normal.

Tabla 6.6: Parámetros del mensaje de navegación de GLONASS.

Parámetro	Número de Bits	Línea dentro de la Trama	Bit dentro de la línea	Factor de Escala	Unidades
m	4	1...15	81...84	1	adimensional
t_k	12	1	65...76	1	Ver tabla 6.6

t_b	7	2	70...76	15	minutos
M	2	4	9...10	1	adimensional
γ	11	3	69...79	2^{-40}	adimensional
τ	22	4	59...80	2^{-30}	segundos
$x(t_b)$	27	1	9...35	2^{-11}	km
$y(t_b)$	27	2	9...35	2^{-11}	km
$z(t_b)$	27	3	9...35	2^{-11}	km
$\dot{x}(t_b)$	24	1	41...64	2^{-20}	km/s
$\dot{y}(t_b)$	24	2	41...64	2^{-20}	km/s
$\dot{z}(t_b)$	24	3	41...64	2^{-20}	km/s
$\ddot{x}(t_b)$	5	1	36...40	2^{-30}	km/s ²
$\ddot{y}(t_b)$	5	2	36...40	2^{-30}	km/s ²
$\ddot{z}(t_b)$	5	3	36...40	2^{-30}	km/s ²
P	1	3	66	1	adimensional
Nt	11	4	16...26	1	días
n	5	4	11...15	1	adimensional
Ft	4	4	30...33	Ver tabla 6.8	
En	5	4	49...53	1	días
Bn	3	2	78...80	1	adimensional
$P1$	2	1	77...78	1	adimensional
$P2$	1	2	77	1	adimensional
$P3$	1	3	80	1	adimensional
$P4$	1	4	34	1	adimensional
$\Delta\tau$	5	4	54,58	2^{-30}	segundos
ln	1	3 5, 7, 9, 11, 13, 15	65 9	1	adimensional

Tabla 6.7: Parámetros del mensaje de navegación de GLONASS.

Parámetro F_t	Precisión [m]
0	1
1	2
2	2, 5
3	4
4	5
5	7
6	10
7	12
8	14

9	16
10	32
11	64
12	128
13	256
14	512
15	No utilizado

Tabla 6.8: Interpretación del parámetro F_t .

6.2. Armado de Mediciones

6.2.1. Información Provista por los Lazos

Asumiremos una arquitectura de receptor en la cual se cuenta con mediciones de todos los lazos de seguimiento de señal (canales) de manera simultánea, cada 10 ms según la base de tiempos del receptor².

Si bien la disponibilidad de mediciones en esta arquitectura tiene una tasa de 100 Hz, para las tareas de navegación en general es suficiente contar con mediciones con una tasa mucho menor, habitualmente 1 Hz³. Si denotamos con n a cada instante en el que se toman mediciones para navegación, y con subíndice i a cada canal de seguimiento, podemos asumir que las mediciones provistas son las siguientes:

- $M_i[n]$: Número de Milisegundo. Indica el número de milisegundos de tiempo transcurridos desde el último potencial flanco de bit, al instante de toma de medición.
- $C_i[n]$: Número de Chip. Es el número de Chip del código al instante de toma de medición.
- $F_i[n]$: Fase de Código. Es la fracción de Chip del código al instante de toma de medición.
- $D_i[n]$: Doppler de Portadora. Es el valor en el que difiere la frecuencia de la portadora generada en los lazos de portadora de su valor nominal al instante de toma de medición.

Donde se asume que el sincronismo definitivo se realiza en el momento de la demodulación del mensaje, como se describe en la sección 6.2.2. Esto permite unificar las mediciones de

²Un paradigma diferente consiste en sincronizar cada lazo de seguimiento (canal) con los flancos de bits de datos de la señal recibida. En este caso las mediciones no se toman de manera simultánea, y deben extrapolarse a un instante común al momento de realizar el cálculo de la solución de navegación. La implementación de uno u otro depende de las potencialidades del hardware de procesamiento digital de señales. En la implementación descrita en el capítulo 7 se opta por este último paradigma.

³Este valor es un compromiso entre la dinámica esperada de la aplicación y la carga computacional que implican las operaciones de armado y corrección de las mediciones, el cálculo de posición y velocidad de los satélites, y las rutinas de cálculo de posición y velocidad (navegación) de usuario.

los lazos de GPS y GLONASS, y resulta en una implementación más sencilla. En el caso de GLONASS, donde la señalización es Manchester, esta ambigüedad se debe a que una transición en la señal puede corresponder a un flanco de bit, o a un flanco de la señalización Manchester (que ocurre en mitad del tiempo de bit). En el caso de GPS, donde la señalización es NRZ bipolar, la ambigüedad corresponde a un flanco de bit ó a una mitad de bit. Es con respecto a estas marcas temporales, que denominaremos potencial flanco de bit, que se toman las mediciones de los lazos.

6.2.2. Información Provista por las Rutinas de Demodulación de Datos

Al momento de la demodulación del mensaje de navegación se debe resolver la antes mencionada ambigüedad del flanco de bit, determinado si las mediciones de los lazos corresponden a un flanco de bit o a una mitad de flanco de bit. Luego, la detección de la palabra de telemetría (caso GPS) o de la marca de tiempo (caso GLONASS) permite decidir qué posición ocupa el inicio de cada bit con respecto al inicio de la subtrama (caso GPS) o de la línea (caso GLONASS). La demodulación de ciertos campos del mensaje de navegación permite obtener a qué instante (en la base de tiempos del sistema GNSS en cuestión) corresponde el inicio de la subtrama o de la línea. Este último valor, en general se separa en dos, el número de semana (caso GPS) o de día (caso GLONASS) en curso, y el tiempo relativo al inicio de la semana o día respectivo. En base a este segundo parámetro es posible conocer la cantidad de bits transcurridos desde el inicio de la semana (o día) hasta el inicio de la subtrama o línea en curso. Podemos resumir estos valores en los parámetros siguientes:

- $H_i[n]$: Indica si la marca de tiempos con respecto a la cual se tomó la medición etiquetada como n , corresponde a un flanco de bit (en cuyo caso toma el valor 0) o a una mitad de flanco de bit (en cuyo caso toma el valor 1). En otras palabras, indica la cantidad de medios bits desde el inicio del bit hasta el instante de toma de mediciones.
- $B_i[n]$: Indica la cantidad de bits enteros desde el inicio de la subtrama ó línea hasta el instante de toma de mediciones.
- $WB_i[n]$: Indica la cantidad de bits enteros desde el inicio de la semana (en la base de tiempos de GPS) hasta el inicio de la subtrama dentro de la cual se tomaron las mediciones (sólo caso GPS).
- $DB_i[n]$: Indica la cantidad de bits enteros desde el inicio del día (en la base de tiempos de GLONASS) hasta el inicio de la línea dentro de la cual se tomaron las mediciones (sólo caso GLONASS).
- $WN_i[n]$: Número de semana GPS en curso. Este valor se define en función de un instante tomado como inicial por el sistema GPS (sólo caso GPS).
- $DN_i[n]$: Número de día GLONASS en curso. Este valor se define en función de un instante tomado como inicial por el sistema GLONASS (sólo caso GLONASS).

6.2.3. Determinación de los Tiempos de Transmisión

En base a lo descrito en las secciones 6.2.1 y 6.2.2, el tiempo de transmisión de la señal que está siendo seguida en el i -ésimo canal, en el instante de toma de mediciones n resulta, para el caso GPS

$$TT_i[n] = \frac{WB_i[n] + B_i[n]}{50} + \frac{H_i[n]}{100} + \frac{M_i[n]}{1000} + \frac{C_i[n]}{1023 \cdot 1000} + \frac{F_i[n]}{1023 \cdot 1000} \quad (6.18)$$

mientras que para GLONASS

$$TT_i[n] = \frac{DB_i[n] + D_i[n]}{50} + \frac{H_i[n]}{100} + \frac{M_i[n]}{1000} + \frac{C_i[n]}{511 \cdot 1000} + \frac{F_i[n]}{511 \cdot 1000} \quad (6.19)$$

donde las diferentes constantes de división tienen en cuenta las diferentes escalas de cada uno de los parámetros; además del hecho de que en GPS se tienen 1023 chips por milisegundo, mientras que en GLONASS se tienen 511. Estos valores de tiempo de transmisión son relativos al inicio de la semana (o día) en curso.

6.2.4. Armado de los Pseudo-Rangos

Como se describe en 2.7, la medición de pseudo-rango se obtiene a partir del tiempo de transmisión y del tiempo de recepción de la señal. Si definimos como $RT[n]$ al tiempo del receptor en el instante n de toma de mediciones, el pseudo-rango correspondiente a la señal recibida en el i -ésimo canal resulta

$$\rho_i[n] = c (RT_i[n] - TT[n]) \quad (6.20)$$

Si asumimos que las mediciones se toman de manera simultánea en todos los canales, las mediciones de pseudo-rango de todos los satélites en seguimiento corresponderán también al mismo instante. Esto resulta de particular interés para las rutinas de cálculo de posición de usuario, ya que en caso contrario se deberían extrapolar las mediciones para hacerlas coincidir en un instante común.

6.2.5. Armado de los Delta-Rangos

Como se describe en 2.9, las mediciones de delta-rango se relacionan con el desplazamiento Doppler de portadora. En el instante n de toma de mediciones el delta-rango correspondiente a la señal recibida en el i -ésimo canal resulta

$$\dot{\rho}_i[n] = \lambda_i D_i[n] \quad (6.21)$$

donde el valor de λ_i corresponde a la longitud de onda de portadora de la señal asignada al i -ésimo canal. En el caso de GLONASS este valor es función del canal FDMA asignado al satélite que se está recibiendo, mientras que el caso de GPS este valor es igual para todos los satélites.

6.3. Factores de Error en las Mediciones

Las mediciones de los sistemas GNSS que formulamos en la sección 6.2 se encuentran afectadas por una serie de errores que clasificaremos como de naturaleza determinística o de naturaleza aleatoria que redundan en errores en la solución de navegación. Alguno de los errores de naturaleza determinística pueden ser descontados o corregidos en base a la información provista por el segmento de control y/o el modelado de los fenómenos que los originan⁴; mientras que otros errores no podrán descontarse o corregirse y permanecerán como “sesgo” en las mediciones. Por su parte, los errores de naturaleza aleatoria obviamente no pueden ser descontados, y se tratará de reducirlos mediante el diseño adecuado del receptor y mediante técnicas de filtrado estadístico.

Estos errores, que pueden tener su origen en el segmento espacial, en el segmento de usuario o en el medio de propagación de la señal, son básicamente debidos a:

- Errores en los estados de los satélites. Las efemérides o los estados de los satélites transmitidas en el mensaje de navegación son estimaciones de los mismos realizadas por el segmento de control, y por tanto sujetas a error. Derivado de este hecho, la posición y velocidad de cada satélite particular calculadas por el receptor (sección 6.7) no coincide con la posición y velocidad real del satélite, y por tanto aparece un término de error en las ecuaciones (2.14) y (2.25), existiendo un error entre la distancia real y la distancia medida, y entre la velocidad real y la velocidad medida.
- Error en el reloj del satélite. Debido a las inexactitudes de los relojes atómicos a bordo de cada uno de los satélites, la base de tiempos de cada satélite, con respecto a la cual se encuentran etiquetadas las mediciones, no coincide exactamente con la base de tiempo del sistema GNSS en cuestión.
- Efectos relativistas. Existen principalmente tres efectos relativistas que inciden en las mediciones de los sistemas GNSS: la variación de la velocidad del satélite en un marco ECI, el cambio en el potencial gravitatorio (ambos debidos a la excentricidad de la órbita) y el denominado efecto Sagnac. Los primeros dos efectos se traducen en variaciones de la frecuencia de reloj percibida por un observador en tierra, y por tanto se asocian a los efectos de error en el reloj del satélite. El último se relaciona con el hecho de que la formulación del problema de posición se realiza en un marco ECEF, donde no puede asumirse la constancia de la velocidad de la luz, y por tanto se asocia a un error en el pseudo-rango.
- Efectos ionosféricos. La ionósfera, ubicada principalmente en la región de los 70 km y los 1000 km sobre la superficie terrestre, es un medio dispersivo que afecta la propagación de las señales electromagnéticas provenientes de los satélites, lo cual en la frecuencia de los sistemas GNSS se traduce en un retardo en la señal de código (retardo de grupo) y un adelanto en la fase de portadora observadas por el receptor.

⁴Estamos analizando el caso de navegación puntual en tiempo real con sistemas GNSS. En la navegación diferencial o relativa, se utiliza la información provista por otros receptores o estaciones de monitoreo para descontar ciertos errores, aprovechando la correlación espacial de los mismos. En las aplicaciones que permiten hacer post-procesamiento de las mediciones se utiliza información externa más precisa para mejorar la precisión en la solución de navegación obtenida.

- Retardo troposférico. La tropósfera, o parte baja de la atmósfera es un medio no dispersivo para las señales electromagnéticas en la frecuencia de trabajo de los sistemas GNSS lo cual se traduce en un retardo tanto de la señal de código como de la portadora, con respecto a la propagación en el vacío. Este retardo es función del índice de refracción en el camino en el que se propaga la señal, el cual depende de la temperatura, presión atmosférica y humedad relativa locales.
- Ruido en el receptor. Las mediciones realizadas por los lazos del receptor (generalmente un PLL, *Phase Locked Loop*, y un DLL, *Delay Locked Loop*) son estimaciones afectadas por diversos procesos estocásticos como el ruido térmico que afecta a la señal de entrada, el ruido de fase propio del oscilador local y los efectos de cuantización y/o resolución tanto de la señal digitalizada como de las implementaciones digitales de dichos lazos; resultando estas mediciones también procesos aleatorios. En general, los diseños de altas prestaciones buscan disminuir estos efectos mediante una buena figura de ruido en las etapas de RF (Lopez La Valle, 2014), osciladores estables que permiten reducir el ancho de banda de ruido de los lazos de seguimiento, y una adecuada elección de los niveles de cuantización y de la cantidad de bits empleados en el procesamiento digital (asociada a la resolución). En general, estos efectos se modelan como procesos de ruido aditivo blanco y gaussiano, AWGN, que se suman a las mediciones de código y de fase, cada uno de media nula y con una determinada varianza que depende de lo que se caracteriza como la relación de potencia de portadora a densidad espectral de potencia de ruido, C/N_0 , de la señal de entrada.
- *Multipath* y *Shadowing*. Idealmente, en el modelo geométrico utilizado para obtener la solución de navegación en base al TOA, se considera que la señal transmitida por el satélite arriba al receptor recorriendo el camino definido por el segmento de línea recta que los une (rayo directo). El *multipath* o multicamino es la interferencia causada cuando la señal transmitida arriba al receptor por múltiples vías adicionales, proveniente de reflexiones en el entorno cercano a la antena. Así, la señal recibida es la combinación lineal del rayo directo y de estos múltiples caminos, lo que se traduce en degradación de la relación C/N_0 y sesgos en las mediciones. El efecto es función de la geometría satélite-entorno-antena, y por tanto diferente para cada satélite y variante en el tiempo. Dado que es un fenómeno muy difícil de modelar, en general se busca minimizar su impacto mediante diseño de antenas enfocadas a la dirección de arribo del rayo directo⁵, mediante una elección conveniente de la ubicación de la antena o mediante modificaciones en el entorno. Esto último no siempre es posible en vehículos con cambios en la orientación, que provocan cambios en la orientación de la antena receptora, y en los cuales la ubicación de la antena está definida por otras restricciones de diseño; y por tanto se debe convivir con el fenómeno. El *shadowing* consiste en la excesiva atenuación del rayo directo por efecto de los objetos presentes en el camino de propagación. El efecto combinado del *shadowing* y el *multipath* puede provocar que el receptor se enganche con la señal proveniente de un rebote, ocasionando sesgos en las mediciones. Las estrategias para contrarrestar estos efectos son similares las empleadas para contrarrestar el multicamino.

En nuestras aplicaciones, el efecto del error en los estados de los satélites no podrá ser contrarrestado, resultando en una degradación en la precisión de la solución obtenida. Algo

⁵Por ejemplo mediante el empleo de *choke-rings* en las aplicaciones en las que las antenas permanecen siempre orientadas hacia el cielo.

similar ocurre con el efecto de multicamino, en el cual no obstante se pueden implementar tests estadísticos que intenten verificar la consistencia de la solución de navegación con el conjunto de mediciones utilizadas, “filtrando” las mediciones no consistentes.

El error producto del reloj del satélite se corregirá mediante los parámetros informados en el mensaje de navegación. Dado que estos parámetros también son una estimación realizada por el segmento de control, quedará un residuo luego de esta corrección.

Los errores por los efectos relativistas relevantes se corregirán mediante los modelos apropiados, que dan lugar a residuos de error que podemos considerar despreciables. En el caso de los errores producto de la ionósfera y la tropósfera, se implementarán correcciones basadas en modelos de dichos fenómenos que de acuerdo a la correspondencia de los mismos con la realidad, darán lugar a residuos en las mediciones.

Algunas de estas correcciones se realizarán a las mediciones de tiempo de transmisión/frecuencia de portadora y otras a las mediciones de pseudo-rango/delta-rango. La diferencia principal radica en que las correcciones en las mediciones de tiempo de transmisión influyen en el cálculo de los estados del satélite.

6.4. Correcciones en los Tiempos de Transmisión

6.4.1. GPS

Cada satélite GPS transmite en su mensaje de navegación cuatro parámetros de corrección de reloj, denominados a_{f0} , a_{f1} , a_{f2} y t_{oc} (Ver tabla 6.3), donde los tres primeros corresponden a los tres coeficientes de un polinomio, y el cuarto indica el tiempo de referencia de estas correcciones. En base a estos parámetros, la corrección de reloj en un dado instante t relativo al tiempo GPS, está dada por

$$\Delta t_{sv}(t) = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{oc}) + a_{f2}(t - t_{oc})^2 + \Delta t_r \quad (6.22)$$

donde Δt_r es la corrección de reloj por efectos relativistas dada por

$$\Delta t_r = Fe\sqrt{a} \sin E \quad (6.23)$$

donde

$$F = \frac{-2\sqrt{\mu}}{c^2} = -4,442807633 \times 10^{-10} \text{ s}/\sqrt{\text{m}} \quad (6.24)$$

y los parámetros e , \sqrt{a} y E corresponden a la excentricidad, la raíz cuadrada del semi-eje mayor de la órbita y la anomalía excéntrica en el instante de cálculo de la corrección, descritas en 6.7.

Con esta corrección, el tiempo de transmisión medido según la base de tiempo GPS, tt_{GPS} , se obtiene en base al tiempo de transmisión medido según la base de tiempo del satélite, tt_{sv} mediante

$$tt_{GPS} = tt_{sv} - \Delta t_{sv}(tt_{GPS}). \quad (6.25)$$

En esta expresión, la corrección debe aplicarse en el tiempo de transmisión medido según la base de tiempo GPS, es decir, ya corregido, lo que daría lugar a un proceso iterativo. En general, no es necesaria esta iteración, resultando una buena aproximación

$$tt_{GPS} \simeq tt_{sv} - \Delta t_{sv}(tt_{sv}). \quad (6.26)$$

6.4.2. GLONASS

Cada satélite del sistema GLONASS transmite dos parámetros τ y γ que indican la diferencia de tiempo y la diferencia de frecuencia entre la base de tiempo del sistema y la base de tiempo del satélite, al instante t_b (Ver tabla 6.6)

$$\tau = t_{GLO}(t_b) - t_{sv}(t_b) \quad (6.27)$$

$$\gamma = \frac{f_{sv}(t_b) - f_{GLO_k}}{f_{GLO_k}} \quad (6.28)$$

donde f_{GLO_k} es la frecuencia nominal del satélite k .

Dado que estos parámetros ya incluyen las correcciones por efectos relativistas, en un dado instante t , correspondiente al tiempo GLONASS, la corrección de reloj está dada por

$$\Delta t_{sv}(t) = -\tau + \gamma(t - t_b). \quad (6.29)$$

Con esta corrección, el tiempo de transmisión medido según la base de tiempo GLONASS, tt_{GLO} , se obtiene en base al tiempo de transmisión medido según la base de tiempo del satélite, tt_{sv} mediante

$$tt_{GLO} = tt_{sv} - \Delta t_{sv}(tt_{GLO}). \quad (6.30)$$

Al igual que en el caso de GPS, la corrección debe aplicarse en el tiempo de transmisión medido según la base de tiempo GLONASS, es decir, ya corregido, lo que daría lugar a un proceso iterativo. En general, no es necesaria esta iteración, resultando una buena aproximación

$$tt_{GLO} \simeq tt_{sv} - \Delta t_{sv}(tt_{sv}). \quad (6.31)$$

6.5. Correcciones en la Desviación Doppler

Así como la diferencia de la base de tiempo del satélite con respecto a la base de tiempo del sistema da lugar a una corrección en el tiempo de transmisión, la diferencia en la tasa de cambio de esta base de tiempo da lugar a una corrección en la medición de la desviación de frecuencia por efecto Doppler, ya que la frecuencia de portadora que transmite el satélite no es igual a la frecuencia nominal. Una forma de compensar este hecho consiste en aplicar una corrección a la medición de desviación Doppler medida previo a utilizar la expresión (2.19).

6.5.1. GPS

En el caso del sistema GPS, la corrección se obtiene derivando la expresión (6.22)

$$\Delta f_{d_{sv}}(t) = a_{f1} + 2a_{f2}(t - t_{oc}) + \frac{d\Delta t_r}{dt} \quad (6.32)$$

donde

$$\frac{d\Delta t_r}{dt} = Fe\sqrt{a} \cos E \dot{E}. \quad (6.33)$$

Con esta corrección, la desviación de frecuencia por efecto Doppler medida según la base de tiempo GPS, $f_{d_{GPS}}$, se obtiene en base a la desviación de frecuencia por efecto Doppler medida según la base de tiempo del satélite, $f_{d_{sv}}$ mediante

$$f_{d_{GPS}} = f_{d_{sv}} - \Delta f_{d_{sv}}(tt_{GPS}). \quad (6.34)$$

Al igual que en el caso del tiempo de transmisión, resulta una buena aproximación

$$f_{d_{GPS}} \simeq f_{d_{sv}} - \Delta f_{d_{sv}}(tt_{sv}). \quad (6.35)$$

6.5.2. GLONASS

En el caso del sistema GLONASS, la corrección se obtiene derivando la expresión (6.29)

$$\Delta f_{d_{sv}} = \gamma \quad (6.36)$$

que no es función del tiempo.

Con esta corrección, la desviación de frecuencia por efecto Doppler medida según la base de tiempo GLONASS, $f_{d_{GLO}}$, se obtiene en base a la desviación de frecuencia por efecto Doppler medida según la base de tiempo del satélite, $f_{d_{sv}}$ mediante

$$f_{d_{GLO}} = f_{d_{sv}} - \Delta f_{d_{sv}}. \quad (6.37)$$

6.6. Correcciones en los Pseudo-Rangos

6.6.1. Corrección por Retardo Ionosférico

Para las mediciones de código, el efecto de la propagación a través de la ionósfera se observa como un retardo adicional en el tiempo de arribo de la señal, o un incremento del pseudo-rango. La señal se propaga más lentamente que c , con lo cual la medición de tiempo de arribo y por ende el pseudo-rango medido son mayores que los que corresponderían a la distancia satélite-usuario.

Dado que el retardo ionosférico es función de la frecuencia de la señal, en los receptores que operan en doble frecuencia es posible descontar completamente este efecto mediante la

combinación lineal de mediciones tomadas en ambas frecuencias. En los receptores que operan en simple frecuencia la alternativa consiste en emplear algún modelo, que en base a la física del problema intente predecir dicho retardo.

Uno de los modelos más difundidos es del conocido como modelo de Klobuchar, para el cual el sistema GPS transmite 8 parámetros como parte del mensaje de navegación, α_n y β_n con n de 0 a 3, que son los coeficientes de dos funciones cúbicas que representan la amplitud y el período del retardo vertical, respectivamente (GPS, 2014; Tsui, 2005).

Para el cálculo de la corrección se requiere, además de estos coeficientes, contar con una estimación de la latitud y longitud del usuario, ϕ_u y λ_u y de la elevación y azimut de cada satélite k , E_k y A_k , todos medidos en semi-ciclos.

El modelo se basa en definir para cada satélite un punto de intersección de la ionósfera, cuya proyección sobre la superficie terrestre presenta latitud y longitud ϕ_{ik} y λ_{ik} , en semi-ciclos, dadas por

$$\phi_{ik} = \phi_u + \psi_k \cos A_k \quad (6.38)$$

$$\lambda_{ik} = \lambda_u + \frac{\psi_k \sin A_k}{\cos \phi_{ik}} \quad (6.39)$$

donde ψ_k es el ángulo centrado en la Tierra entre la posición del usuario y la proyección sobre la superficie terrestre de dicho punto de intersección (en semi-ciclos), dada por

$$\psi_k = \frac{0,0137}{E_k + 0,11} - 0,022. \quad (6.40)$$

Además, en el modelo, se limita el valor de ϕ_{ik} al intervalo $[-0,416, 0,416]$

$$\phi_{ik} = \begin{cases} \phi_{ik} & \text{si } |\phi_{ik}| \leq 0,416 \\ 0,416 & \text{si } \phi_{ik} > 0,416 \\ -0,416 & \text{si } \phi_{ik} < -0,416 \end{cases} \quad (6.41)$$

En base al valor de ϕ_{ik} se obtiene la latitud geomagnética de la proyección sobre la superficie terrestre del punto de intersección

$$\phi_{mk} = \phi_{ik} + 0,064 \cos(\lambda_{ik} - 1,617). \quad (6.42)$$

En base al valor de ϕ_{mk} y de los coeficientes α_n y β_n transmitidos por el sistema, se obtiene la amplitud AMP_k y el período PER_k del retardo vertical

$$AMP_k = \sum_{n=0}^3 \alpha_n \phi_{mk}^n \quad (6.43)$$

$$PER_k = \sum_{n=0}^3 \beta_n \phi_{mk}^n. \quad (6.44)$$

En el modelo, estos valores se limitan por debajo a los valores 0 y 72000, respectivamente

$$AMP_k = \begin{cases} AMP_k & \text{si } AMP_k \geq 0 \\ 0 & \text{si } AMP_k < 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

$$PER_k = \begin{cases} PER_k & \text{si } PER_k \geq 72000 \\ 72000 & \text{si } PER_k < 72000 \end{cases} \quad (6.46)$$

Además, en base al tiempo GPS, t_{GPS} se obtiene el tiempo local

$$t_k = (4,32 \times 10^4 \lambda_{ik} + t_{GPS}) \text{ mód } 86400 \quad (6.47)$$

donde se emplea la operación módulo, es decir el resto positivo de la división entera para indicar que al valor de t_k se le debe sumar o restar 86400 tantas veces como haga falta para que resulte en el intervalo $[0, 86400)$, es decir el intervalo correspondiente a un día ($86400 = 24 \cdot 3600$).

En base a este valor se obtiene la fase x_k , en radianes

$$x_k = \frac{2\pi(t_k - 50400)}{PER_k} \quad (6.48)$$

donde 50400 corresponde, en segundos, a las 14 horas, local.

Por su parte, en función de la elevación se obtiene el factor de oblicuidad, que tiene en cuenta la diferencia en el retardo entre un satélite ubicado en el azimut y el satélite con la elevación correspondiente

$$F_k = 1 + 16(0,53 - E_k)^3. \quad (6.49)$$

Con estos valores, el retardo por efecto ionosférico se obtiene como

$$T_{k_{iono}} = \begin{cases} F_k \left[5 \times 10^{-9} + AMP_k \left(1 - \frac{x_k^2}{2} + \frac{x_k^4}{24} \right) \right] & \text{si } |x_k| < 1,57 \\ F_k 5 \times 10^{-9} & \text{si } |x_k| \geq 1,57 \end{cases} \quad (6.50)$$

Finalmente, la corrección a aplicar en la medición de pseudo-rango (tanto para GPS como para GLONASS) se obtiene en base al retardo mediante la expresión

$$\Delta\rho_{k_{iono}} = c T_{k_{iono}} \quad (6.51)$$

Cabe aclarar que el valor de retardo dado por (6.50) es válido para la señal de GPS en banda L1. Sin embargo, puede aplicarse a las señales de GLONASS⁶ mediante la relación

$$T_{k_{iono}}^{(GLO)} = \left(\frac{f_{L1}^{(GPS)}}{f_k^{(GLO)}} \right)^2 T_{k_{iono}} \quad (6.52)$$

donde $f_{L1}^{(GPS)}$ es la frecuencia nominal de la señal en banda L1 de GPS, $f_k^{(GLO)}$ es la frecuencia nominal de la señal en banda L1 para el satélite k de GLONASS, y $T_{k_{iono}}$ se obtiene con la aplicación de las fórmulas descriptas previamente. La única salvedad, es que para la aplicación de las fórmulas debe obtenerse el tiempo GPS al que corresponde el tiempo GLONASS en el que se quiere obtener la corrección. Luego, la corrección a aplicar en la medición de pseudo-rango se obtiene de igual modo que en GPS mediante la aplicación de la ecuación (6.51).

⁶GLONASS no transmite parámetros de ningún modelo para la corrección del retardo ionosférico.

6.6.2. Corrección por Retardo Troposférico

El efecto de la tropósfera aparece como un retardo adicional en las mediciones del tiempo de arribo de las señales GNSS, o un incremento en las mediciones de pseudo-rango. Este último está dado por (Subirana *et al.*, 2013)

$$\Delta\rho_{k,tropo} = \int_{\mathbf{s}_k}^{\mathbf{u}} (n - 1) ds = 10^{-6} \int_{\mathbf{s}_k}^{\mathbf{u}} N ds \quad (6.53)$$

donde \mathbf{s}_k y \mathbf{u} representan la posición del k -ésimo satélite y del usuario, respectivamente; n y $N = 10^6(n - 1)$ son el índice de refracción, y la refractividad del medio; y la integral se calcula sobre el camino que une el satélite con el usuario. En general, la refractividad puede descomponerse en una parte hidrostática o “seca” (producto de los diferentes gases que componen la tropósfera como N_2 , O_2 , Ar , etc.) y una parte “húmeda” (producto del vapor de agua).

Además, el retardo depende del camino recorrido en la tropósfera y por tanto modelarse en función del ángulo de elevación del satélite. Un modelo que considera diferentes perfiles para la componente seca y la componente húmeda es el siguiente (Subirana *et al.*, 2013)

$$\Delta\rho_{k,tropo} = (d_d + d_w) M(E_k) \quad (6.54)$$

donde d_d y d_w se calculan en base a la altitud del receptor y estimados de los parámetros meteorológicos: presión P , temperatura T , presión de vapor de agua e , variación de la temperatura β y variación de la presión del vapor de agua λ . El factor de oblicuidad puede calcularse en base a (Subirana *et al.*, 2013)

$$M(E_k) = \frac{1,001}{\sqrt{0,002001 + \sin^2 E_k}} \quad (6.55)$$

es función del ángulo de elevación E_k del satélite.

Por su parte, si no se dispone de sensores meteorológicos, d_d y d_w , pueden modelarse mediante (Subirana *et al.*, 2013)

$$d_d = \left(1 - \frac{\beta H}{T}\right)^{\frac{g}{R_d \beta}} \frac{10^{-6} k_1 R_d P}{g_m} \quad (6.56)$$

$$d_w = \left(1 - \frac{\beta H}{T}\right)^{\frac{(\lambda+1)g}{R_d \beta} - 1} \frac{10^{-6} k_2 R_d}{(\lambda + 1)g_m - \beta R_d} \frac{e}{T} \quad (6.57)$$

donde H es la altura sobre el nivel del mar [m], $k_1 = 77,604$ [K/mbar], $k_2 = 382000$ [K²/mbar], $R_d = 287,054$ [J/(kg K)], $g_m = 9,784$ [m/s²] y $g = 9,80665$ [m/s²].

Los restantes parámetros se obtienen en base a

$$\xi(\varphi, D) = \xi_0(\varphi) - \Delta\xi(\varphi) \cos\left(\frac{2\pi(D - D_{min})}{365,25}\right) \quad (6.58)$$

donde D es el día del año, y

$$D_{min} = \begin{cases} 28 & \text{latitud norte} \\ 211 & \text{latitud sur} \end{cases} \quad (6.59)$$

φ [°]	P_0 [mbar]	T_0 [K]	e_0 [mbar]	β_0 [K/m]	λ_0
15	1013,25	299,65	26,31	$6,30 \times 10^{-3}$	2,77
30	1017,25	294,15	21,79	$6,05 \times 10^{-3}$	3,15
45	1015,75	283,15	11,66	$5,58 \times 10^{-3}$	2,57
60	1011,75	272,15	6,78	$5,39 \times 10^{-3}$	1,81
75	1013,00	263,65	4,11	$4,53 \times 10^{-3}$	1,55

Tabla 6.9: Valores promedio de los parámetros utilizados para el cálculo del retardo troposférico.

φ [°]	ΔP [mbar]	ΔT [K]	Δe [mbar]	$\Delta \beta$ [K/m]	$\Delta \lambda$
15	0,00	0,00	0,00	$0,00 \times 10^{-3}$	0,00
30	-3,75	7,00	8,85	$0,25 \times 10^{-3}$	0,33
45	-2,25	11,00	7,24	$0,32 \times 10^{-3}$	0,46
60	-1,75	15,00	5,36	$0,81 \times 10^{-3}$	0,74
75	-0,50	14,50	3,39	$0,62 \times 10^{-3}$	0,30

Tabla 6.10: Variación de los parámetros utilizados para el cálculo del retardo troposférico.

lo cual contempla las variaciones en las estaciones entre ambos hemisferios.

Los parámetros $\xi_0(\varphi)$ y $\Delta\xi(\varphi)$, donde φ indica la latitud (en valor absoluto) y ξ debe interpretarse como uno de los parámetros P , T , e , β ó λ , se obtienen interpolando linealmente los valores dados en las tablas 6.9 y 6.10 (salvo que $\varphi < 15^\circ$ ó $\varphi > 75^\circ$, en cuyo caso se toman los valores extremos tabulados).

6.6.3. Corrección por Efecto Sagnac

Si denotamos con t_k y $\mathbf{s}_k(t_k)$ al tiempo en el que la señal es transmitida por el k -ésimo satélite y su ubicación en este instante, respectivamente; y con t_u y $\mathbf{u}(t_u)$ al tiempo en el que la señal es recibida por el usuario y su ubicación en este instante, respectivamente, la ecuación

$$c(t_u - t_k) = \|\mathbf{s}_k(t_k) - \mathbf{u}(t_u)\| \quad (6.60)$$

se basa en la constancia de la velocidad de la luz y por tanto resulta válida únicamente si el marco de referencia utilizado es un marco inercial (Ashby, 1995). En nuestra formulación del problema, utilizamos como referencia un marco no inercial: el marco ECEF (de hecho es el marco en el que resulta más sencillo obtener la posición de los satélites en base a la información transmitida por los sistemas GNSS). Si tomamos un marco ECI que coincida con el marco ECEF en el instante t_k , la ecuación (6.60) puede reescribirse como

$$c(t_u - t_k) = \|\mathbf{s}_k^e(t_k) - (\mathbf{u}^e(t_u) + \Delta\mathbf{u})\| \quad (6.61)$$

donde $\mathbf{u}^e(t_u)$ y $\mathbf{s}_k^e(t_k)$ denota la ubicación del usuario y del satélite en los instantes correspondientes. Debido a la elección del marco ECI, $\mathbf{s}_k^e(t_k) = \mathbf{s}_k(t_k)$. Por otra parte, en el

instante t_u , el marco ECEF ya no coincide con el marco ECI elegido y por tanto expresamos $\mathbf{u}(t_u) = \mathbf{u}^e(t_u) + \Delta\mathbf{u}$. El vector $\Delta\mathbf{u}$, mide la variación entre la ubicación del usuario en el marco ECI en el instante t_k (coincidente con el ECEF) y su ubicación en el instante t_u , lo cual se debe a la rotación del marco ECEF en este intervalo temporal, y puede aproximarse mediante

$$\Delta\mathbf{u} \simeq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^e(t_u) (t_u - t_k) \quad (6.62)$$

y además, denotando con $\mathbf{r}_k \triangleq \mathbf{s}_k^e(t_k) - \mathbf{u}^e(t_u)$ (vector de rango geométrico medido en el marco ECEF) la ecuación (6.61) puede aproximarse mediante

$$c(t_u - t_k) \simeq \|\mathbf{r}_k\| + \mathbf{r}_k' \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (6.63)$$

donde se observa que la ecuación tiene la misma forma que la que utilizábamos como ecuación de pseudo-rango (ecuación (2.14)); el término a la izquierda es nuestra medición de tiempo de viaje de la señal, mientras que el primer término a la derecha es la distancia geométrica. Denotamos al segundo término como “corrección” del pseudo-rango por efecto Sagnac

$$\Delta\rho_{ksag} = \mathbf{r}_k' \cdot \Delta\mathbf{u} = \mathbf{r}_k' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^e(t_u) (t_u - t_k)). \quad (6.64)$$

Finalmente, si se desprecia la corrección en (6.63), puede reemplazarse el factor $(t_u - t_k)$ en (6.64), resultando

$$\Delta\rho_{ksag} = \frac{\|\mathbf{r}_k\|}{c} [\mathbf{r}_k' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^e(t_u))] . \quad (6.65)$$

Por supuesto, para obtener esta corrección se debe contar con una estimación de la posición del usuario en el instante t_u . Dado que no se requiere que esta estimación sea muy precisa, en la práctica puede utilizarse la posición del usuario obtenida en la solución de navegación previa. Aplicando esta corrección al pseudo-rango medido, se llega a la formulación del problema tal como lo planteamos originalmente

$$c(t_u - t_k) - \Delta\rho_{ksag} = \|\mathbf{r}_k\|. \quad (6.66)$$

El efecto Sagnac es, en definitiva, un producto de la elección del marco ECEF para la formulación del problema de navegación, mientras que la constancia de la velocidad de la luz sólo puede asegurarse en un marco ECI. Una alternativa para eliminar este efecto, descrita en Weiss y Ashby (1998), consiste en definir un marco ECI, transformar las posiciones de los satélites a dicho marco, resolver el problema de navegación, y luego transformar la posición de usuario obtenida al marco ECEF.

6.7. Cálculo de Estados de los Satélites

Para el cálculo de la solución de navegación resulta necesario conocer la posición y velocidad de cada uno de los satélites de los sistemas GNSS involucrados. Esta información en general se refiere como variables de estado de los satélites, vector de estado del satélite, ó directamente como estado del satélite. Es fundamental resaltar que el estado de cada satélite debe conocerse (calcularse) en los instantes que corresponden al tiempo de transmisión de la señal de cada uno de ellos, que es diferente para cada satélite. El estado debe conocerse

en el mismo marco de referencia en el cual se quiere obtener la solución de navegación de usuario. En general un sistema de referencia no inercial, fijo en la Tierra y centrado en la Tierra (sistema ECEF).

La predicción de la órbita de cada satélite es una prerrogativa del segmento de control del sistema GNSS. Cada satélite transmite luego al usuario información referida a su propia órbita como parte del mensaje de navegación, analizado en las secciones 6.1.4 y 6.1.5. Como se puede ver en dichas secciones, el sistema GPS y el sistema GLONASS utilizan parámetros diferentes para la descripción de la órbita.

El sistema GPS transmite los parámetros orbitales keplerianos⁷, denominados *efemérides* del satélite. Estos parámetros permiten, resolviendo la ecuación de órbita, obtener los estados de cada satélite particular. Dado que el movimiento orbital se encuentra sometido a diversas perturbaciones, esta información (la predicción de órbita) tiene un determinado período de validez. Por esto, la información contenida en el mensaje de navegación se actualiza cada un determinado período de tiempo (nominalmente, 2 horas).

El sistema GLONASS transmite los estados predichos de posición, velocidad y aceleración de cada satélite correspondientes a un instante particular, indicado por el sistema. La obtención de los estados en otro instante se realiza resolviendo numéricamente la ecuación diferencial que describe el movimiento orbital, utilizando esta información provista como condiciones iniciales. En esta resolución se asume que la aceleración se mantiene constante, por lo cual esta información tiene un acotado período de validez (nominalmente, 30 minutos).

6.7.1. Estados de los Satélites de GPS

En base a los parámetros *pseudo-keplerianos* que describen la órbita de cada satélite, y que se presentan en la tabla 6.3, la obtención de los estados en coordenadas ECEF, para un dado satélite y para un instante t particular es muy similar a la descripta en el apéndice A.

En primer lugar se obtiene el movimiento medio corregido, n , en base a

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n \quad (6.67)$$

donde se toma el valor de $\mu = 398600,5 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}^2$ como constante gravitacional de la Tierra, según WGS-84, y el semieje mayor a se obtiene simplemente elevando al cuadrado el dato transmitido de la raíz del mismo.

En base al movimiento medio y la anomalía media de referencia al tiempo t_{oe} , la anomalía media al tiempo t está dada por

$$M = M_0 + n (t - t_{oe}) \quad (6.68)$$

la cual se relaciona con la anomalía excéntrica, E , mediante la ecuación de Kepler

$$M = E - e \sin(E) \quad (6.69)$$

⁷En rigor, la denominación de *keplerianos* es correcta al hablar de una órbita sin perturbaciones, mientras que en las efemérides se incluyen términos que dan cuenta de las perturbaciones a la órbita; y quizás una denominación más exacta sería parámetros *pseudo-keplerianos*.

que como se menciona en el apéndice A es una ecuación trascendental que debe resolverse por algún método iterativo. Por su parte, la anomalía excéntrica se relaciona con la anomalía real ν mediante las siguientes ecuaciones

$$\cos(\nu) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cos(E)} \quad (6.70)$$

$$\sin(\nu) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cos(E)}. \quad (6.71)$$

Por otra parte, el argumento de latitud, ϕ , está dado por la suma del argumento de perigeo y de la anomalía real

$$\phi = \nu + \omega. \quad (6.72)$$

Las correcciones del argumento de latitud, del radio y de la inclinación, respectivamente, se obtienen a partir de los factores de corrección de la siguiente manera

$$\delta\phi = C_{us} \sin(2\phi) + C_{uc} \cos(2\phi) \quad (6.73)$$

$$\delta r = C_{rs} \sin(2\phi) + C_{rc} \cos(2\phi) \quad (6.74)$$

$$\delta i = C_{is} \sin(2\phi) + C_{ic} \cos(2\phi). \quad (6.75)$$

Con estos valores, el argumento de latitud corregido, u , el radio orbital corregido, r , y la inclinación corregida, i , resultan

$$u = \phi + \delta\phi \quad (6.76)$$

$$r = a(1 - e \cos(E)) + \delta r \quad (6.77)$$

$$i = i_0 + \frac{di_0}{dt}(t - t_{oe}) + \delta i. \quad (6.78)$$

La longitud del nodo ascendente corregida, resulta

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega}_0 - \dot{\Omega}_e)(t - t_{oe}) \quad (6.79)$$

donde $\dot{\Omega}_e = 7,2921151467 \times 10^{-5}$ rad/s, es la velocidad de rotación de la Tierra, según WGS-84.

Las coordenadas de posición del satélite en su plano orbital pueden obtenerse a partir de

$$x_p = r \cos(u) \quad (6.80)$$

$$y_p = r \sin(u). \quad (6.81)$$

Finalmente, la posición del satélite en coordenadas ECEF, resulta

$$x = x_p \cos(\Omega) - y_p \cos(i) \sin(\Omega) \quad (6.82)$$

$$y = x_p \sin(\Omega) + y_p \cos(i) \cos(\Omega) \quad (6.83)$$

$$z = y_p \sin(i). \quad (6.84)$$

Derivando estas últimas expresiones, es posible obtener un juego de ecuaciones que describe la velocidad del satélite. A partir de (6.68) y (6.69) se puede ver que

$$\dot{M} = n[1 - e \cos(E)]\dot{E}. \quad (6.85)$$

Derivando (6.70), se puede ver que

$$\cos(\nu) \dot{\nu} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos(\nu) \dot{E}}{1-e\cos(E)}. \quad (6.86)$$

También de (6.70), se puede ver que

$$1 + e \cos(\nu) = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos(E)}. \quad (6.87)$$

Reemplazando (6.87) en (6.85) y luego este resultado en (6.86), se llega a

$$\dot{\nu} = \frac{n (1 + e \cos(\nu))^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.88)$$

A partir de (6.72), despreciando la variación temporal de ω , se puede decir

$$\dot{\phi} = \dot{\nu}. \quad (6.89)$$

Derivando (6.73), (6.74) y (6.75) se obtiene

$$\dot{\delta\phi} = 2\phi (C_{us} \cos(2\phi) + C_{uc} \sen(2\phi)) \quad (6.90)$$

$$\dot{\delta r} = 2\phi (C_{rs} \cos(2\phi) + C_{rc} \sen(2\phi)) \quad (6.91)$$

$$\dot{\delta i} = 2\phi (C_{is} \cos(2\phi) + C_{ic} \sen(2\phi)). \quad (6.92)$$

Derivando (6.77) se obtiene

$$\dot{r} = a e \sen(E) \dot{E} + \dot{\delta r}. \quad (6.93)$$

Utilizando (6.85) y (6.71), se puede reescribir como

$$\dot{r} = \frac{a e n \sen(\nu)}{\sqrt{1-e^2}} + \dot{\delta r}. \quad (6.94)$$

A partir de (6.76) y (6.78), se obtienen la derivada del argumento de latitud corregido y del argumento de inclinación corregido

$$\dot{u} = \dot{\phi} + \dot{\delta\phi} \quad (6.95)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_0}{dt} + \dot{\delta i}. \quad (6.96)$$

Derivando (6.80) y (6.81), se obtiene

$$\dot{x}_p = \dot{r} \cos(u) - y_p \dot{u} \quad (6.97)$$

$$\dot{y}_p = \dot{r} \sen(u) + x_p \dot{u}. \quad (6.98)$$

Además, derivando (6.79) se obtiene

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_0 - \dot{\Omega}_e. \quad (6.99)$$

Y definiendo las variables auxiliares

$$q_a \triangleq \dot{x}_p - y_p \cos(i) \dot{\Omega} \quad (6.100)$$

$$q_b \triangleq x_p \dot{\Omega} + \dot{y}_p \cos(i) - z \frac{di}{dt} \quad (6.101)$$

se llega finalmente a las expresiones que determinan la velocidad del satélite en coordenadas ECEF

$$\dot{x} = q_a \cos(\Omega) - q_b \sin(\Omega) \quad (6.102)$$

$$\dot{y} = q_a \sin(\Omega) + q_b \cos(\Omega) \quad (6.103)$$

$$\dot{z} = \dot{y}_p \sin(i) + y_p \cos(i) \frac{di}{dt}. \quad (6.104)$$

Debe notarse que las ecuaciones (6.82), (6.83), (6.84), (6.102), (6.103) y (6.104), así como las demás necesarias para el cálculo, permiten obtener la posición y velocidad de un dado satélite GPS en un dado instante t (en general, el tiempo de transmisión de la señal). Para obtener una solución de navegación particular, este cálculo debe repetirse para cada uno de los satélites involucrados (con sus parámetros de efemérides correspondientes), en cada caso en el instante t que corresponda.

6.7.2. Estados de los Satélites de GLONASS

En el caso del sistema GLONASS, el mensaje de navegación en lugar de contener los parámetros orbitales como en el caso de GPS, contiene las tres coordenadas de posición, las tres coordenadas de velocidad y las tres coordenadas de aceleración (debidas a las atracciones de la Luna y el Sol) del satélite en un sistema de referencia ECEF⁸, en un instante determinado (Ver tabla 6.6).

Esta información se actualiza nominalmente cada 30 minutos y se encuentra referida (t_b) al centro de este intervalo de 30 minutos. Así, la utilización adecuada de los datos sería en el intervalo ($t_b - 15 \text{ min}, t_b + 15 \text{ min}$). Para obtener los estados del satélite en algún otro instante perteneciente a este intervalo se deben integrar las ecuaciones de movimiento del satélite, utilizando los valores dados como condiciones iniciales.

Considerando el potencial gravitatorio de la Tierra como el de una masa puntual más un término de su desarrollo en serie de armónicos esféricos, y considerando además que el aporte de las fuerzas de atracción gravitatoria de la luna y el sol permanecen constantes durante el

⁸En GLONASS, se toma como sistema de referencia ECEF el sistema PZ-90.02, que si bien similar, no es idéntico al sistema de referencia utilizado por GPS. En el presente capítulo cuando hagamos alusión a los estados (posición y velocidad) de un satélite de GPS, se sobreentenderá que estos estados corresponden al sistema de referencia del sistema GPS y cuando hagamos alusión a los estados de un satélite de GLONASS se sobreentenderá que estos estados corresponden al sistema de referencia del sistema GLONASS. En caso de utilizarse datos de ambos sistemas en conjunto, deberá elegirse un sistema de referencia como principal y referir las coordenadas del otro sistema a éste, como veremos más adelante.

intervalo de interés, las aceleraciones que actúan sobre el satélite están dadas por

$$\ddot{x}^i = -\frac{\mu}{r^3}x + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2x(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{x} \quad (6.105)$$

$$\ddot{y}^i = -\frac{\mu}{r^3}y + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2y(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{y} \quad (6.106)$$

$$\ddot{z}^i = -\frac{\mu}{r^3}z + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2z(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{z}. \quad (6.107)$$

Estas expresiones resultan válidas en un marco de referencia inercial. Para plantear la solución en un marco de referencia ECEF, se deben tener en cuenta las rotaciones existentes entre ambos sistemas dadas por los movimientos de rotación, nutación y precesión terrestres. No obstante, en un intervalo pequeño de integración, los únicos efectos apreciables son la rotación terrestre y las fuerzas de Coriolis causadas por esta rotación. En el marco de referencia ECEF, las aceleraciones resultan (ver capítulo 3)

$$\ddot{x}^e = \ddot{x}^i + \omega_E^2 x^e + 2\omega_E \dot{y}^e \quad (6.108)$$

$$\ddot{y}^e = \ddot{y}^i + \omega_E^2 y^e - 2\omega_E \dot{x}^e \quad (6.109)$$

$$\ddot{z}^e = \ddot{z}^i. \quad (6.110)$$

Expresadas como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones que describen el movimiento satelital en el marco ECEF resultan

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (6.111)$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (6.112)$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (6.113)$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2x(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{x} + \omega_E^2 x + 2\omega_E \dot{y} \quad (6.114)$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3}y + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2y(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{y} + \omega_E^2 y - 2\omega_E \dot{x} \quad (6.115)$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}z + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu}{r^5}a_e^2z(1 - 5\frac{z^2}{r^2}) + \ddot{z} \quad (6.116)$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.117)$$

x , y , y z denotan las coordenadas de posición del satélite; \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} denotan las coordenadas de velocidad del satélite; \ddot{x} , \ddot{y} y \ddot{z} denotan las coordenadas de aceleración producida por la atracción gravitatoria del Sol y la Luna; todas ellas referidas al marco ECEF. Además, $\mu = 3,9860044 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ indica la constante de gravitación terrestre; $a_E = 6378136 \text{ m}$ indica el semi-eje mayor de la Tierra; $c_{20} = -1,08263 \times 10^{-3}$ indica el segundo armónico zonal del geopotencial gravitatorio; y $\omega_E = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ indica la velocidad angular de rotación de la Tierra; todos ellos según definición PZ-90.02.

Para determinar la posición del satélite en un instante determinado se debe resolver este sistema de ecuaciones diferenciales tomando como valores iniciales las tres coordenadas

de posición, velocidad y aceleración recibidas en el mensaje de navegación. Dado que esta resolución no se puede llevar a cabo de forma analítica, se debe implementar un método de resolución numérica. El ICD de GLONASS (GLONASS, 2008) recomienda utilizar el método de Runge-Kutta de orden cuatro. En Roßbach (2000) se describe de manera detallada como resultan los algoritmos al aplicar este método al caso de las ecuaciones (6.111), (6.112), (6.113), (6.114), (6.115) y (6.116).

6.8. Solución Puntual de Posición

Uno de los métodos que permite resolver de manera cerrada el problema de determinación de la posición con un sistema GNSS, descrito en la sección 2.5, es el denominado método de Bancroft, presentado en Bancroft (1985), que describiremos someramente a continuación.

A partir de la ecuación (2.7), que relaciona la posición del usuario \mathbf{u} con la posición del satélite i -ésimo, \mathbf{s}_i en un mismo marco de referencia espacial; que se repite por simplicidad

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{u} \quad (6.118)$$

puede obtenerse

$$\|\mathbf{r}_i\|^2 = \mathbf{r}_i' \mathbf{r}_i = \|\mathbf{s}_i\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - 2\mathbf{s}_i' \mathbf{u}. \quad (6.119)$$

Por otra parte, en base a la definición de pseudo-rango, ecuación (2.14), se obtiene

$$\|\mathbf{r}_i\| = \rho_i - b \quad (6.120)$$

de donde se llega a

$$\|\mathbf{r}_i\|^2 = \rho_i^2 + b^2 - 2\rho_i b. \quad (6.121)$$

En base a (6.119) y (6.121) se obtiene

$$\mathbf{s}_i' \mathbf{u} - \rho_i b = \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \rho_i^2 - b^2}{2} \quad (6.122)$$

que puede escribirse en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_i' & \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -b \end{bmatrix} = \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 - \rho_i^2 - b^2}{2}. \quad (6.123)$$

Definiendo

$$\lambda \triangleq \frac{\|\mathbf{u}\|^2 - b^2}{2} \quad (6.124)$$

$$c_i \triangleq \frac{\|\mathbf{s}_i\|^2 - \rho_i^2}{2} \quad (6.125)$$

$$\mathbf{a}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \rho_i \end{bmatrix} \quad (6.126)$$

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -b \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

la ecuación (6.123) puede escribirse

$$\mathbf{a}'_i \mathbf{x} = \lambda + c_i. \quad (6.128)$$

Si se tienen M satélites de posición conocida, para los cuales es posible obtener mediciones de pseudo-rango, se cuenta con M ecuaciones de la forma (6.128). Si definimos

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}'_1 & \rho_1 \\ \mathbf{s}'_2 & \rho_2 \\ \vdots & \\ \mathbf{s}'_M & \rho_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_M \end{bmatrix} \quad (6.129)$$

$$\mathbf{c} \triangleq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix}. \quad (6.130)$$

Resulta un sistema de M ecuaciones con 4 incógnitas (las tres coordenadas de posición y el factor debido al sesgo del reloj local), reunidas en el vector \mathbf{x}

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{1}_{M \times 1} + \mathbf{c} \quad (6.131)$$

donde $\mathbf{1}_{M \times 1}$ es una matriz de $M \times 1$ (vector columna en este caso) con todos sus elementos iguales a 1.

Para que el sistema pueda resolverse, se debe contar con un número mínimo de 4 ecuaciones, o cuatro mediciones, tal como se analizó en la sección 2.5. En general, si se cuenta con más de 4 mediciones, la matriz \mathbf{A} no resulta cuadrada, y el sistema de ecuaciones puede resolverse mediante lo que se conoce como pseudo-inversa

$$\mathbf{A}^\# \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (6.132)$$

que puede obtenerse de la siguiente manera

$$\mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \quad (6.133)$$

con lo cual la ecuación (6.131) resulta

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{A}^\# \mathbf{1}_{M \times 1} + \mathbf{A}^\# \mathbf{c}. \quad (6.134)$$

Definiendo

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{A}^\# \mathbf{1}_{M \times 1} \quad (6.135)$$

$$\mathbf{w} \triangleq \mathbf{A}^\# \mathbf{c} \quad (6.136)$$

la ecuación (6.134) resulta

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}. \quad (6.137)$$

Analizando esta última ecuación, puede verse que los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} dependen de las posiciones de los satélites y de las mediciones de pseudo-rango (ver las definiciones de \mathbf{a}_i y c_i , ecuaciones (6.125) y (6.126)). Sin embargo, el factor λ depende de la solución \mathbf{x} de dicha ecuación (ver ecuación (6.124)). Definiendo

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.138)$$

es posible plantear

$$\mathbf{x}'\beta\mathbf{x} = \|\mathbf{u}\|^2 - b^2 = 2\lambda. \quad (6.139)$$

Por otra parte, a partir de (6.137)

$$\mathbf{x}'\beta\mathbf{x} = (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{w})' \beta (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda^2 \mathbf{v}'\beta\mathbf{v} + 2\lambda \mathbf{v}'\beta\mathbf{w} + \mathbf{w}'\beta\mathbf{w}. \quad (6.140)$$

Luego, combinando las ecuaciones (6.139) y (6.140) se llega a la siguiente ecuación cuadrática en λ

$$\lambda^2 \mathbf{v}'\beta\mathbf{v} + \lambda 2 (\mathbf{v}'\beta\mathbf{w} - 1) + \mathbf{w}'\beta\mathbf{w} = 0. \quad (6.141)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática se obtienen dos soluciones λ_1 y λ_2 . Luego, reemplazando cada una de ellas en la ecuación (6.137) se obtienen dos posibles soluciones

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad (6.142)$$

$$\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{v} + \mathbf{w}. \quad (6.143)$$

Sin embargo, sólo una de estas soluciones es la solución real al problema original (hallar las soluciones de posición y sesgo en base a las mediciones de pseudo-rango). Si se analiza el planteo matemático se puede relacionar la aparición de una segunda solución con el hecho de que se elevan al cuadrado las ecuaciones (ver ecuaciones (6.119) y (6.121)). Existen varios criterios que pueden ser utilizados para eliminar esta segunda solución, o solución ficticia

- **Criterio Geométrico**

Si se conoce que la solución de posición debe corresponder a alguna región particular, por ejemplo la superficie terrestre o sus cercanías, en general puede descartarse la solución ficticia por no cumplir con esta restricción.

- **Valor de sesgo**

En general, el tiempo de receptor se obtiene en base a alguno de los tiempos de transmisión más algún valor que corresponde al valor esperado de retardo entre los satélites de la constelación y un usuario (considerando el máximo retardo posible, dado por un satélite en el horizonte; y el mínimo retardo posible, dado por un satélite en el azimut), con lo cual el valor de sesgo que corresponde a la solución verdadera es esperable que se encuentre dentro de un determinado intervalo. En general puede descartarse la solución ficticia por no cumplir esta restricción.

- **Residuos**

Con cada una de las soluciones \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 se obtienen, en base a las ecuaciones (6.118) y (6.120), las mediciones de pseudo-rango que corresponden a cada una de estas soluciones, que denominaremos $\rho_i^{(1)}$ y $\rho_i^{(2)}$. Con cada uno de estos juegos de valores, y las verdaderas mediciones de pseudo-rango, se obtienen lo que denominaremos residuos de pseudo-rango ξ_1 y ξ_2

$$\xi_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\rho_i^{(1)} - \rho_i \right)^2} \quad (6.144)$$

$$\xi_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\rho_i^{(2)} - \rho_i \right)^2} \quad (6.145)$$

Dado que la solución ficticia no resuelve el problema original, los residuos para esta solución serán en general mayores que para la solución real. El criterio consiste en seleccionar la solución que presente un valor menor del residuo.

6.9. Solución Puntual de Posición con más de un Sistema GNSS

6.9.1. Formulación

Cuando utilizemos mediciones de pseudo-rango de más de un sistema GNSS, adoptaremos la notación

$$\rho_i^\alpha = \|\mathbf{r}_i\| + b^\alpha \quad (6.146)$$

$$\rho_i^\beta = \|\mathbf{r}_i\| + b^\beta \quad (6.147)$$

$$\rho_i^\gamma = \|\mathbf{r}_i\| + b^\gamma \quad (6.148)$$

donde el superíndice α , β ó γ se utiliza para indicar que las mediciones corresponden a un dado sistema GNSS.

En caso que las bases temporales de los diferentes sistemas GNSS no se encuentren sincrónicas, las incógnitas b^α , b^β y b^γ serán diferentes. Tal como se analiza en (Cogo *et al.*, 2012), existen al menos tres casos “límite” en los que resulta de interés analizar la solución conjunta de posición combinando mediciones de más de un sistema:

- **Caso I:** Si se cuenta con 4 mediciones de un mismo sistema es posible obtener la solución puntual con el método descrito en la sección 6.8. En este caso, si se cuenta con alguna medición de otro sistema, puede obtenerse el sesgo correspondiente en base a la ecuación que relaciona dicha medición con la solución de posición previamente obtenida y con el sesgo incógnita de este sistema.
- **Caso II:** Si se cuenta con 3 mediciones de un sistema, y 2 mediciones de otro sistema, se tienen 5 ecuaciones con cinco incógnitas (las tres coordenadas de posición y los dos valores de sesgo). Nuevamente, si se tiene una medición adicional de un tercer sistema puede obtenerse el sesgo a partir de la misma, y la solución de posición obtenida.

- **Caso III:** Si se cuenta con 2 mediciones de tres sistemas diferentes, se tienen 6 ecuaciones con seis incógnitas (las tres coordenadas de posición y los tres valores de sesgo).

Puede analizarse que cualquier otro caso de más mediciones por sistema puede reducirse a alguno de los tres casos analizados. De igual manera, en caso de contar con menos mediciones no es posible hallar la solución de posición.

6.9.2. Disponibilidad de Mediciones

Un aspecto que resulta interesante analizar cuando se formula la solución de posición conjunta con más de un sistema GNSS, consiste en la disponibilidad de mediciones de cada sistema en una situación particular dada.

Para analizar este hecho recurrimos a un escenario de simulación con las siguientes consideraciones:

- Se toman constelaciones típicas de los sistemas GPS y GLONASS definidas por una realización de sus almanaques. Se toma una constelación ideal del sistema Galileo definida por 27 satélites distribuidos uniformemente en 3 planos orbitales, cuyas ascensiones rectas del nodo ascendente difieren en $\frac{2\pi}{3}$ radianes, con inclinación, excentricidad y semi-eje mayor nominales.
- Se toman 10000 corridas de simulación. Para cada corrida se toma de manera aleatoria (con distribución uniforme) un instante en el intervalo de tiempo correspondiente a una semana. Esto resulta importante, ya que el estado de las constelaciones dependen del instante elegido (y por ende la geometría de satélites vistos desde un determinado punto o posición de usuario). En cada instante se toma una posición de usuario en la superficie terrestre con un ángulos de longitud λ y latitud ϕ aleatorios e independientes, con funciones de densidad de probabilidad⁹ $f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}$, $f_{\Phi}(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{2} \frac{1}{\pi}$. De esta manera, se asegura que las posiciones de usuario se encuentren distribuidas de manera aproximadamente uniforme sobre la superficie terrestre (la distribución sería uniforme si la Tierra fuese perfectamente esférica).
- Para cada corrida se calculan los estados de posición de los satélites GNSS. En base a diferentes máscaras de elevación se obtienen los satélites visibles de cada constelación. En base a la visibilidad de satélites se analiza la disponibilidad de mediciones de cada sistema y la factibilidad de obtener solución de posición contemplando los tres casos analizados previamente.

En la figura 6.5 se presentan los resultados de probabilidad de obtener solución de posición (considerando que de todo satélite visible se obtiene una medición de pseudo-rango) con los diferentes casos analizados previamente, y considerando diferentes máscaras de elevación para la visibilidad de satélites.

En la figura superior izquierda se analiza la factibilidad o probabilidad de obtener solución de posición mediante el denominado Caso I (esto es, al menos cuatro mediciones de un mismo

⁹La variable ϕ se obtiene mediante $\phi = \cos^{-1}(u) - \pi/2$, donde $u \sim \mathcal{U}(-1, 1]$.

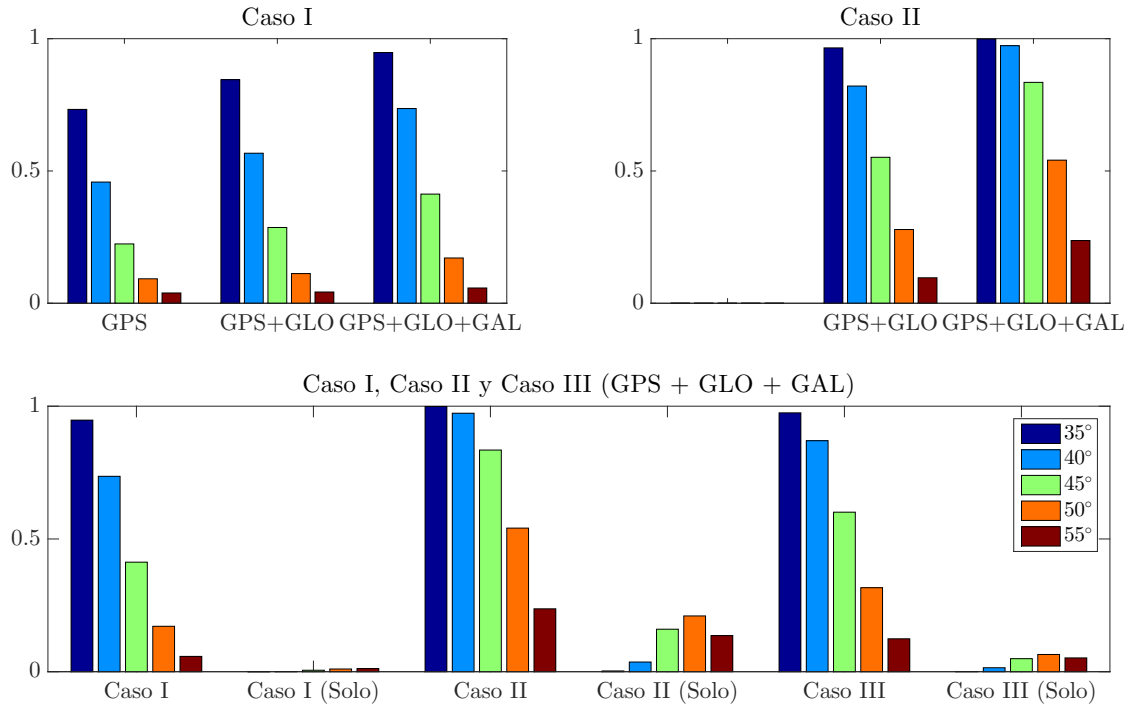


Figura 6.5: Probabilidad (frecuencia relativa) de obtener solución de posición con los diferentes casos analizados previamente, y considerando diferentes máscaras de elevación.

sistema GNSS), en caso de involucrar solo el sistema GPS, en caso de involucrar los sistemas GPS y GLONASS, y en caso de involucrar los sistemas GPS, GLONASS y Galileo. Puede observarse que el hecho de incluir un nuevo sistema aumenta la probabilidad de obtener solución de posición, ya que se agregan las probabilidades de tener cuatro mediciones del nuevo sistema incorporado. Obviamente, el incremento de probabilidad sólo se obtiene en caso que no se tenga al menos cuatro mediciones en alguno de los sistemas previamente incorporados.

En la figura superior derecha se analiza la factibilidad o probabilidad de obtener solución de posición mediante el denominado Caso II (esto es, al menos tres y dos mediciones de dos sistemas GNSS), en caso se involucrar los sistemas GPS y GLONASS, y en caso de involucrar los sistemas GPS, GLONASS y Galileo. Nuevamente, en caso de involucrar un nuevo sistema, se incrementan las probabilidades de obtener solución. De hecho, al involucrar Galileo aparecen dos nuevos escenarios posibles: resolver con GPS y Galileo, y resolver con GLONASS y Galileo, por sobre el caso que no lo involucra. Se observa también que las probabilidades de obtener solución se incrementan con respecto a las observadas en el Caso I; y que este incremento es más notorio para las máscaras de elevación más restrictivas.

En la figura inferior se analizan las probabilidades de obtener solución con alguno de los tres casos considerados, teniendo en cuenta que se emplean los tres sistemas GNSS. También se discriminan los casos en que sólo es posible obtener solución con un único sistema (Caso I), con dos sistemas (Caso II) y con tres sistemas (Caso III). Se observa que, en general, la disponibilidad aumenta cuando se cuenta con una solución multi-constelación.

Este análisis “GPS-céntrico” se debe al hecho de que el sistema GPS es el único que estuvo operativo desde su creación, mientras que GLONASS tuvo etapas de pérdida y recuperación de cobertura, y que Galileo se encuentra en etapa de desarrollo. No obstante, un análisis

similar puede realizarse cambiando el orden (Cogo *et al.*, 2012).

6.9.3. Solución Numérica

Si bien existen intentos para obtener una solución cerrada al problema con dos constelaciones GNSS, como por ejemplo Juang y Tsai (2008), dada la complejidad que presentan, nos centraremos únicamente en analizar las soluciones numéricas al problema.

Nuestra propuesta parte de considerar que si bien los sistemas GNSS no se basan en marcos de referencia temporal comunes, existen esfuerzos de todos ellos por lograr la cooperación y el uso conjunto, por lo cual informan, o prevén informar en su mensaje de navegación, la discrepancia de su base de tiempo con respecto a la de los demás sistemas GNSS, con cierto grado de precisión. Es por esto que contando con esta información, podemos asumir que las variables b^α , b^β y b^γ no presentarán en la práctica una discrepancia considerable. Es así que como primer paso en la resolución consideramos que $b^\alpha = b^\beta = b^\gamma$, es decir, como si existiese una única incógnita b ; y resolvemos con el método propuesto en la sección 6.8. A esta solución la denominaremos $\mathbf{u}^{(0)}$, $b^{(0)}$.

En las figuras 6.6, 6.7 y 6.8 se presentan los errores obtenidos en la solución para las diferentes corridas utilizadas, en ausencia de ruido, incluyendo mediciones de uno, dos y tres sistemas, respectivamente. En los tres casos, el método de solución de posición y sesgo es el presentado en la sección 6.8. Se presentan también las soluciones puntuales de velocidad, obtenidas con el método expuesto en la sección 6.10. En el caso de utilizar un único sistema (GPS en este caso), figura 6.6, en ausencia de ruido, el error observado se debe únicamente a consideraciones numéricas en el método de solución, y resulta despreciable a efectos prácticos. En caso de resolver tomando como único sistema GLONASS o Galileo, los resultados obtenidos son similares.

Sin embargo, en caso de utilizar mediciones de más de un sistema GNSS, e intentar resolver el problema considerando una única incógnita de sesgo, también en ausencia de ruido, dado que existen discrepancias entre b^α , b^β y b^γ , la solución obtenida presenta errores de magnitud apreciable tanto en estos valores como en las tres coordenadas de posición; tal como se observa en las figuras 6.7 y 6.8. Se observan también errores en la solución de velocidad, causados por el mencionado error en posición. En caso de resolver tomando otro subconjunto de dos sistemas GNSS: GPS y Galileo ó GLONASS y Galileo; los resultados obtenidos son similares.

Si bien los errores obtenidos no son aceptables, pueden tomarse como un buen estimado inicial sobre el cual mejorar la solución. Así, como segundo paso proponemos un método iterativo para refinar la solución. Definimos el vector

$$\mathbf{x}^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(k)} \\ \mathbf{b}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6.149)$$

donde k indica la k -ésima iteración, y en el vector \mathbf{b} se juntan los iterados de los valores de

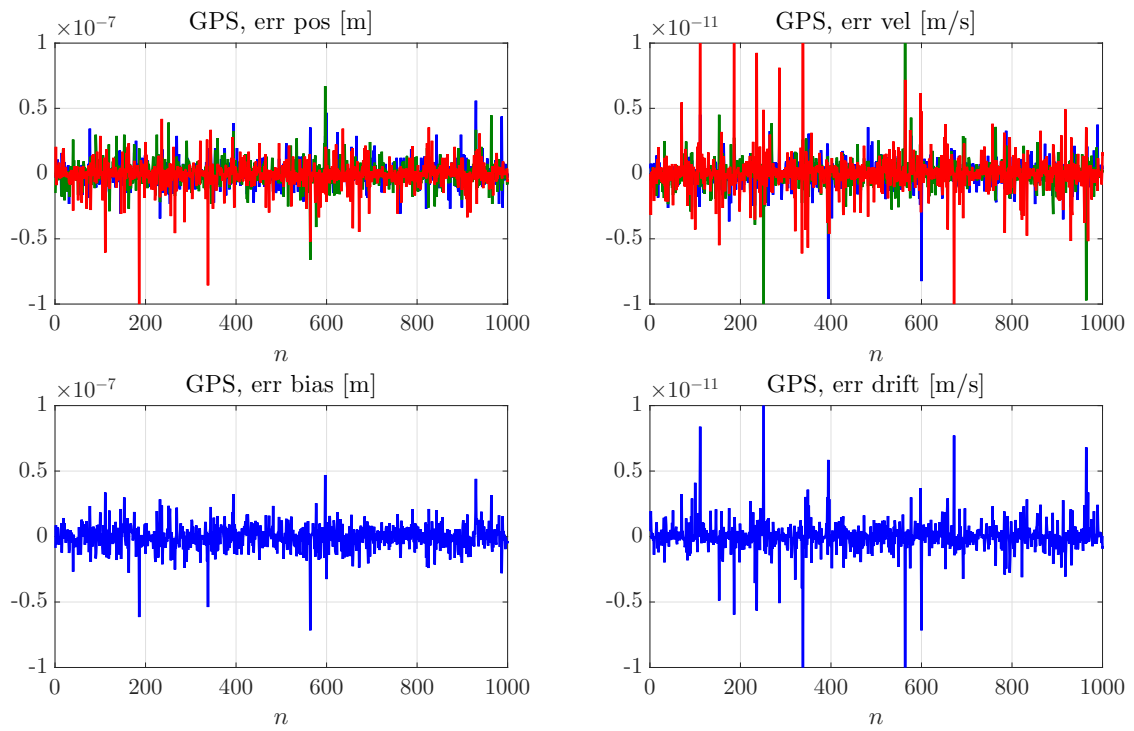


Figura 6.6: Error en la solución con un único sistema (GPS en este caso) en ausencia de ruido.

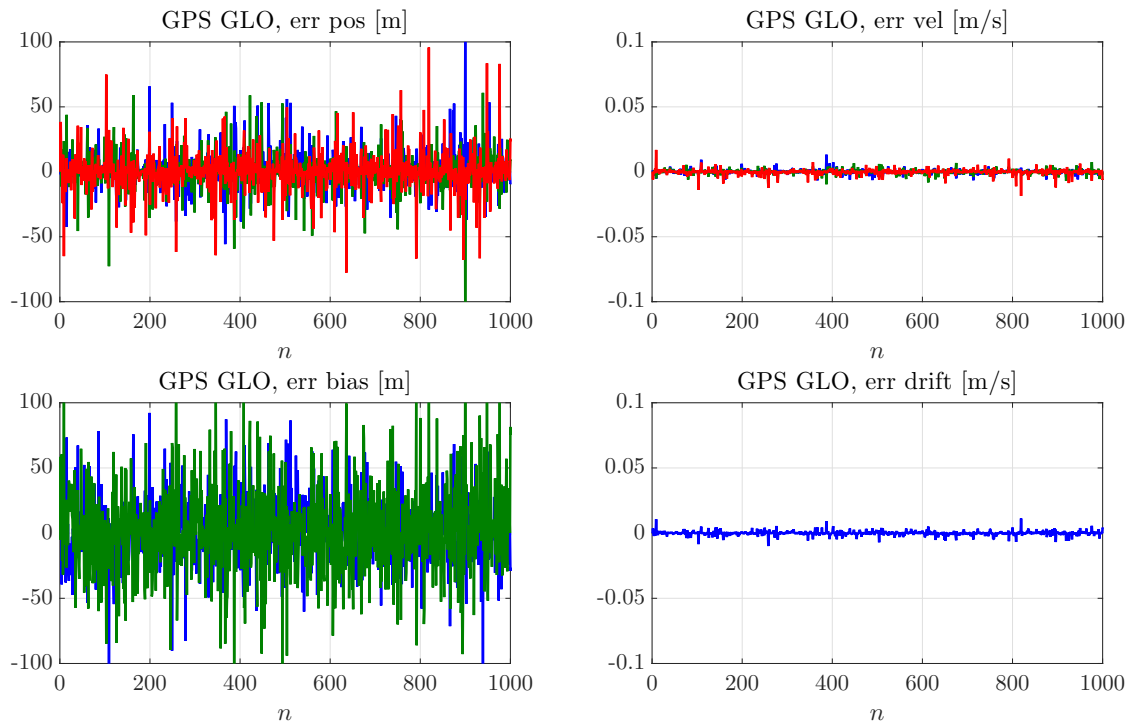


Figura 6.7: Error en la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS en este caso) en ausencia de ruido, considerando una única incógnita de sesgo.

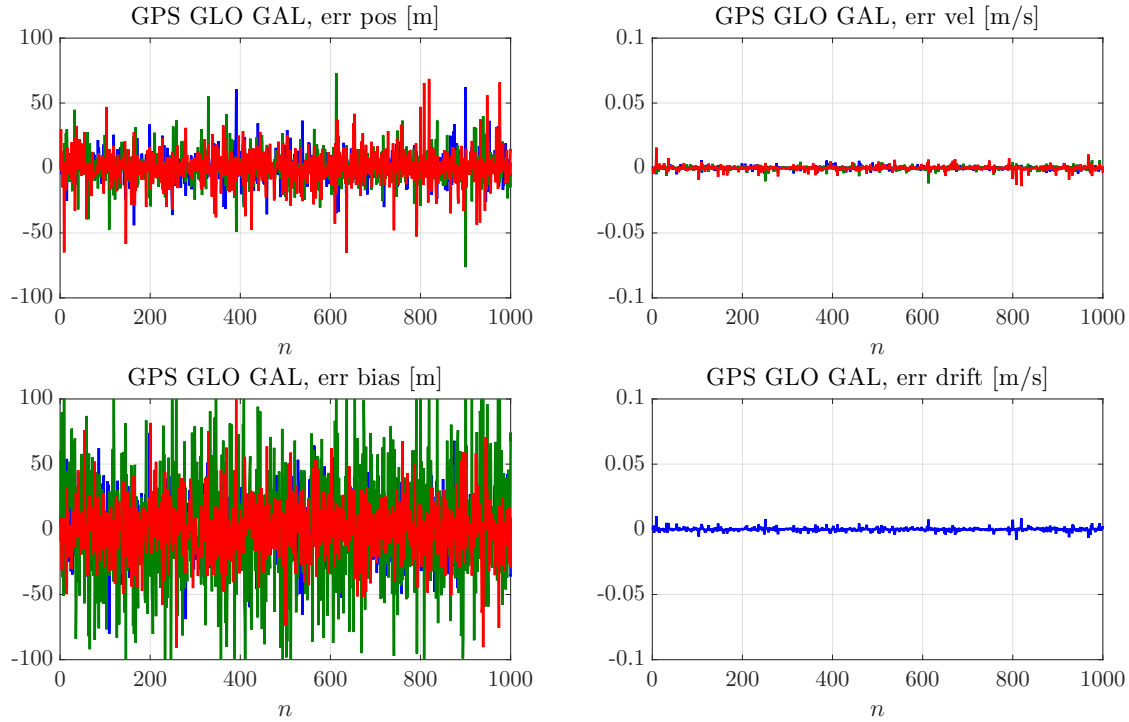


Figura 6.8: Error en la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, considerando una única incógnita de sesgo.

los sesgos¹⁰

$$\mathbf{b}^{(k)} \triangleq \begin{bmatrix} b^{\alpha(k)} \\ b^{\beta(k)} \\ b^{\gamma(k)} \end{bmatrix}. \quad (6.150)$$

La inicialización, o primer iterado, está dada por

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{b}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (6.151)$$

$$\mathbf{b}^{(0)} = \begin{bmatrix} b^{(0)} \\ b^{(0)} \\ b^{(0)} \end{bmatrix} \quad (6.152)$$

donde $b^{(0)}$ es la solución de sesgo obtenida considerando que todas las mediciones correspondían a un mismo sistema GNSS.

Definimos también el vector error asociado a la k -ésima iteración, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}^{(k)})$, cuya i -ésima componente está dada por

$$[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}^{(k)})]_i = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{u}^{(k)}\| + \mathbf{q}_i \mathbf{b}^{(k)} - \rho_i \quad (6.153)$$

¹⁰Esta definición, al igual que todas las expresiones que siguen, es aplicable para el caso de resolver con tres sistemas GNSS, que representa el caso más general. En caso de resolver con dos sistemas, la redefinición resulta evidente.

donde

$$\mathbf{q}_i \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \alpha \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \beta \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \gamma \end{cases} . \quad (6.154)$$

Si tomamos como función de costo el error cuadrático medio

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}'(\mathbf{x}) \mathbf{C}_\rho^{-1} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \quad (6.155)$$

donde \mathbf{C}_ρ denota la matriz de correlación del ruido que afecta a las mediciones, el objetivo de la iteración será encontrar el valor de \mathbf{x} que minimice dicha función de costo.

$$\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{J}(\mathbf{x})). \quad (6.156)$$

Uno de los métodos de optimización numérica más sencillos que se pueden aplicar para lograr la minimización es el denominado *steepest descent* (Nocedal y Wright, 2006). En este método, el $(k+1)$ -ésimo iterado se obtiene mediante

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (6.157)$$

donde el parámetro α_k se obtiene mediante algún método de búsqueda inexacta, y debe satisfacer las condiciones de Wolfe (Nocedal y Wright, 2006),

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})) \leq \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) - c_1 \alpha_k \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})' \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (6.158)$$

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}))' \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \leq c_2 \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})' \nabla \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (6.159)$$

En nuestro caso, la m -ésima componente del gradiente de la función de costo resulta

$$[\nabla \mathbf{J}(\mathbf{x})]_m = 2 \boldsymbol{\epsilon}'(\mathbf{x}) \mathbf{C}_\nu^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_m} \quad (6.160)$$

donde para cada valor de m , $\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_m}$ es un vector columna cuyo i -ésimo elemento está dado por

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_m} \right]_i = \begin{cases} \frac{[\mathbf{u}]_m - [\mathbf{s}_i]_m}{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{u}\|} & \text{si } m = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{si } m = 4 \text{ y } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \alpha \\ 1 & \text{si } m = 5 \text{ y } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \beta \\ 1 & \text{si } m = 6 \text{ y } \rho_i \text{ corresponde al sistema } \gamma \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (6.161)$$

donde $[\mathbf{u}]_m$ y $[\mathbf{s}_i]_m$ denotan la m -ésima componente del vector posición-sesgo de usuario y la m -ésima componente del vector posición del i -ésimo satélite, respectivamente.

Si bien este es el método numérico más simple (solamente requiere la evaluación del gradiente), presenta una muy baja tasa de convergencia, como puede observarse en las figuras 6.9 y 6.10.

Una forma de obtener una mejor tasa de convergencia es mediante los denominados métodos de Quasi-Newton, los cuales al igual que el de *steepest descent* requieren solamente

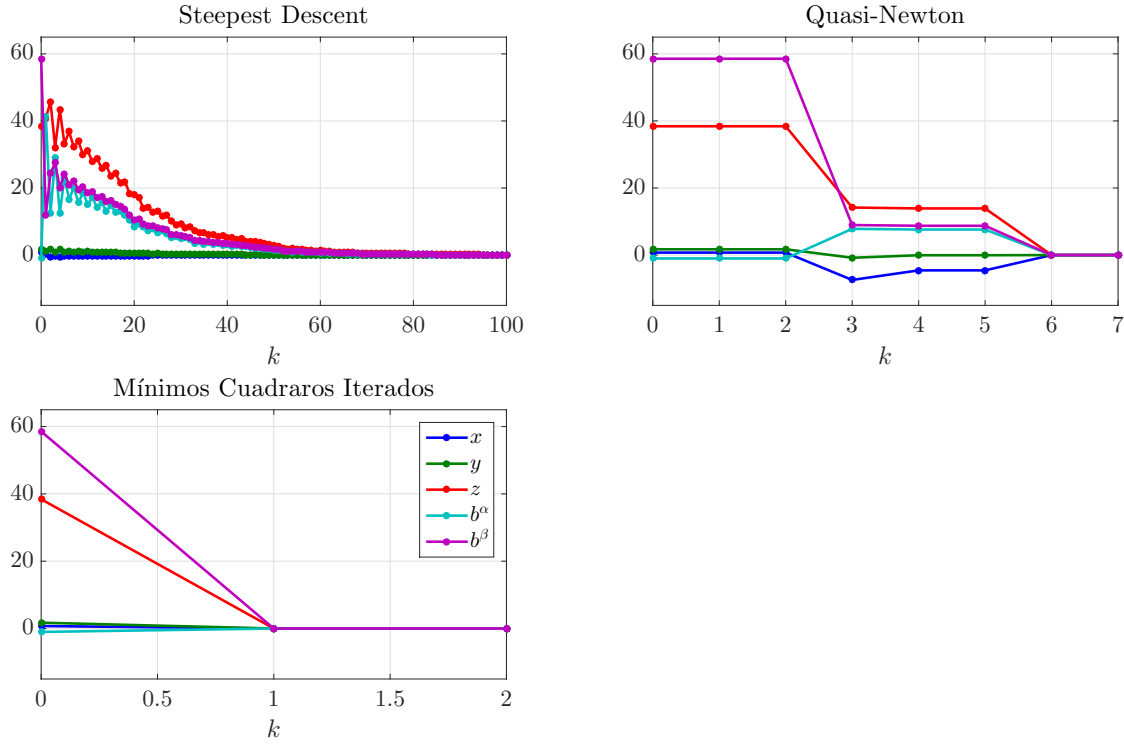


Figura 6.9: Error en las iteraciones de la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS) en ausencia de ruido, con los tres métodos propuestos.

la evaluación del gradiente en cada paso de iteración. Mediante el análisis de los cambios en el gradiente, construyen un modelo de la función objetivo que logra convergencia superlineal. El método implementado es el denominado *Quasi-Newton SR1* con un enfoque *Trust-Region*, y la utilización del denominado *Dogleg Path* para la resolución del subproblema (Nocedal y Wright, 2006).

Una tercer alternativa consiste en linealizar el problema en torno a la iteración anterior, y actualizar la iteración mediante la resolución de dicho problema lineal

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^k + (\mathbf{H}'_k \mathbf{C}_\rho^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}'_k \mathbf{C}_\rho^{-1} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (6.162)$$

donde

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial (\|\mathbf{s}_i - \mathbf{u}^{(k)}\| + \mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}. \quad (6.163)$$

Puede verse que los elementos de la i -ésima fila y la m -ésima columna de esta matriz resultan similares a los de la expresión (6.161). Este método se conoce como *mínimos cuadrados iterados* (Bar-Shalom *et al.*, 2004).

En las figuras 6.9 y 6.10 se muestran los errores observados en cada iteración para los tres métodos descriptos, en caso de utilizar dos y tres sistemas, respectivamente. En ambos casos, se tomó un instante particular y se consideraron mediciones sin ruido. Puede observarse la diferencia entre la tasa de convergencia de los distintos algoritmos.

Finalmente, en las figuras 6.11 y 6.12 se muestran los errores en la solución de posición con dos y tres sistemas, respectivamente, al refinar la solución mediante alguno de los métodos

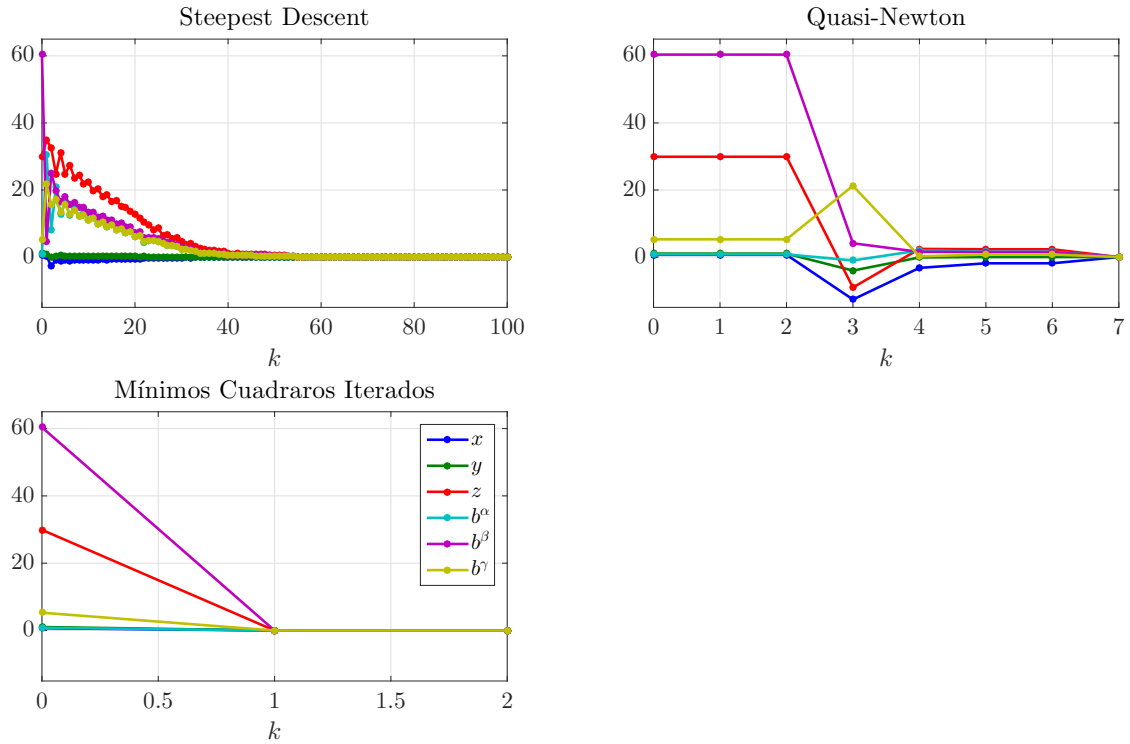


Figura 6.10: Error en las iteraciones de la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, con los tres métodos propuestos.

iterativos descriptos. En ambos casos se han utilizado mediciones sin ruido, y puede observarse que el error obtenido, debido a consideraciones numéricas, resulta despreciable en términos prácticos. En el caso de la solución con dos sistemas se ha tomado el caso particular de los sistemas GPS y GLONASS. Resultados similares se obtienen en caso de considerar otro subconjunto de dos sistemas: GPS y Galileo, o GLONASS y Galileo.

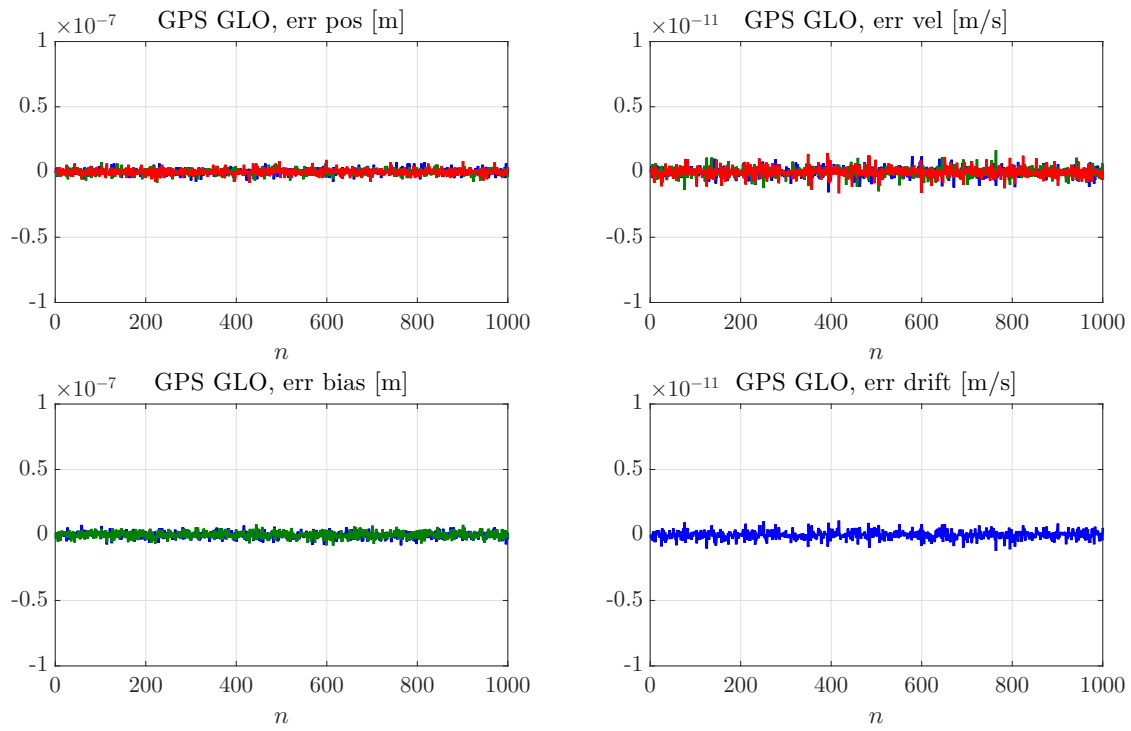


Figura 6.11: Error en la solución con dos sistemas (GPS y GLONASS en este caso) en ausencia de ruido, al incluir dos incógnitas de sesgo.

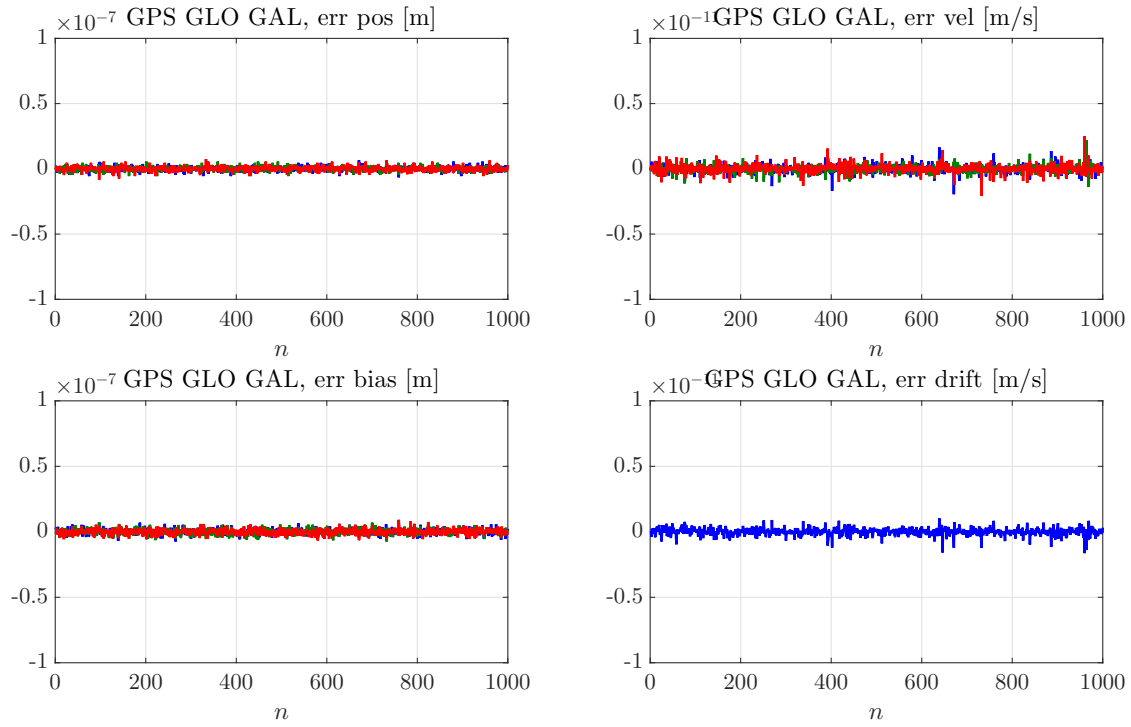


Figura 6.12: Error en la solución con tres sistemas (GPS, GLONASS y Galileo) en ausencia de ruido, al incluir tres incógnitas de sesgo.

6.10. Solución Puntual de Velocidad

Partimos de la ecuación que relaciona la medición de delta-rango con las velocidades de satélite y usuario, la línea vista entre ambos y la deriva de reloj

$$\dot{\rho}_i = \mathbf{e}'_i(\dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\mathbf{u}}) + d \quad (6.164)$$

que se puede reescribir como

$$\mathbf{e}'_i \dot{\mathbf{s}}_i - \dot{\rho}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ d \end{bmatrix}. \quad (6.165)$$

Si contamos con N mediciones de delta-rango, se pueden definir los vectores

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ d \end{bmatrix} \quad (6.166)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \dot{\mathbf{s}}_1 - \dot{\rho}_1 \\ \mathbf{e}'_2 \dot{\mathbf{s}}_2 - \dot{\rho}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}'_N \dot{\mathbf{s}}_N - \dot{\rho}_N \end{bmatrix} \quad (6.167)$$

y la matriz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 & -1 \\ \mathbf{e}'_2 & -1 \\ \dots & \\ \mathbf{e}'_3 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.168)$$

con lo cual el problema en forma vectorial resulta

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \dot{\mathbf{x}} \quad (6.169)$$

cuya solución está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}' \mathbf{y}. \quad (6.170)$$

En general, las mediciones se encontrarán afectadas por ruido, que modelaremos como AWGN. En este caso, la solución de mínimo error cuadrático (Bar-Shalom *et al.*, 2004) está dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{H}' \mathbf{C}_{\dot{\rho}}^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}' \mathbf{C}_{\dot{\rho}}^{-1} \mathbf{y} \quad (6.171)$$

donde $\mathbf{C}_{\dot{\rho}}$ es la matriz de covarianza del ruido que afecta a las mediciones.

Es necesario remarcar que para obtener la solución de velocidad se requiere, para el armado de los vectores \mathbf{e}_i , contar previamente con una solución de posición de usuario, que se obtiene como se describe en la sección 6.8.

En caso de contar con mediciones de más de un sistema GNSS, en la suposición de que el receptor opera con un único reloj de referencia, la deriva será la misma para todas las mediciones, con lo cual las incógnitas del problema siguen siendo 4 (a diferencia del caso de solución de posición y sesgo, donde se agrega una incógnita por cada nuevo sistema). Bajo esta suposición, el problema de solución de velocidad conjunta con más de un sistema GNSS, una vez que se tiene la solución de posición (ver sección 6.9), es similar al caso de un único sistema.

6.11. Dilución de la Precisión (DOP)

En la sección 6.3 se analizan los diferentes factores que introducen errores en las mediciones. El efecto residual de todas las fuentes de error, una vez que se hayan corregido y/o mitigado los factores admisibles, puede ser considerado como una incertidumbre en la medición resultante. De hecho, en caso en que la única fuente de error sea el ruido térmico, el efecto del mismo será sumar una variable aleatoria con una determinada varianza en la medición correspondiente.

En qué medida estos errores se traducen en error en la solución de navegación dependerá de la configuración geométrica del problema, de qué tan “bien condicionado” esté dicho problema. Intuitivamente, si se tiene una determinada incertidumbre o precisión en cada una de las mediciones de pseudo-rango, una configuración de satélites demasiado concentrados dará lugar a una mayor “zona de incertidumbre” en las componentes de la solución de posición que corresponden al plano perpendicular a la dirección usuario-satélites. Por otra parte, una configuración de satélites ubicados sobre un mismo plano, dará lugar a una mayor “zona de incertidumbre” en las componentes de la solución de posición ubicadas en la recta perpendicular a dicho plano, que contiene la ubicación del usuario.

Este efecto de la geometría del problema es lo que se conoce como *dilución de la precisión* (DOP, acrónimo de *Dilution Of Precision*). Si se considera que las mediciones de pseudo-rango presentan un error $\Delta \rho$, y que la solución de posición-tiempo presenta un error $\Delta \mathbf{x}$, y se linealiza el problema en torno a la solución de posición-tiempo, con un procedimiento similar al utilizado en 6.9.3, se puede plantear (Kaplan y Hegarty, 2005)

$$\Delta \rho = \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \quad (6.172)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^\# \Delta \rho \quad (6.173)$$

$$\mathbf{H}^\# = (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}' \quad (6.174)$$

de donde puede obtenerse que la matriz de covarianza del error en la solución, $\mathbf{C}_{\Delta \mathbf{u}}$ está dada por

$$\mathbf{C}_{\Delta \mathbf{u}} = \mathbf{H}^\# \mathbf{C}_\rho \mathbf{H}^{\#'} \quad (6.175)$$

Si se asume que los efectos que afectan a cada una de las mediciones son no-correlacionados, y con igual desviación estándar σ_ρ , la matriz de covarianza resulta

$$\mathbf{C}_\rho = \mathbf{I} \sigma_\rho^2 \quad (6.176)$$

En este caso, la matriz de covarianza del error en la solución resulta

$$\mathbf{C}_{\Delta \mathbf{u}} = (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1} \sigma_\rho^2 \quad (6.177)$$

$$\mathbf{C}_{\Delta \mathbf{u}} = \mathbf{D} \sigma_\rho^2 \quad (6.178)$$

$$\mathbf{D} \triangleq (\mathbf{H}' \mathbf{H})^{-1} \sigma_\rho^2 \quad (6.179)$$

y a la matriz \mathbf{D} se la conoce como matriz de DOP, ya que traduce los efectos del error en las mediciones en error en la solución de posición-tiempo.

En términos de esta matriz, se definen el GDOP, o DOP geométrico; PDOP, o DOP de posición; HDOP, o DOP horizontal; VDOP, o DOP vertical; y TDOP, o DOP temporal

$$\text{GDOP} = \sqrt{\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{33} + \mathbf{D}_{44}} \quad (6.180)$$

$$\text{PDOP} = \sqrt{\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22} + \mathbf{D}_{33}} \quad (6.181)$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{22}} \quad (6.182)$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{\mathbf{D}_{33}} \quad (6.183)$$

$$\text{TDOP} = \frac{\sqrt{\mathbf{D}_{44}}}{c}. \quad (6.184)$$

En caso que (6.176) no se verifique, la matriz de covarianza del error en la solución puede obtenerse (aproximarse) mediante la ecuación (6.175). En el caso multiconstelación puede realizarse un planteo similar, incorporando las incógnitas de sesgo de cada sistema en el vector $\Delta \mathbf{x}$.

6.12. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se presentaron diferentes aspectos relacionados con la implementación práctica de receptores GNSS como la demodulación del mensaje de navegación, el armado de las mediciones, la corrección o mitigación de los diferentes factores de error en las mismas, y el cálculo de los estados de los satélites de la constelación.

También se expusieron los métodos utilizados para la obtención de la solución puntual de posición y velocidad, tanto en el caso de utilizar un único sistema GNSS como en el caso multi-constelación. Esta solución puntual será de utilidad como insumo para los esquemas de filtrado, o bien como estimado inicial (EKF), o bien como medición propiamente dicha (PKF); además de servir como referencia contra la cual comparar la solución obtenida en el filtrado.

CAPÍTULO 7

APLICACIÓN A UN SATÉLITE DE ÓRBITA BAJA

En este capítulo nos abocaremos al estudio de una aplicación particular de navegación de vehículos aeroespaciales: un satélite de órbita baja o satélite LEO. En particular, nos remitiremos al satélite argentino SAC-D (Satélite de Aplicaciones Científicas D), con una órbita heliosincrónica de 657 km.

La misión SAC-D/Aquarius se encuadró en un programa de cooperación entre la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE), el Centro Goddard y el *Jet Propulsion Laboratory* (JPL), estos dos últimos ambos de la NASA. Su objetivo científico estuvo orientado a obtener nueva información climática a partir de las mediciones de salinidad y una nueva visión de la circulación y procesos de mezcla en el océano, así como detectar focos de alta temperatura en la superficie terrestre para la obtención de mapas de riesgo de incendios y humedad del suelo para dar alertas tempranas de inundaciones (CONAE, 2016a).

Este satélite fue puesto en órbita el 10 de Junio de 2011 y concluyó su servicio operativo el 8 de Junio de 2015. Como parte de sus instrumentos llevó el denominado Paquete de Demostración Tecnológica o TDP (acrónimo de *Technological Demonstration Package*), compuesto por dos instrumentos: un giróscopo de fibra óptica desarrollado en el Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp) y un receptor de GPS desarrollado en la UNLP, en particular en el Laboratorio de Electrónica Industrial Control e Instrumentación (LEICI) de la Facultad de Ingeniería. De ahora en adelante nos referiremos a este receptor de GPS como RGPS. Los detalles de *hardware* y *software* del diseño se presentan en López La Valle *et al.* (2009) y Cogo *et al.* (2009), respectivamente. En la sección 7.1 se realiza una descripción somera basada en estas referencias y en García *et al.* (2011).

Luego de la puesta en órbita se observó que el RGPS respondía correctamente a los comandos de encendido transmitidos desde tierra. Si bien demoraba un tiempo considerable, se observó que era capaz de realizar la adquisición de al menos cuatro satélites y de obtener la solución de navegación con una calidad dentro de los márgenes previstos. Debido a que el vehículo (SAC-D) se desplaza a velocidades del orden de 8 km/s, se tiene una gran variabilidad de los satélites en vista. A diferencia de lo que ocurre en un receptor de aplicaciones en

tierra, donde cada satélite puede permanecer en vista durante horas, en el RGPS los satélites permanecen en vista durante unos pocos minutos. Esto produce que luego de un determinado tiempo el RGPS comience a “perder” los satélites que tenía en seguimiento. Si en ese tiempo no logra adquirir nuevos satélites, eventualmente deja de poder obtener solución de navegación. En esta condición, se observó que el RGPS dejaba de operar, debiendo ser reinicializado, tras lo cual la situación se repetía, indicando la existencia de un *bug* de *software* que no había sido detectado en el desarrollo, ensayos y validación en tierra (Cogo *et al.*, 2013a).

Debe tenerse en cuenta que este receptor se trata de un diseño realizado a principios del año 2009; y que su entrega fue requerida para la realización de los ensayos y su integración con otros sistemas del satélite a comienzos del año 2010. En vista del corto tiempo disponible se privilegió el empleo de un diseño temprano, relativamente simple pero que había sido más probado que otras versiones más avanzadas. Cabe remarcar también que en ese momento aún no se contaba con un simulador adecuado para efectuar pruebas exhaustivas. Además, los restrictivos tiempos de desarrollo impidieron que se implementara la capacidad de reprogramación en vuelo del RGPS, con lo cual el mencionado *bug* resultó insalvable.

No obstante, resulta interesante el análisis de la operación de este instrumento por dos razones principales: se trata de un instrumento íntegramente diseñado en el grupo de trabajo, y que se encontró operando en órbita en un satélite argentino, y el análisis de su operación ha dejado muchas enseñanzas para los diseños futuros. Además, sienta las bases de posibles mejoras en los algoritmos de navegación que serán analizados en el capítulo siguiente.

7.1. Descripción del RGPS

7.1.1. Hardware

El RGPS, desde el punto de vista del *hardware* puede considerarse formado básicamente por dos etapas: la etapa de procesamiento analógico o etapa de RF y la etapa de procesamiento digital. En la primer etapa se realiza la amplificación, conversión y digitalización de las señales de GPS que se reciben en la antena; las señales involucradas en esta etapa son básicamente de naturaleza analógica. En la segunda etapa se lleva a cabo la adquisición y seguimiento de la señal, el armado de las mediciones, la obtención de la solución de posición y velocidad y el manejo de las comunicaciones; las señales involucradas en esta etapa son de naturaleza digital.

En la figura 7.1 se muestra un diagrama en bloques de la etapa de RF, que consta de los siguientes componentes:

- **Amplificador de bajo ruido (LNA):** Está formado esencialmente por el transistor de radiofrecuencia BFP405 y sus respectivas redes de adaptación de entrada y de salida. De acuerdo con las simulaciones realizadas del diseño, el LNA proporciona una ganancia de alrededor de 18 dB con una figura de ruido de aproximadamente 2 dB.
- **Filtro Pasabanda:** Se empleó un filtro para GPS tipo dieléctrico con una frecuencia central de 1575,42 MHz y un ancho de banda suficiente para dejar pasar la señal civil en banda L1. Este filtro introduce unas pérdidas de inserción de aproximadamente 3 dB.

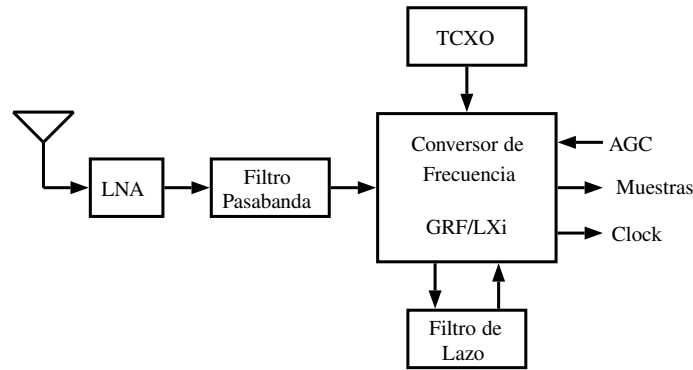


Figura 7.1: Etapa de RF.

- **Convertor de Frecuencia:** Se empleó el circuito integrado GRF/LXi de *SiRF Technology Inc* (SiRF, 1999a); que integra una etapa amplificadora de bajo ruido, un mezclador con rechazo de frecuencia imagen, un sintetizador de lazo de enganche de fase (PLL), una etapa de frecuencia intermedia (FI) con control automático de ganancia (AGC) y convertor analógico/digital de 2 bits.
- **Oscilador Compensado en Temperatura (TCXO):** La estabilidad del oscilador de referencia resulta fundamental para obtener un buen desempeño del receptor. En este caso se utilizó un oscilador compensado en temperatura con una estabilidad de 2 ppm.
- **Filtro de Lazo:** El filtro de lazo complementa el PLL integrado en el convertor de frecuencia. Se implementó un filtro de dos polos, obteniendo un ancho de banda de lazo de aproximadamente 500 kHz.

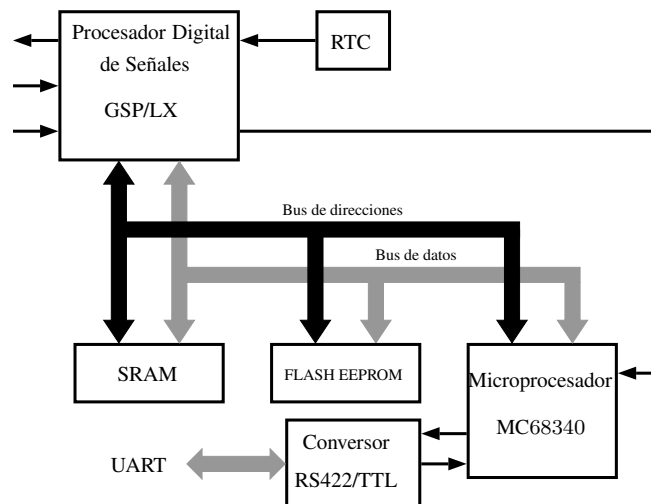


Figura 7.2: Etapa de procesamiento digital.

Por su parte, en la figura 7.2 se muestra un diagrama en bloques de la etapa de procesamiento digital, que consta de los siguientes componentes:

- **Procesador Digital de Señales:** Se utilizó el circuito integrado GSP/LX de *SiRF Technology Inc* (SiRF, 1999b) el cual resuelve por *hardware* las operaciones más

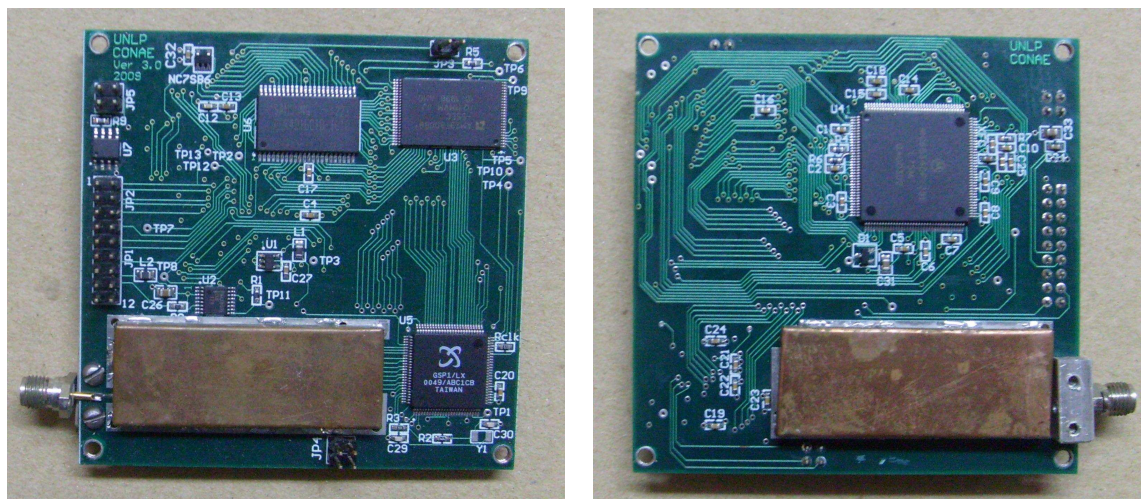


Figura 7.3: Modelo de ingeniería del RGPS (ambas caras).

demandantes del procesamiento digital del receptor. Más específicamente, posee una arquitectura de los denominados correladores que permiten calcular la correlación de la señal de GPS con réplicas locales de los códigos Gold correspondientes a los satélites de GPS que se desea recibir.

- **Reloj de Tiempo Real (RTC):** Provee una base de tiempos para la operación de la etapa de procesamiento digital.
- **Microprocesador:** Se utilizó el procesador MC68340 de 32 bits de la familia M68000 del fabricante Motorola ([Motorola, 1994](#)), en el cual se realiza el resto del procesamiento necesario para la obtención de la solución de navegación, además de la administración y coordinación de la operación de los demás bloques. Todas estas tareas son realizadas por el *software* asociado que se describirá a continuación.
- **Memorias:** Se utilizaron memorias tipo FLASH EEPROM para el almacenamiento del *software* del receptor y memorias tipo SRAM para el almacenamiento de las variables y la pila que requiere la operación de dicho *software*.
- **Conversor RS-422/TTL:** El receptor se conecta al exterior mediante una interfaz UART provista por el mencionado microprocesador MC68340. Se incorpora este bloque a los efectos de adaptar los niveles TTL de dicho procesador con los niveles utilizados por la norma RS-422.

En la figura 7.3 se muestran fotografías de ambas caras del modelo de ingeniería del RGPS construido. En la figura 7.4a se muestra una fotografía del modelo de vuelo del RGPS montado sobre el marco o *frame* que lo soporta; mientras que en la figura 7.4b se muestra una fotografía del instrumento TDP (conteniendo el mencionado *frame*) durante los ensayos de termovaciación previos a su integración al satélite.

7.1.2. Software

El software del RGPS implementa todas las tareas relacionadas al procesamiento en banda base de un receptor de comunicaciones digitales: sincronización a varios niveles, demodulación,

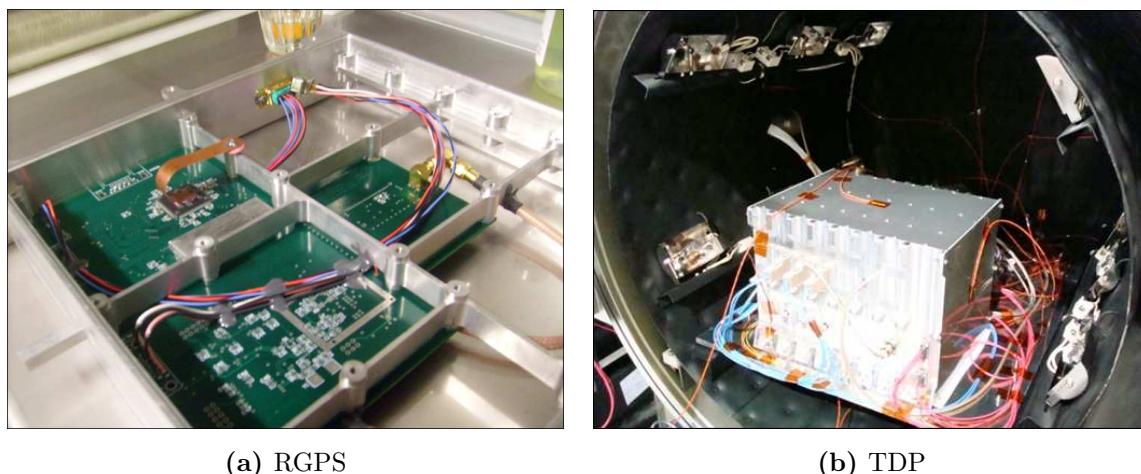


Figura 7.4: RGPS y TDP.

decodificación, etc.; de manera simultánea para cada uno de los satélites del sistema GPS que utiliza en cada instante. Además, realiza las mediciones necesarias de cada uno de estos satélites y con ellas efectúa el cálculo de posición, velocidad y tiempo. A este conjunto de tareas esenciales se agregan otras accesorias, pero imprescindibles, como: atención de la interfaz de usuario, almacenamiento de datos en memoria, control de estados del receptor, validación de las mediciones, elección de los satélites a recibir, cálculo de posición y velocidad de los satélites del sistema GPS utilizados en la solución de navegación, entre otras. Estas tareas, en su mayoría, se describen en el capítulo 6.

Esta enorme cantidad de tareas, con distintas prioridades y velocidades de ejecución, se realiza en tiempo real utilizando un solo microprocesador que opera a 25 MHz, con lo cual el desarrollo de un software de estas características requiere de una programación eficiente de los distintos algoritmos seleccionados y una adecuada planificación de tareas capaz de administrar debidamente los recursos limitados de cómputo.

El proceso de recepción de la señal GPS consta de dos etapas fundamentales: adquisición y seguimiento. Durante la primera se realiza la búsqueda (“ciega” o asistida con algún conocimiento previo) de las señales de los satélites visibles para el receptor; adquirir la señal consiste en determinar la frecuencia de portadora y el retardo de código de la señal recibida desde un satélite de GPS. Una vez determinados estos parámetros, el receptor puede comenzar la etapa de seguimiento, durante la que se recupera la señal de datos enviados por el satélite y se obtienen las mediciones de pseudo-rango y delta-rango, a la vez que se ajustan las estimaciones realizadas siguiendo las variaciones de frecuencia portadora y retardo de la función de código de la señal recibida (Cogo *et al.*, 2009).

Adquisición de la Señal de un Satélite

Para determinar la frecuencia de portadora y el retardo de código de la señal del satélite es necesario ensayar todas las combinaciones posibles de valores de ambos, al menos dentro de una grilla discreta. Para cada valor candidato de frecuencia portadora se ensayan todos los valores de retardo de código posibles y se mide la potencia de señal obtenida para esa combinación. Mediante un test estadístico se decide posteriormente la presencia o ausencia

de señal a partir de las mediciones realizadas intentando minimizar la probabilidad de falsa alarma y maximizar la probabilidad de detección (Cogo *et al.*, 2009).

Debido a que se utiliza un tiempo de coherencia de 1 ms en las correlaciones, el paso de búsqueda en frecuencia se fija en 750 Hz, algo menor que el ancho del lóbulo central de la función de ambigüedad (1 kHz). Por su parte, debido a que el ancho de la función de correlación del código Gold es de 1 chip, se utiliza como paso de búsqueda del retardo medio chip (Cogo *et al.*, 2009).

El proceso de búsqueda puede ser “frío” o “caliente”, dependiendo de la cantidad de información con que disponga el receptor a la hora de intentar adquirir la señal de GPS. Si la información es suficiente para determinar los satélites visibles, la distancia al usuario y la frecuencia de portadora aproximada de cada uno de ellos, se realiza un arranque “caliente” que explota todos estos datos para acotar los rangos de búsqueda en frecuencia y retardo y así acelerar la obtención de la primera estimación de posición. Si en cambio estos datos faltan o no son fiables, se realiza una búsqueda “fría”, también denominada “ciega” (Cogo *et al.*, 2009).

La etapa de adquisición se divide en dos subetapas con el fin de minimizar el tiempo que toma calcular la primera estimación de la posición del usuario. En un primer momento se utilizan la totalidad de los correladores disponibles (240) (SiRF, 1999b) para lograr la adquisición de un único satélite, lo que permite recorrer la grilla en un menor tiempo. Una vez adquirido el primer satélite, el software paraleliza el proceso de búsqueda de otras señales separando los 240 correladores en 12 grupos de 20 correladores cada uno (denominados canales) y asigna la búsqueda de un satélite a cada grupo. De esa forma el proceso de búsqueda es más lento para cada satélite, pero se realiza de forma simultánea para varios de ellos (Cogo *et al.*, 2009). La razón de ser de esta estrategia es que, al sincronizarse con el primer satélite, el receptor puede obtener información respecto a cuáles de los otros satélites están visibles y acotar la incertidumbre en sus parámetros. A la primera subetapa la llamaremos *adquisición inicial*, y a la segunda *adquisición secundaria*¹. Ambas subetapas de adquisición son capaces de funcionar en condiciones de alta variación del corrimiento de frecuencia por efecto Doppler presentes en un satélite LEO (García *et al.*, 2011).

En la etapa de adquisición inicial, en un primer momento se utilizan tiempos de integración no coherentes de 2 ms para la búsqueda, es decir, sumando dos correlaciones de 1 ms. Solamente si no se detecta ningún satélite de esta forma (supuestamente porque la potencia de los mismos es muy débil), se incrementa el tiempo de integración no coherente a 6 ms para aumentar la sensibilidad a costa de incrementar también el tiempo que toma el proceso de búsqueda (Cogo *et al.*, 2009).

Si el software recorre todo el plano sin encontrar una coordenada donde se verifique la presencia de la señal deseada, se elige otro satélite y se repite el proceso de búsqueda. Si por el contrario se determina la existencia de señal, se cambia el modo de funcionamiento del software separando los 240 correladores en 12 canales y asignando el primer canal al seguimiento del satélite recientemente encontrado, mientras los 11 restantes comienzan la búsqueda de otras señales con el algoritmo de adquisición secundaria. Este último emplea siempre un tiempo de integración no coherente de 6 ms (Cogo *et al.*, 2009). La estrategia de búsqueda es similar a la que en la literatura se conoce como método Tong (Kaplan y Hegarty,

¹En Cogo *et al.* (2009) se refiere a este proceso como *readquisición*, aquí decidimos cambiar a *adquisición secundaria* por considerar que es una denominación más precisa.

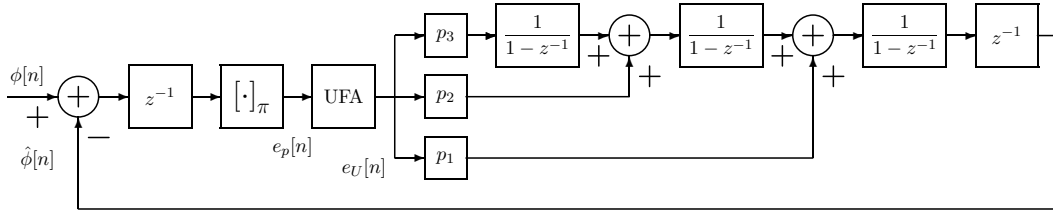


Figura 7.5: Diagrama en bloques del lazo de seguimiento de fase.

2005), y se describe en mayor detalle en [Cogo et al. \(2009\)](#).

Seguimiento de la Señal de un Satélite

Una vez adquirido un satélite, los algoritmos de adquisición (en cualquiera de sus variantes) ceden el procesamiento a los algoritmos de seguimiento de fase de portadora y de código. En este receptor el lazo de fase implementado posee una estructura de PLL de tercer orden y utiliza un discriminador de fase no ambiguo asistido en frecuencia, que amplía el rango de discernimiento del error de fase con respecto a los discriminadores usuales ([Roncagliolo y García, 2007](#)). Los lazos de fase y código se iteran cada 10 ms; y el primero posee un ancho de banda equivalente de ruido de 37,5Hz, resultando en un buen compromiso entre varianza en la estimación de la fase y velocidad de respuesta a la dinámica presente en la señal recibida.

En la figura 7.5 se muestra un diagrama del lazo diseñado e implementado. Los dos retardos presentes en el modelo corresponden al tiempo necesario para realizar la correlación y para realimentar las estimaciones del lazo al hardware que realiza las correlaciones. La operación módulo- π ($[\cdot]_{\pi}$), similar a la función parte entera pero con saltos cada π , muestra la naturaleza ambigua del discriminador de fase. A continuación el algoritmo UFA corrige el valor discriminado generando valores no ambiguos basado en la suposición de error de frecuencia acotado a $\pm 1/4T$, con $T = 10\text{ms}$ (tiempo de integración). Los valores de los coeficientes del filtro de lazo p_1 , p_2 y p_3 se obtienen de acuerdo al método de diseño completamente digital presentado en [Roncagliolo y García \(2007\)](#). Dado que la dinámica del código y de la fase es la misma, el lazo de código es un simple lazo de primer orden asistido por la estimación obtenida con el lazo de portadora ([Kaplan y Hegarty, 2005](#)).

Con la estimación de retardo de código y frecuencia de portadora realizada por los lazos de seguimiento y la información demodulada de la señal de cada satélite, el receptor forma las mediciones de pseudo-rango y delta-rango; de una forma similar a la descrita en 6.2. A partir de un conjunto de 4 o más satélites de los cuales se disponga de estas mediciones, la tarea de navegación puede calcular la posición y velocidad del receptor.

Navegación

Las rutinas de navegación son las encargadas de obtener la solución de posición y velocidad de usuario a partir de las mediciones de pseudo-rango y de delta-rango provistas por cada uno de los canales del RGPS. Para este receptor se implementó un Filtro de Kalman Extendido (EKF, ver capítulo 5), tomando como variables de estado las tres coordenadas de posición y las tres coordenadas de velocidad en el marco ECEF, y adoptando como modelo en variables

de estado el simple modelo cinemático descrito en el capítulo 4. Además, como se analiza en el capítulo 2, dado que el reloj del receptor no está perfectamente sincronizado con el tiempo GPS, aparecen dos incógnitas adicionales en la solución de navegación que corresponden al sesgo y a la deriva del reloj local, que se incorporan como variables de estado. Con estas consideraciones, el modelo de tiempo discreto que representa el estado del usuario resulta

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \cdot \mathbf{w}_k \quad (7.1)$$

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (7.2)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ T & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \frac{T^2}{2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & T \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} w_{b,k} & w_{x,k} & w_{y,k} & w_{z,k} \end{bmatrix}' \quad (7.5)$$

donde \mathbf{x}_k es el vector de estado correspondiente al instante k , \mathbf{F}_k es la matriz de sistema, \mathbf{G}_k es la matriz de acoplamiento de la perturbación, y \mathbf{w}_k es la perturbación, cuyos elementos $w_{b,k}$, $w_{x,k}$, $w_{y,k}$ y $w_{z,k}$ modelan las aceleraciones promedio en el intervalo de muestreo en el sesgo de reloj local y en las tres coordenadas x , y y z , respectivamente.

Como se describe en el capítulo 2 las mediciones de pseudo-rango y de delta-rango se encuentran relacionadas de forma no lineal con el estado

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k) + \mathbf{v}_k \quad (7.6)$$

donde \mathbf{z}_k es el vector de mediciones correspondientes al instante k , \mathbf{h} es la función no lineal correspondiente y \mathbf{v}_k modela el ruido de medición. Para la implementación del EKF se define

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, k)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-} \quad (7.7)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ es el estimado del vector de estado en el instante k utilizando mediciones hasta el instante $k-1$

Modelaremos la matriz \mathbf{w}_k como ruido blanco Gaussiano, independiente en cada componente, con matriz de covarianza²

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i'\} = \delta_\kappa(k-i) \cdot \mathbf{Q}_k \quad (7.8)$$

donde \mathbf{Q}_k es la matriz de covarianza correspondiente al instante k , y resulta diagonal debido a la suposición de perturbaciones independientes. Para nuestra implementación, las entradas de esta matriz se fijaron en un valor tal que logra un buen compromiso entre el filtrado de la solución y la capacidad de seguimiento de la dinámica propia de un satélite. El ajuste se verificó mediante simulación.

² $\delta_\kappa(k-i)$ es la función delta de Kronecker

Por su parte, el ruido asociado a las mediciones, conocido como ruido de observación, se modela con matriz de covarianza

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i'\} = \delta_{\kappa}(k - i) \cdot \mathbf{R}_k \quad (7.9)$$

donde \mathbf{R}_k es la matriz de covarianza en el instante k . Suponiendo que el ruido que afecta a un dado canal es independiente del que afecta a los demás y que el ruido que afecta a las mediciones de pseudo-rango de un dado canal es independiente del que afecta a las mediciones de delta-rango del mismo canal ³, la matriz \mathbf{R}_k resulta diagonal. En este caso de mediciones independientes se utilizó la implementación del filtro de Kalman de Bierman-Thornton, que es una de las más estables numéricamente (Grewal y Andrews, 2001). Para la inicialización del EKF se implementó el algoritmo de Bancroft descrito en el capítulo 6.

7.2. Operación en Órbita del RGPS

7.2.1. Información Provista por el RGPS

La información provista por el RGPS se extrae de las tramas de datos de telemetría del satélite. Dentro de la misma existen campos que corresponden a lo que denominaremos Información de Navegación y campos que corresponden a Información de Canales, detallados en la tabla 7.1.

En todos los casos, la separación entre los instantes k es de aproximadamente 1 segundo, según la base de tiempos del RGPS. Los datos analizados corresponden al RGPS operando en órbita y fueron provistos por el Centro Espacial Teófilo Tabanera (CETT).

7.2.2. Elementos Adicionales Utilizados para el Análisis/Contraste

Parámetros TLE

Los parámetros orbitales conocidos como TLE (*Two Line Elements*) permiten obtener la posición del satélite SAC-D en diversos instantes en los cuales se cuenta con datos de interés. Si bien la precisión en la posición que aportan estos parámetros no es alta, es suficiente para el análisis que se pretende. Se debe tener en cuenta que los instantes de interés se encuentran etiquetados en el sistema de tiempo GPS, mientras que los parámetros TLE se presentan referidos a tiempo UTC, por lo cual se debe realizar la conversión de un sistema de referencia temporal al otro. Además, la solución obtenida en la computación en base a parámetros TLE se realiza en un marco de referencia inercial, mientras que el marco de referencia espacial utilizado para presentar los datos del RGPS es el sistema ECEF. Por tanto, se debe realizar la transformación de coordenadas desde este sistema inercial al sistema ECEF, tal como se describe en el capítulo 3.

³Si bien las mediciones de pseudo-rango y delta-rango no son independientes, pueden considerarse así con buena aproximación.

Campo	Descripción
k	Instante de toma de datos
$W[k]$	Semana GPS
$TOW[k]$	Tiempo relativo a la semana GPS
$x[k], y[k], z[k]$	Coordenadas de posición
$\dot{x}[k], \dot{y}[k], \dot{z}[k]$	Coordenadas de velocidad
$NSV[k]$	Cantidad de SVs en la solución
j	Canal al que corresponden los datos
$SVID[j][k]$	Identificador del satélite
$state[j][k]$	Estado de seguimiento
$CN0[j][k]$	Relación portadora a ruido
$TT[j][k]$	Tiempo de transmisión
$CD[j][k]$	Doppler de Portadora

Tabla 7.1: Información de Navegación y Canales.

Almanaques de GPS

Para parte del análisis resulta de interés contar también con una estimación, no necesariamente demasiado precisa de la posición de los satélites de GPS en función del tiempo. En el RGPS, esta información se obtiene a partir de las efemérides de los satélites de GPS, transmitida por éstos en el mensaje de navegación (ver capítulo 6). En nuestro caso utilizaremos los parámetros orbitales contenidos en lo que se conoce como información de almanaque de la constelación del sistema GPS, que difieren de las efemérides en determinados parámetros de corrección, y en la tasa con la cual esta información es actualizada (1 día para el caso del almanaque, algunas horas para el caso de las efemérides). Los almanaques se obtienen en [CelesTrak \(1990-2016\)](#), y se selecciona el conjunto que corresponde a los instantes en los que se cuenta con datos a analizar.

Satélites en Vista

En base a la estimación de la posición del usuario dada por los TLE y de los satélites de GPS dada por los almanaques, se puede estimar el ángulo con el cual se recibe la señal de estos últimos en función del tiempo. Dada la gran distancia existente entre los satélites de GPS y el usuario, la estimación de este ángulo no resulta afectada por pequeños errores en la estimación de posición.

En el ángulo de arribo de la señal interviene la orientación de la antena receptora. Por simplicidad, se asume que la normal de la antena se encuentra paralela al vector que apunta del centro de la tierra a la posición del usuario. Esto es equivalente a considerar que el plano de la antena es aproximadamente tangente a la trayectoria del móvil. A falta de mayor información esta simplificación resulta razonable.

En base al ángulo de arribo de la señal se pueden determinar los satélites que debería tener en vista el RGPS en cada instante. Para la obtención de esta información se utilizan datos totalmente independientes de la información provista por el RGPS, consistente en los mencionados TLE y la información de almanaques.

Solución del GPS de Plataforma

Para la comparación de la solución de navegación obtenida por el RGPS se requiere una mejor estimación de la posición que la provista por los TLE. Para ello se utiliza la solución de navegación obtenida por el receptor de GPS de plataforma del SAC-D, que forma parte de la información de telemetría.

7.2.3. Operación de las Etapas de Adquisición y Seguimiento de Señal

Tal como se describe en la sección 7.1.2, el proceso de recepción de la señal GPS consta de dos etapas fundamentales: adquisición y seguimiento. La primera consiste en determinar la frecuencia de portadora y el retardo de código de la señal recibida desde un satélite de GPS para lo cual es necesario ensayar todas las combinaciones posibles de valores de ambos dentro de una grilla discreta, y mediante un test estadístico decidir la presencia o ausencia de señal. Una vez determinados estos parámetros, el receptor puede comenzar la etapa de seguimiento, durante la cual se recupera la señal de datos enviados por el satélite y se obtienen las mediciones de pseudo-rango y delta-rango a la vez que se ajustan las estimaciones realizadas siguiendo las variaciones de frecuencia de portadora y de retardo de la función de código de la señal recibida.

En la figura 7.6 se muestran los satélites asignados por canal en función del tiempo para un intervalo de operación en órbita del RGPS. El eje de las abscisas indica el tiempo relativo a un determinado valor de la marca de tiempos que rotula los datos, denominada OBT (*On Board Time*); mientras que el eje de las ordenadas indica un número de satélite particular (de 1 a 32).

Las líneas de trazo fino en tonos de gris/negro indican la visibilidad esperada de un determinado satélite en función del tiempo. Las líneas en negro se utilizan para indicar que la visibilidad se produce con una elevación mayor a 30° mientras que las líneas en gris indican que esta visibilidad se produce con una elevación entre 0° y 30° . Estas gráficas se obtienen a partir de la información de TLEs y de los almanaques de la constelación GPS.

Las líneas de trazo grueso en cian indican que un determinado satélite se encuentra asignado para adquisición en un determinado canal del RGPS. Las líneas en trazo grueso en rojo indican que se realizó la primer etapa de adquisición de la señal de GPS, las líneas en azul indican que se realizó la adquisición y sincronización de esta señal, y las líneas en verde que se logró demodular la información de efemérides a partir del mensaje de navegación modulado en esta señal (y que, obviamente, se mantiene el sincronismo de la señal). Por su parte, la línea negra vertical a trazos indica el instante a partir del cual se cuenta con solución de navegación. Estas gráficas se obtienen a partir de la información transmitida por el RGPS operando en órbita.

Puede observarse que en los primeros instantes se realiza la búsqueda de un primer

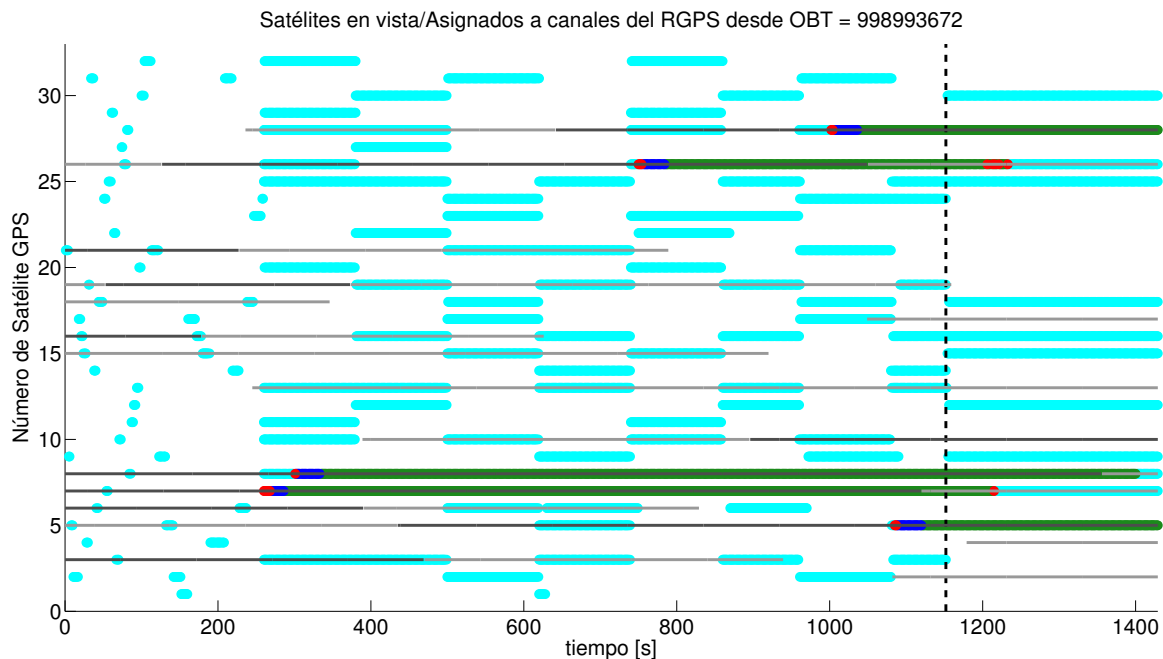


Figura 7.6: Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0° y 30° (—); satélites asignados a un canal para, búsqueda (●), adquirido (●), sincronizado (●) y con efemérides decodificadas (●).

satélite probando de a uno por vez. Para ello, como se describe previamente se utiliza la totalidad de los correladores disponibles (240), cambiando de satélite cada $3 \sim 4$ segundos (correspondiendo a integraciones no coherentes de 2 ms). Esto se puede observar en el intervalo de aproximadamente 0 a 100 segundos en la figura 7.6. Dado que no se logra la adquisición de ningún satélite en esta etapa se pasa a una etapa de búsqueda con correlaciones más largas, cambiando de satélite cada $9 \sim 10$ segundos (correspondiendo a integraciones no coherentes de 6 ms). Esto se observa en el intervalo de aproximadamente 100 a 260 segundos.

Una vez que se logra la adquisición de un satélite (el 7, en la figura 7.6), el RGPS pasa a operar con cada uno de sus 12 canales de correlación de manera independiente. En esta etapa se realiza la búsqueda en paralelo de otros posibles satélites. Se observa también que el intervalo dedicado a la búsqueda se prolonga, dado que se cuenta con menos correladores por cada canal (20, en este caso).

Luego de la adquisición, se produce la sincronización completa de la señal y la demodulación de efemérides del satélite adquirido. En instantes siguientes se lleva a cabo la adquisición, sincronización y demodulación de efemérides para un segundo satélite (el 8, en la figura 7.6).

La detección de un tercer y cuarto satélite es un proceso que demora más tiempo. Se puede ver que el satélite 26 es detectado en el segundo intento, mientras que el satélite 28 es detectado luego de dos intentos fallidos. Se puede observar también la detección de un quinto satélite (el 5), luego de un primer intento fallido. La detección de un satélite es un proceso estadístico, en el cual existe siempre la posibilidad de no detectarlo, que depende entre otros factores, de la relación señal a ruido. Así, la no detección de un satélite, en algún intento, no indica un comportamiento anómalo del RGPS. Se puede ver que estas no-detecciones tienen

lugar para otros satélites en diferentes instantes.

Luego del cálculo de posición, si el RGPS cuenta a bordo con un almanaque relativamente actual (esto implica que logra demodular el almanaque a partir del mensaje transmitido por los satélites de GPS, ya que el que posee almacenado en memoria desde la última reprogramación del RGPS cuenta con una antigüedad de entre 1 y 2 años, resultando obsoleto), puede estimar cuáles son los satélites que deberían estar visibles en su ubicación, y priorizar la búsqueda de éstos. Se estima que esto no sucedió en este caso, ya que los satélites asignados no se corresponden con los satélites en vista. Este hecho, sumado a la “baja visibilidad” analizada en la sección 7.2.4, hace más laboriosa la detección de nuevos satélites; mientras que debido a la dinámica del vehículo, los satélites adquiridos comienzan a quedar fuera de visibilidad, y van siendo perdidos en un lapso relativamente corto.

En la figura 7.7, correspondiente a otro intervalo de operación en órbita, se observa que luego de la adquisición de un primer satélite, el RGPS pasa a operar con sus canales de manera independiente. Sin embargo, no se logra la sincronización de la señal de este satélite. Nuevamente, esto no debe interpretarse como un mal funcionamiento del RGPS, ya que puede deberse a que la detección se produjo por una “falsa alarma”, o bien que la potencia de la señal recibida no fue suficiente para superar la etapa de sincronismo. Luego, el RGPS es capaz de detectar, y demodular la señal de otros satélites con el mismo desempeño que el analizado previamente. En la figura 7.8 se puede apreciar que sucede esto mismo, pero en un segundo intento, la señal del satélite 25 es detectada con éxito.

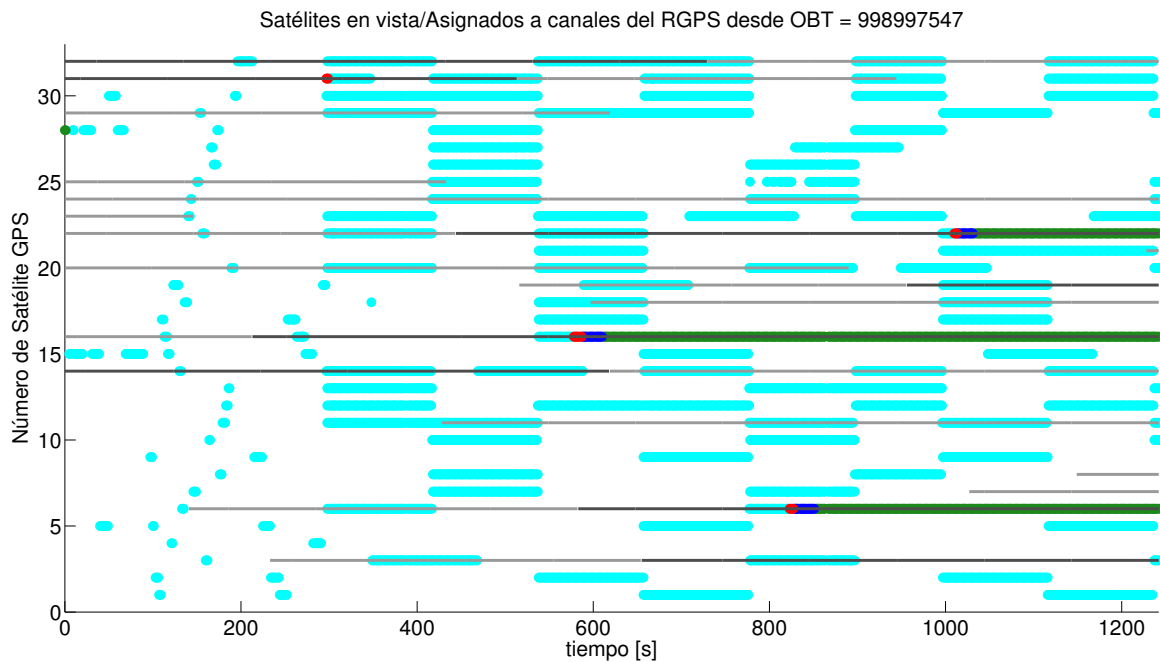


Figura 7.7: Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0 y 30° (—); satélites asignados a un canal para, búsqueda (—), adquirido (—), sincronizado(—) y con efemérides decodificadas (—).

Se puede observar que si bien las rutinas de adquisición operan de manera adecuada, se requiere demasiado tiempo para lograr la adquisición de al menos 4 satélites, el mínimo necesario para la obtención de la solución de navegación. En base a las gráficas de visibilidad estimada de los satélites, puede analizarse que los satélites que han podido ser detectados,

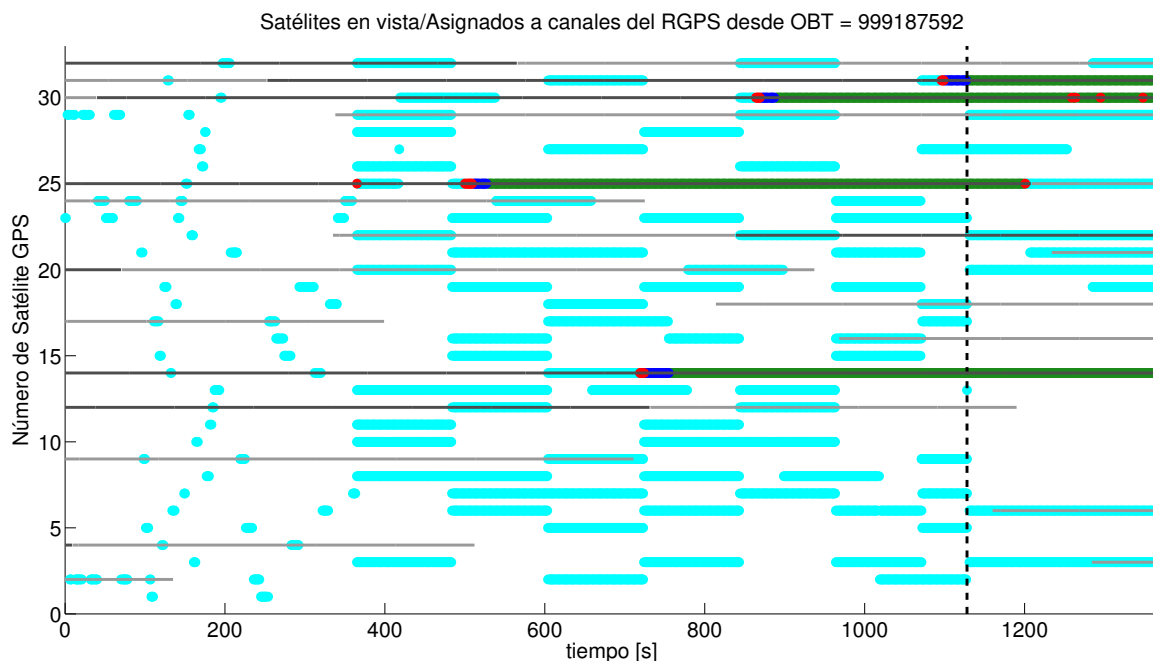


Figura 7.8: Visibilidad de satélites en función del tiempo, con elevación mayor a 30° (—), y con elevación entre 0 y 30° (---); satélites asignados a un canal para, búsqueda (—), adquirido (—), sincronizado (—) y con efemérides decodificadas (—).

han sido aquellos que eran vistos con una elevación mayor a 30° . También se puede observar que en general la desincronización y el posterior desenganche de los satélites (paso de verde a rojo, y luego a cian ó no asignado) ocurre cuando la elevación disminuye por debajo de los 30° . Un comportamiento similar se observa en el análisis de la operación para otros ciclos de encendido.

7.2.4. Potencia de Señal en Función de la Elevación

Para tratar de explicar el comportamiento descrito en la sección previa, analizamos la dependencia entre la relación de potencia de portadora a potencia de ruido (C/N_0) con la que se recibe la señal de cada satélite⁴, y la elevación estimada de dicho satélite. A estos efectos, en la figura 7.9 se presenta el valor medio y el intervalo $\pm 1\sigma$ de los valores de C/N_0 observados por el RGPS en función de la elevación. Para presentar estos datos, se discretiza el intervalo de elevación cada $2,5^\circ$, y los puntos mostrados corresponden al centro de cada intervalo. Para la confección de esta gráfica se utilizó toda la información disponible de los ciclos de encendido del RGPS operando en órbita.

Para complementar esta gráfica, en la figura 7.10 se presenta el porcentaje de las muestras analizadas que corresponden a cada intervalo de C/N_0 . Se puede observar aquí que para grandes elevaciones (cercasas a 90°) se tienen pocas muestras, dado que esta situación es muy poco probable debido a la geometría de la ubicación de los satélites de GPS y el usuario (esta característica también se observa en un receptor de GPS ubicado en tierra).

⁴En rigor, esto se trata de una estimación de la relación potencia de portadora a ruido que realiza el mismo RGPS.

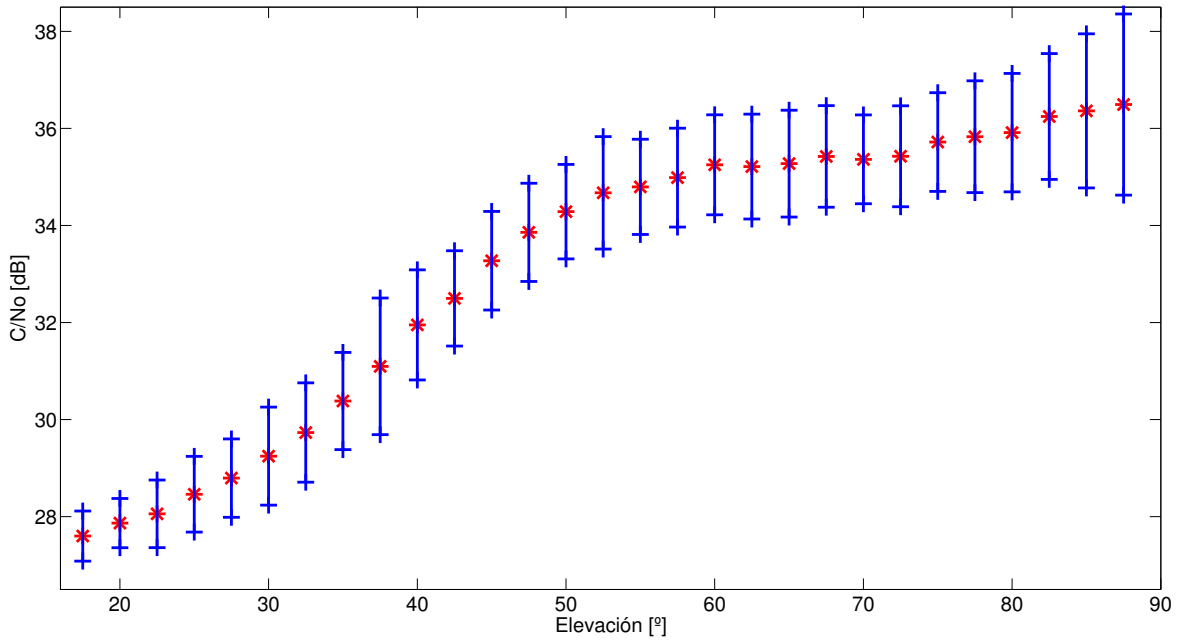


Figura 7.9: Media (*) e intervalo $\pm 1\sigma$ (+) de la relación de potencia de portadora a ruido (C/N_0) en función de la elevación.

Por otra parte, para elevaciones bajas, se cuenta con muy poca cantidad de muestras. Por ejemplo, para elevaciones menores a 25° se tiene menos del 0,5% de los datos, y para elevaciones menores a 30° se tiene cerca del 5% de los datos. Esto se atribuye a que para elevaciones demasiado bajas el patrón de irradiación de la antena utilizada presenta una gran atenuación, lo que provoca que la señal se reciba con potencia demasiado baja como para que el RGPS sea capaz de adquirir y/o mantener el enganche de la misma. En los valores centrales, donde la cantidad de muestras es más cercana a uniforme se puede apreciar esta fuerte dependencia del C/N_0 con la elevación.

Se observa también que mientras en un receptor de aplicación en tierra los valores máximos de C/N_0 obtenibles son del orden de 45 dB, aquí se obtiene un máximo del orden de 38 dB. Esto se debe a que el RGPS presenta una sensibilidad disminuida por diseño debido a que la antena utilizada es pasiva y se ha colocado un filtro de radiofrecuencia para evitar que los pulsos de alta potencia del instrumento Aquarius ocasionasen daños en el propio RGPS (López La Valle *et al.*, 2009).

La dispersión de los valores mostrados puede deberse a la aproximación realizada para estimar el ángulo de elevación, y también a la dependencia del patrón de irradiación de la antena con respecto al azimut (no necesariamente tiene simetría axial perfecta).

Dado que el proceso de detección no posee las mismas características que el posterior seguimiento de señal por parte de los lazos de *tracking*, soportando en general estos últimos una relación C/N_0 menor, resulta de utilidad además, analizar con qué relación C/N_0 se logra efectivamente la detección de la señal. En la figura 7.11 se presentan los porcentajes de muestras que han podido ser detectadas en función de la relación C/N_0 . Se observa que para valores de C/N_0 menores a 30 dB no es posible realizar la detección. Por su parte, el bajo porcentaje asignado para valores grandes se debe a dos factores: en primer lugar, del análisis previo se desprende que estos valores son poco probables; en segundo lugar, un valor

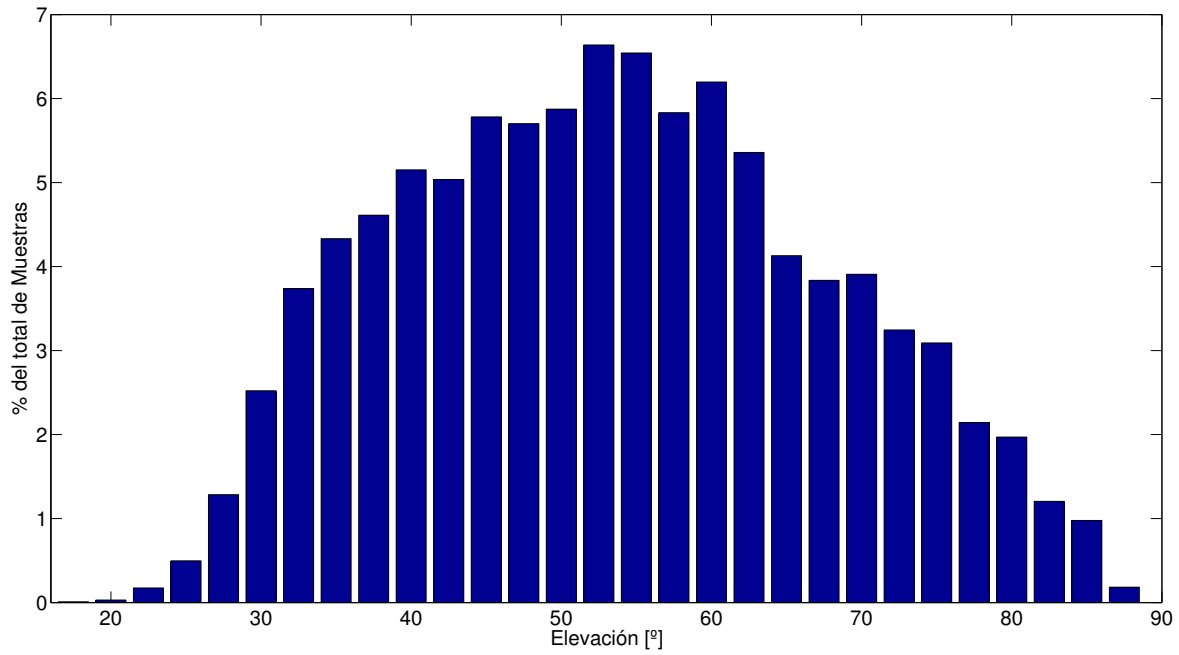


Figura 7.10: Porcentaje de muestras analizadas en función de la elevación.

de C/N_0 alto se da temporalmente luego de un valor más pequeño (la elevación con que se recibe la señal es creciente y luego decreciente en el tiempo), con lo cual es probable que la detección haya tenido lugar en un instante previo, con un valor de C/N_0 menor (Cogo *et al.*, 2013a).

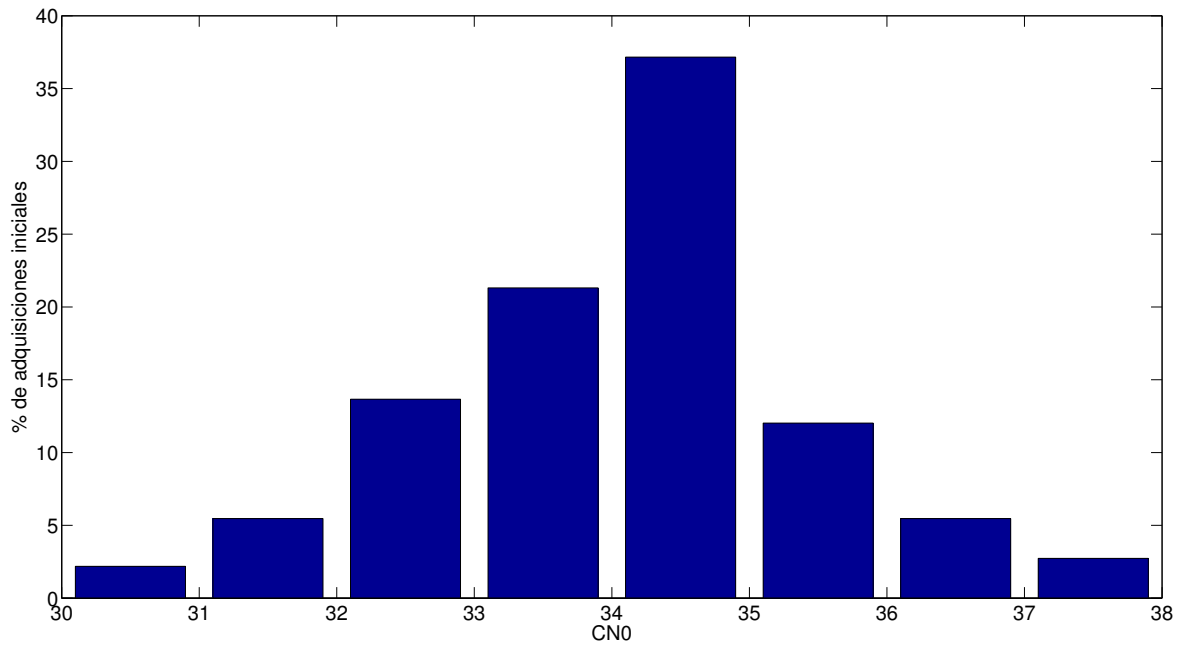


Figura 7.11: Porcentaje de muestras detectadas, sobre el total de detectadas, en función del C/N_0 .

De lo anterior pueden obtenerse dos conclusiones interesantes. En primer lugar, resulta muy poco probable realizar la adquisición de la señal de un satélite cuya elevación sea menor a 30° . En segundo lugar, resulta muy poco probable mantener el seguimiento de señal de un

satélite cuya elevación sea menor a 20° . Esto reduce notablemente la visibilidad efectiva de satélites con la que tiene que lidiar el RGPS. Para completar el análisis previo y en línea con estas conclusiones, en la figura 7.12 se presenta la evolución temporal de la relación C/N_0 para los satélites que se encontraron en seguimiento en un determinado intervalo de operación del RGPS.

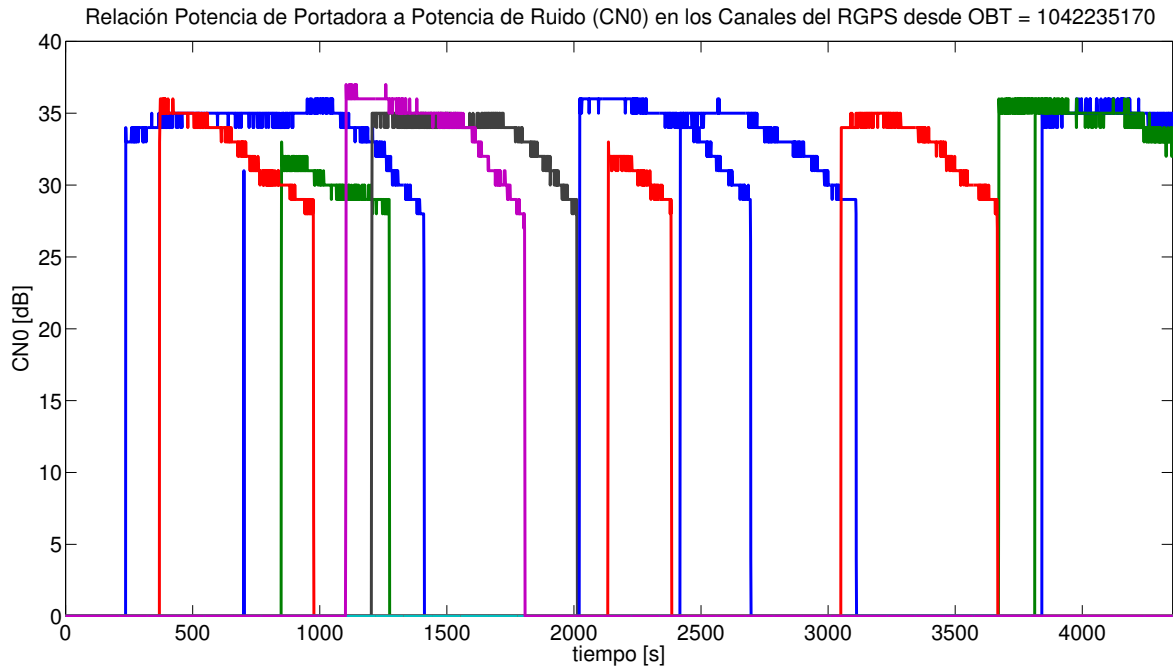


Figura 7.12: Relación C/N_0 en función del tiempo.

7.2.5. Solución de Navegación

Para analizar el comportamiento de la etapa de navegación, se contrastan las soluciones de posición y velocidad obtenidas por el RGPS con las soluciones obtenidas por el GPS de plataforma del SAC-D. Para ello, debe considerarse que, en primer lugar, las soluciones del GPS de plataforma con las que se cuenta están muestreadas a un período de 8 segundos, mientras que las soluciones del RGPS lo están cada 1 segundo. En segundo lugar, las soluciones no corresponden necesariamente a los mismos instantes.

Para llevar a cabo la comparación, se interpolan las soluciones del GPS de plataforma en los instantes en los cuales se cuenta con solución de RGPS. Dado que los puntos utilizados para la interpolación están sujetos al error de estimación del instrumento, los puntos interpolados quedarán afectados por este error más el error propio de la interpolación. Además, esta comparación se basa en el hecho de que se conoce con buena exactitud los instantes a los cuales corresponden cada una de las mediciones. Estos instantes son estimados por los propios instrumentos, lo que introduce una fuente de error adicional, aunque aparentemente despreciable.

Con lo dicho, se debe considerar que la comparación efectuada sirve a los efectos de un análisis cualitativo del comportamiento, más que para establecer una métrica de desempeño, ya que se están comparando dos estimados entre sí, sujetos cada uno a sus propios errores.

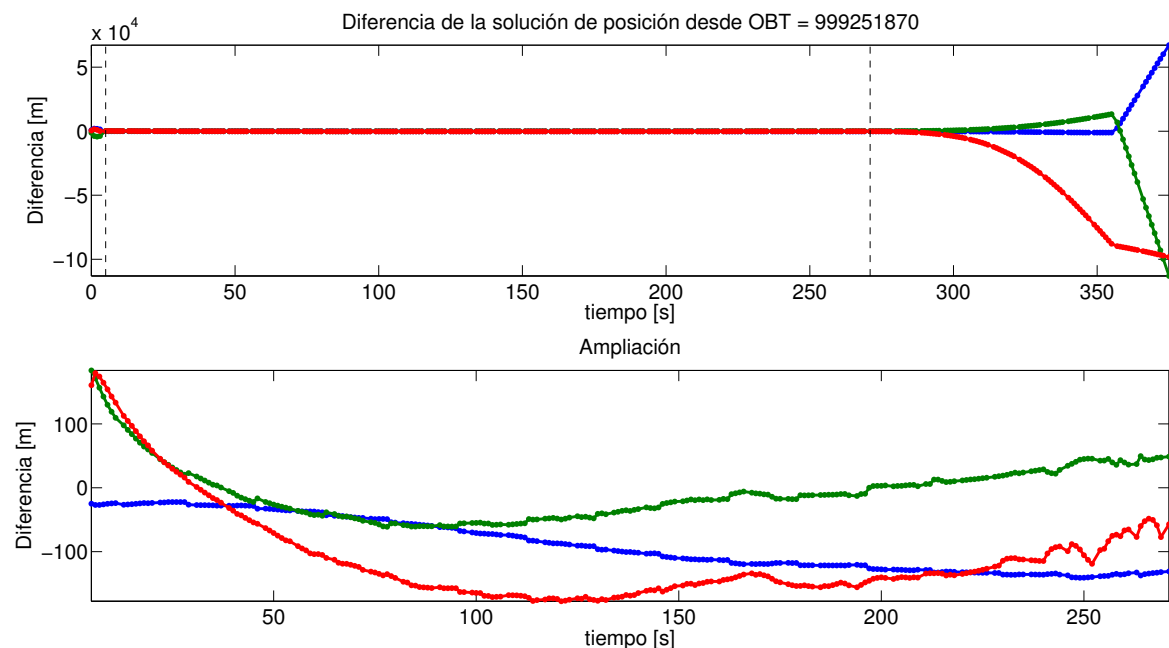


Figura 7.13: Comparación entre la solución de posición del RGPS y la del GPS de plataforma (interpolación). Coordenadas ECEF x (—), y (—), z (—).

En las figuras 7.13 y 7.14 se muestra el resultado de esta comparación para un determinado intervalo de operación del RGPS. En los primeros instantes se observa una gran discrepancia en las soluciones, mientras se alcanza la convergencia del EKF del RGPS. Luego, la discrepancia se encuentra dentro de los cientos de metros (en el caso de posición) y de las decenas de metros por segundo (en el caso de la solución de velocidad).

Resulta interesante analizar, que tal como se muestra en la figura 7.15, en estos instantes se cuenta con tan sólo cuatro satélites para el cálculo de navegación, es decir, la cantidad mínima necesaria para obtener una solución puntual. En el final del intervalo, se comienzan a perder satélites, con lo cual se incrementa la discrepancia entre las estimaciones. Esto es, con un número menor de satélites, se puede mantener la operación del filtro de navegación, pero inevitablemente la varianza del error de la estimación obtenida resulta incrementada. Esta discrepancia se acentúa hacia el final del intervalo, en el cual se cuenta con tan sólo 2 satélites para navegación. Luego de transcurrido un lapso en el cual la solución se obtiene por extrapolación, el RGPS estima que el error obtenido es inaceptable, por lo cual opta por no continuar la propagación. En este caso la diferencia observada se debe a la evolución propia de la solución del GPS de plataforma. Esto se visualiza como un quiebre en la comparación de la solución de posición y como un salto en la comparación de la solución de velocidad.

En la figura 7.16 se presentan las soluciones de posición obtenidas en los diferentes intervalos de operación, convertidas a latitud y longitud, comparadas con la solución del GPS de plataforma.

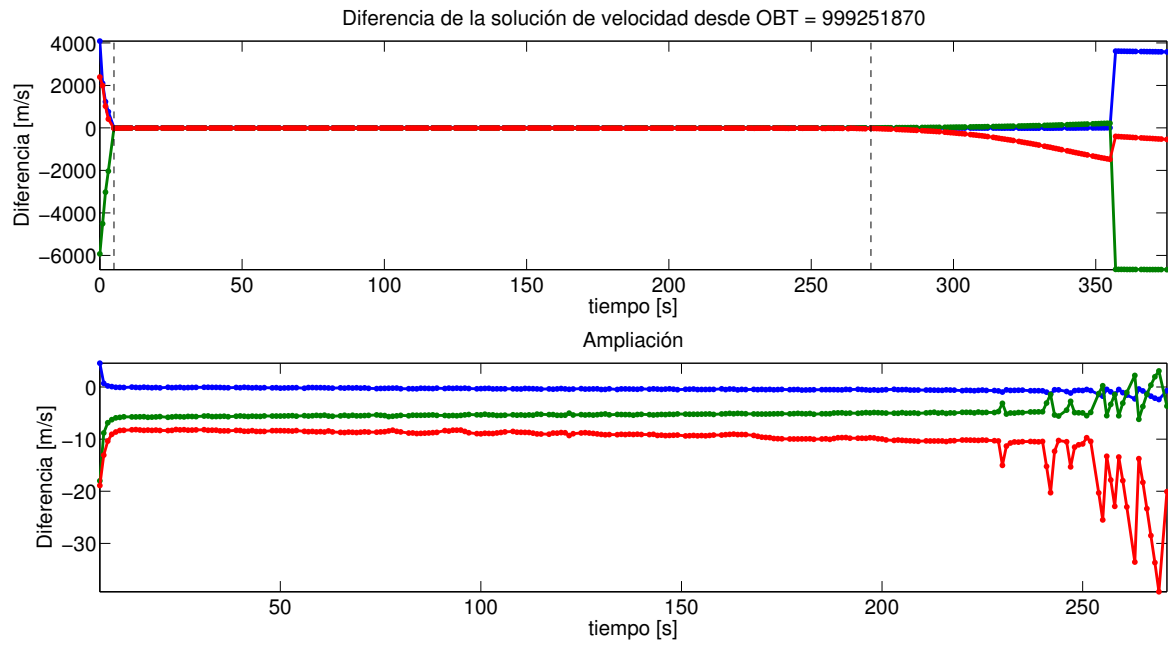


Figura 7.14: Comparación entre la solución de velocidad del RGPS y la del GPS de plataforma (interpolación). Coordenadas ECEF x (—), y (—), z (—).

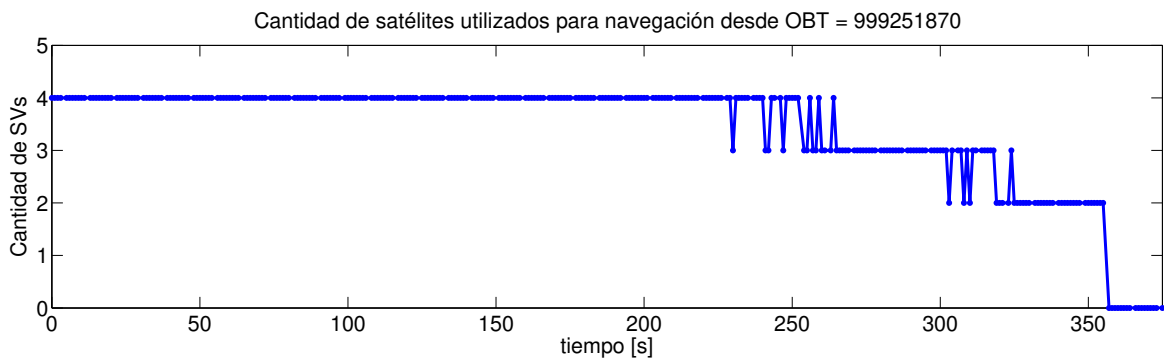


Figura 7.15: Cantidad de satélites utilizados en la navegación.

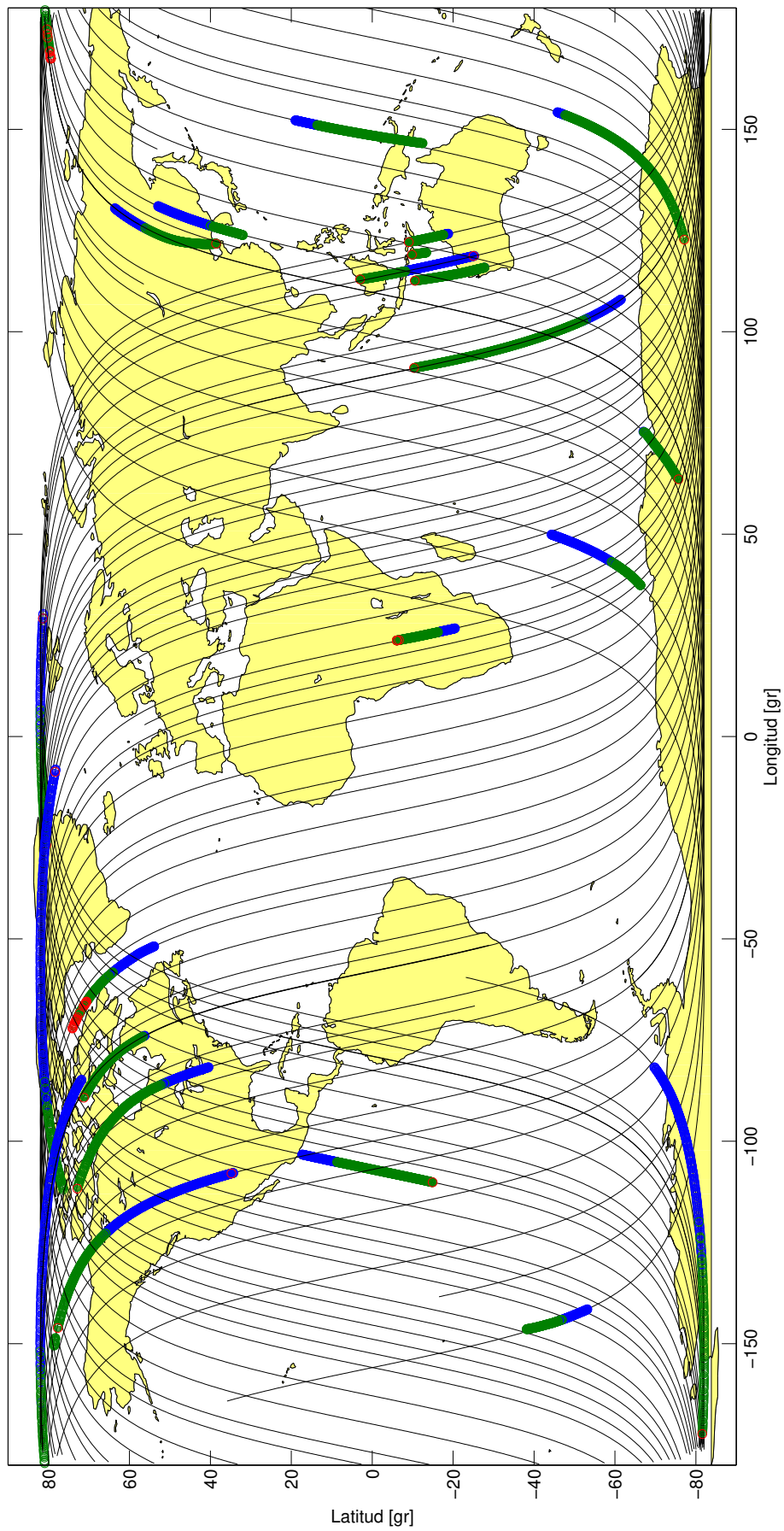


Figura 7.16: Soluciones de posición obtenidas por el RGPS con cuatro o más satélites (\circ), con entre 1 y 3 satélites (\circ), y con 0 satélites (\circ), comparadas con la solución del GPS de plataforma.

7.2.6. Conclusiones del Análisis

Del análisis de los datos se puede concluir que la etapa de adquisición/seguimiento presenta un comportamiento adecuado, es decir de acuerdo a lo esperado, considerando la baja potencia de señal (en rigor, de relación C/N_0) con que cuenta el RGPS.

Una conjetura adicional es que la obsolescencia del almanaque con que se cuenta por defecto impide que la búsqueda de satélites se oriente a los que realmente estarían en vista en la posición de usuario. Para la decodificación completa de un nuevo almanaque se requiere la correcta recepción del mensaje de navegación, es decir, contar con satélites en vista durante un intervalo prolongado de tiempo.

A partir del análisis de los datos de C/N_0 versus elevación se puede concluir que para elevaciones inferiores a los 30° es muy poco probable la adquisición de un satélite, siendo el seguimiento capaz de llevarse a cabo con elevaciones de hasta 20° . Esto se debe al efecto conjunto del patrón de irradiación de la antena utilizada y a la reducción de sensibilidad del RGPS debida a la incorporación de un filtro antes de la primer etapa de amplificación de RF, para protección contra los pulsos de alta potencia del instrumento Aquarius. En esta situación, resulta muy poco factible que en la navegación se cuente con más de cuatro, o cinco satélites disponibles. Se observa que, pese a esto, las rutinas de navegación presentan un comportamiento adecuado, en comparación con la solución obtenida por el GPS de plataforma.

Luego de un lapso en operación nominal, y por las circunstancias ya descriptas, puede explicarse que el RGPS comience a perder satélites en vista. En este caso, el RGPS obtiene su solución de navegación en base a propagación de estados, incorporando las mediciones con las que cuenta. Esta operación se lleva a cabo hasta que la varianza del error de estimación supera un dado umbral. De aquí en adelante el RGPS toma la decisión de no continuar esta propagación en los instantes futuros.

Es este último modo de operación en el cual, luego de transcurrido un intervalo, el RGPS deja de funcionar de manera nominal y debe ser re-encendido para que vuelva a quedar en un modo operativo. Es de destacar que esta falla se encuentra potenciada por las condiciones enumeradas previamente, que hacen que la pérdida de satélites sea habitual, la adquisición de nuevos satélites dificultosa, y que tengan lugar los eventos luego de los cuales se llega al punto de falla. Es decir, en condiciones menos desfavorables sería muy poco frecuente su ocurrencia. Finalmente, se destaca que este análisis ha permitido detectar y corregir varios defectos (*bugs*) en el software.

7.3. Posprocesamiento

En base a la información de las mediciones de *tiempo de transmisión* y de *doppler de portadora* disponibles durante la operación (ver tabla 7.1) es posible obtener mediante posprocesamiento, la solución de navegación del RGPS. Para esto, se requiere contar con las efemérides transmitidas por el sistema en los instantes correspondientes, las cuales se pueden obtener por ejemplo en NAIC (2004-2016). En base a esta información, y utilizando los algoritmos descriptos en el capítulo 6, se obtienen los estados de los satélites, y las mediciones de pseudo-rango y delta-rango con sus correspondientes correcciones.

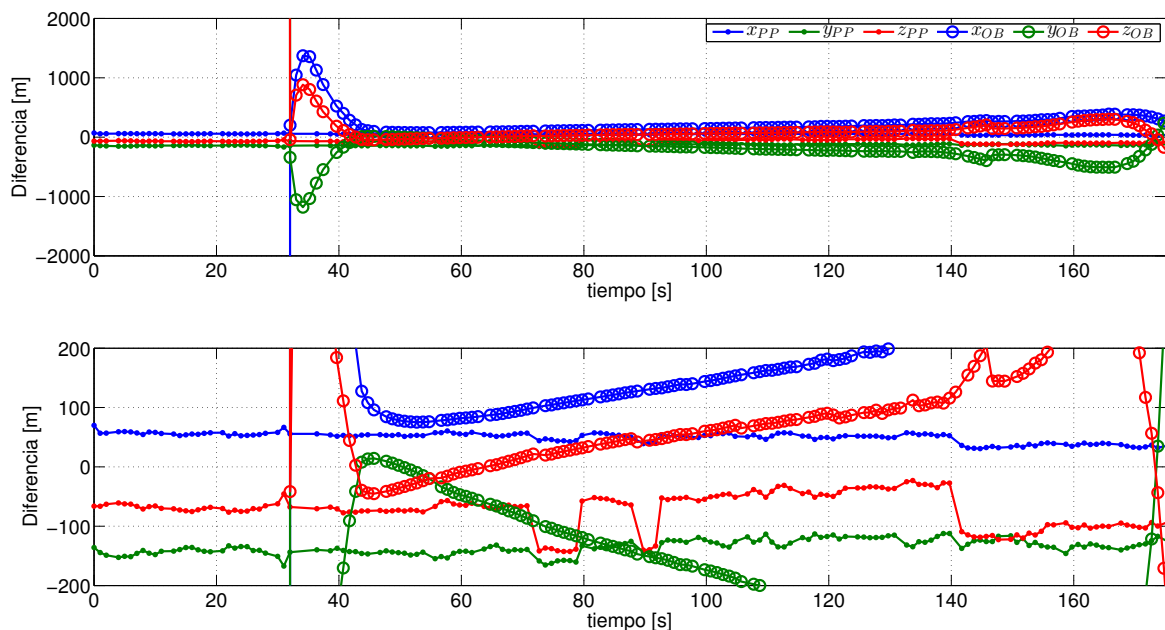


Figura 7.17: Error en la solución de posición obtenida a bordo (OB) y mediante post-procesamiento (PP).

En las figuras 7.17 y 7.18 se presentan los resultados de error en la solución puntual de posición y velocidad (obtenidas con los algoritmos descritos en el capítulo 6), comparados con los errores en las soluciones obtenidas a bordo en los mismos instantes. Se puede observar que dado que en el posprocesamiento se cuenta con la información de efemérides, la solución de navegación puede obtenerse en todos los instantes en los que se tienen suficientes mediciones.

Puede observarse además, que el error obtenido en el posprocesamiento es inferior al obtenido a bordo del satélite. En base a este análisis se logró detectar un error en el armado de las mediciones de delta-rango llevadas a cabo a bordo, lo que podría explicar estas discrepancias. Básicamente, en la operación a bordo estas mediciones se generaban en base a la variación de lo que se denomina fase de portadora integrada (Parkinson y Spilker, 1996b), mediciones que presentan una varianza de ruido menor, pero que introducen errores en condiciones de alta dinámica⁵; en lugar de utilizar la desviación doppler instantánea.

A los efectos de complementar el análisis, en la figura 7.19, se presentan las estimaciones de relación señal a ruido observadas en las mediciones utilizadas.

⁵Esto puede interpretarse como una promediación de las mediciones de doppler en el intervalo entre mediciones ≈ 1 s.

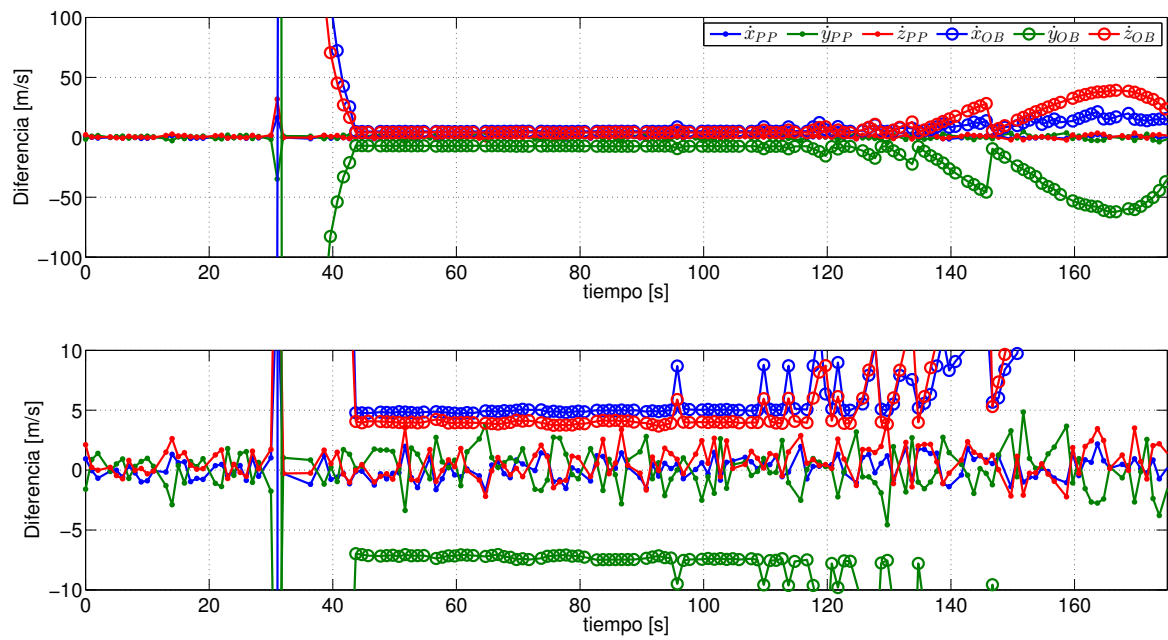


Figura 7.18: Error en la solución de velocidad obtenida a bordo (OB) y mediante post-procesamiento (PP).

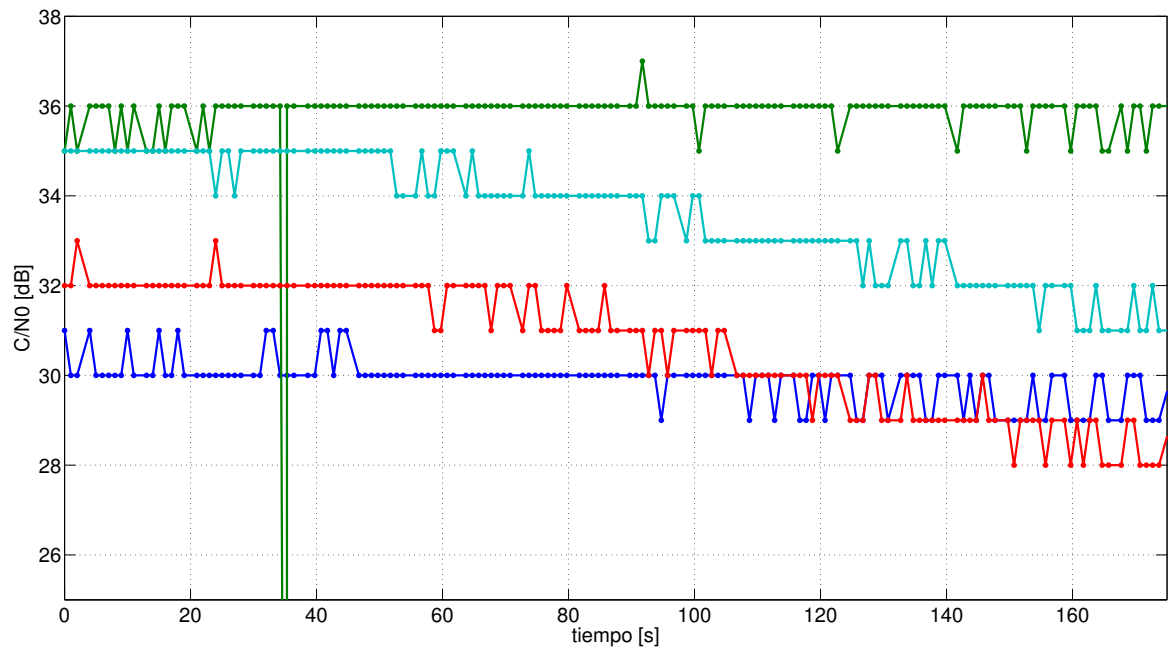


Figura 7.19: Relación señal a ruido en las mediciones utilizadas.

7.4. A Modo de Conclusión

En este capítulo se presenta tanto el diseño del *hardware* y el *software*, como los resultados de operación en órbita de un receptor de GPS (referido como RGPS) integrado a bordo del satélite argentino SAC-D. Además, se presentan los resultados obtenidos mediante el procesamiento de las mediciones recabadas a bordo por el RGPS.

El análisis de estos resultados permitió identificar fallas que no habían podido ser detectadas en las etapas de diseño y ensayo⁶ previas a la puesta en órbita, permitiendo la corrección de los errores de implementación con vistas a futuros desarrollos.

⁶Cabe remarcar estas etapas fueron realizadas en tiempo relativamente acotado, y sin disponer de los instrumentos de validación acordes, como un simulador de señales GNSS

CAPÍTULO 8

COMPARACIÓN DE MODELOS Y ESTRATEGIAS DE FILTRADO

En este capítulo analizaremos comparativamente diferentes estrategias de filtrado utilizadas para la navegación de vehículos aeroespaciales con señales GNSS. Si bien tomaremos como caso de estudio el de un satélite LEO, los resultados pueden extenderse, con las consideraciones necesarias (cambio en las magnitudes de las perturbaciones a la órbita, visibilidad de señales GNSS) a la generalidad de los satélites. Por otra parte, los modelos cinemáticos pueden extender su aplicación a cualquier vehículo considerado.

Dado que el problema general contiene múltiples variables entre las que podemos mencionar la visibilidad de señales GNSS (influida por la geometría y por el patrón de irradiación de la antena receptora), el modelo dinámico utilizado en el filtrado y la estrategia de filtrado adoptada, con sus correspondientes variables a ajustar; el análisis presenta casi infinitos casos que deberían ser considerados.

A los efectos de recortar estos infinitos casos, dividiremos el análisis en tres etapas. En un primer lugar, considerando una situación “ideal” de recepción de señales GNSS, compararemos el desempeño de una estrategia de filtrado que utiliza Filtro de Kalman Extendido (EKF), tomando cuatro modelos diferentes para el filtrado: dos modelos cinemáticos y dos modelos dinámicos. En cada uno de estos casos, analizaremos el desempeño que se obtiene con diferentes “sintonías” del filtro. Consideraremos tanto los casos que utilizan un único sistema GNSS (GPS ó GLONASS) como el caso de utilización conjunta (GPS y GLONASS).

En segundo lugar, compararemos el desempeño del EKF con el que se obtendría con otras estrategias de filtrado alternativas. La comparación de las estrategias de filtrado en situaciones que se aparten de la ideal, como las perturbaciones por fuerzas de *thrust* o la baja visibilidad de satélites (incluso la pérdida momentánea de varios de ellos) será analizada en el capítulo 9.

Como ejemplo de aplicación se analiza el caso de utilizar las estrategias de navegación

propuestas para procesar los datos provistos por un receptor de GPS operando a bordo del satélite argentino SAC-D.

8.1. Escenario de Simulación “Ideal”

Definir un escenario de simulación consiste en generar los estados de posición y velocidad (y posiblemente también aceleración) que tendría nuestro vehículo de interés en un determinado intervalo; y en base a estos estados y a una descripción de las constelaciones GNSS sintetizar las mediciones GNSS con las que contaría dicho vehículo en cada punto de su trayectoria. Estas mediciones se procesan con los diferentes métodos de filtrado estadístico propuestos, obteniendo las estimaciones de los estados. De esta manera es posible comparar las soluciones que obtiene cada método de estimación con las soluciones “verdaderas” y analizar el desempeño de dicho método.

Así, el primer paso consiste en generar los estados de posición y velocidad de un satélite LEO, con parámetros orbitales¹ $i = 98^\circ$, $e = 0$, $a = 7,028 \times 10^6$ m, generados a partir del modelo con perturbaciones descrito en la sección 4.5; sin considerar, en un primer momento, las perturbaciones debidas a las fuerzas de *thrust*. Se toma un intervalo de simulación igual al período orbital y un paso de muestreo de 1 segundo. Este intervalo se considera expresado según la escala UTC, y referido a un tiempo t_0 inicial de referencia en dicha escala. Los estados obtenidos se encuentran expresados en coordenadas ECEF.

El segundo paso consiste en obtener el estado de las constelaciones GNSS en el intervalo de simulación considerado. Para ello, se obtiene la representación del intervalo en las escalas de tiempo GPS y GLONASS, tal como se describe en la sección 3.1. En base a la información de almanaques correspondientes a los instantes considerados (disponibles en [CelesTrak \(1990-2016\)](#), [GLONASS \(2005-2016\)](#)), se obtienen los estados de posición de los satélites GPS y GLONASS.

En base a estos estados se determina qué satélites se encuentran visibles en cada punto de la trayectoria del vehículo. Consideraremos que la antena receptora se encuentra orientada con su eje z paralelo al vector posición del vehículo, lo que resulta una buena aproximación de considerar que el plano xy de la antena se encuentra paralelo al plano tangente a la superficie terrestre en dicho punto. Supondremos que la visibilidad se produce para aquellos satélites cuya línea de vista posea una elevación mayor a 5° , con respecto al plano de la antena.

Una aclaración importante es que los estados de los satélites utilizados para determinar la visibilidad corresponden al tiempo de recepción de la señal, y para la generación de las mediciones se requiere de los estados en los tiempos de transmisión, que como a su vez dependen de los estados de los satélites deben resolverse de manera iterativa, tal como veremos a continuación. No obstante, para las consideraciones de visibilidad los cambios son despreciables si se consideran los estados del satélite en los tiempos de recepción en lugar de en los tiempos de transmisión, y la utilización de los primeros simplifica la implementación (simplemente porque el proceso iterativo se realiza sobre un número menor de mediciones).

El paso siguiente consiste en sintetizar las mediciones de tiempo de transmisión o de rango geométrico para cada uno de los satélites en vista en cada instante. Dado que partimos

¹Estos parámetros corresponden a la órbita sin perturbaciones.

de considerar las posiciones de usuario en una serie de instantes, nos interesa conocer las mediciones en dichos instantes. Estos instantes corresponderán a lo que se conoce como tiempo de recepción de la señal. El objetivo es entonces hallar los tiempos de transmisión de cada una de las señales y la posición de los satélites en dichos tiempos de transmisión. Tal como se analiza en las secciones 2.7 y 6.2.4, para un determinado instante k y satélite i , estas cantidades están relacionadas por

$$(TR[k] - TT_i[k]) c = \|\mathbf{r}_i[k]\| = \|\mathbf{s}_i(TT_i[k]) - \mathbf{u}(TR[k])\| \quad (8.1)$$

de donde se desprende que no es posible despejar $TT_i[k]$ de manera directa, debiendo recurrirse por ejemplo a una solución iterativa de la ecuación. En nuestro caso implementaremos la siguiente

$$TT_i^{(m+1)}[k] = TT_i^{(m)}[k] - \left[\frac{\|\mathbf{s}_i(TT_i^{(m)}[k]) - \mathbf{u}(TR[k])\|}{c} - (TR[k] - TT_i^{(m)}[k]) \right] \quad (8.2)$$

tomando como valor inicial $TT_i^{(0)}[k] = TR[k] - 70 \times 10^{-3}$, dado que 70 ms es un valor aproximado al promedio de los tiempos de arribo de las señales. Este procedimiento se repite para el conjunto de satélites i en vista, y para el conjunto de instantes k que dura la simulación.

Una vez que se tienen los tiempos de transmisión (o los rangos geométricos asociados), y las posiciones de los satélites, es posible obtener lo que sería la medición de delta-rango; a partir de las velocidades del usuario y de cada uno de los satélites

$$\dot{r}_i[k] = \mathbf{e}_i[k]'(\dot{\mathbf{s}}_i[k] - \dot{\mathbf{u}}[k]) \quad (8.3)$$

donde

$$\mathbf{e}_i \triangleq \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|}. \quad (8.4)$$

El siguiente paso consiste en modelar el efecto de la deriva y el sesgo del reloj local, y el ruido térmico en las mediciones de pseudo-rango y de delta-rango. Para los primeros se supone el siguiente modelo

$$\dot{b}[k] = T \sum_{n=0}^k \ddot{b}[n] \quad (8.5)$$

$$b_i[k] = B + T \sum_{n=0}^k \dot{b}[n] + d_i \quad (8.6)$$

donde $B \sim \mathcal{U}[-B_0, B_0]$, T es el intervalo entre muestras, y $\ddot{b}[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\ddot{b}})$. En caso de considerar más de un sistema GNSS, con la suposición de que el reloj local es el mismo para ambos, el modelo de deriva se asume igual para ambos, mientras que para el sesgo se asume una diferencia d_i , que se atribuye a las diferencias entre los marcos de referencia temporal de ambos sistemas, que se modela constante en todo el intervalo de simulación. El parámetro d_i será igual a cero para las mediciones de un sistema, e igual a una constante para las mediciones del otro sistema GNSS (es decir, su valor depende de a qué sistema corresponde la i -ésima medición). En nuestro caso tomaremos $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $B_0 = 400$.

Por su parte, el efecto del ruido térmico se modela mediante la adición a las mediciones de pseudo-rango y delta-rango, respectivamente, de las variables

$$\nu_i[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\rho,i,k}^2) \quad (8.7)$$

$$v_i[k] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\dot{\rho},i,k}^2) \quad (8.8)$$

siendo $\nu_i[k]$ y $v_i[k]$ independientes para todo i y para todo k , e independientes entre sí. Es decir, se modelan como dos procesos AWGN independientes.

Con estas consideraciones, las mediciones sintetizadas de pseudo-rango y delta-rango resultan

$$\rho_i[k] = \|\mathbf{s}_i(TT_i[k]) - \mathbf{u}[k]\| + b[k] + \nu_i[k] \quad (8.9)$$

$$\dot{\rho}_i[k] = \mathbf{e}_i[k]'(\dot{\mathbf{s}}_i[k] - \dot{\mathbf{u}}[k]) + \dot{b}[k] + v_i[k]. \quad (8.10)$$

En una primera aproximación, tomaremos $\sigma_{\rho,i,k} = 3$ m, $\sigma_{\dot{\rho},i,k} = 0,3$ m/s, es decir iguales y constantes para todo i y para todo k .

No se consideran efectos adicionales de error sistemático en las mediciones. Por un lado, en caso de considerarse deberían modelarse también la aplicación de las correcciones correspondiente en el algoritmo de navegación; y si estas correcciones son exactas, es decir se toma el mismo modelo para la generación de los errores que para las correcciones, se cancelarán completamente, con lo cual no tiene sentido considerarlas. Por otra parte, si se toman modelos diferentes para la generación y para la corrección de los errores sistemáticos, los mismos darán lugar a errores sistemáticos en la solución de navegación, con lo cual se dificulta la interpretación y comparación de los resultados.

8.2. Modelos Utilizados

Para la formulación de los algoritmos de navegación utilizaremos cuatro variantes del vector de estados, y asociada a cada una de ellas una variante del vector de ruido de modelo. La primer variante, utilizada cuando se implemente la navegación con un único sistema GNSS, incluye dos estados para el sesgo y la deriva del reloj de usuario, tres estados para las coordenadas de posición y tres estados para las coordenadas de velocidad (estos últimos expresados en coordenadas ECEF)

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.11)$$

resultará además de interés, a los efectos de simplificar la descripción, particionar este vector de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{a}}' & | & \mathbf{x}_{\mathbf{b}}' \end{bmatrix}' \quad (8.12)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}k} = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k \end{bmatrix}' \quad (8.13)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}'. \quad (8.14)$$

Asociado a este vector de estado definimos el ruido de modelo, con componentes de aceleración de reloj y en cada una de las coordenadas de posición, de la siguiente manera

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \ddot{b}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.15)$$

La segunda variante, utilizada cuando se implemente la navegación con dos sistemas GNSS, incluye un estado adicional para estimar la diferencia entre los marcos de referencia temporal de ambos sistemas

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & d_k & x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.16)$$

de igual manera, resultará de interés particionar este vector como

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{a}_k}' & | & \mathbf{x}_{\mathbf{b}_k}' \end{bmatrix}' \quad (8.17)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}_k} = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & d_k \end{bmatrix}' \quad (8.18)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}_k} = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.19)$$

Asociado a este vector de estado definimos el ruido de modelo, incorporando una componente para la “aceleración” de la diferencia entre los marcos de referencia, de la siguiente manera

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \ddot{b}_k & \ddot{d}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.20)$$

La tercer variante, incorpora tres estados adicionales para las tres coordenadas de aceleración, también medida en el marco ECEF, y será empleada en la navegación con un único sistema GNSS

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.21)$$

y también la representaremos mediante

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{a}_k}' & | & \mathbf{x}_{\mathbf{b}_k}' \end{bmatrix}' \quad (8.22)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}_k} = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k \end{bmatrix}' \quad (8.23)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}_k} = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.24)$$

Asociado a este vector de estado definimos el ruido de modelo, con una componente de aceleración de reloj y componentes de jerk en cada una de las coordenadas de posición, de la siguiente manera

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \ddot{b}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.25)$$

Finalmente, la cuarta variante, utilizada cuando se implemente la navegación con dos sistemas GNSS, incorpora por sobre la tercera un estado adicional para estimar la diferencia entre los marcos de referencia temporal de ambos sistemas

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & d_k & x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.26)$$

y también la representaremos mediante

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{a}k}' & | & \mathbf{x}_{\mathbf{b}k}' \end{bmatrix}' \quad (8.27)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}k} = \begin{bmatrix} b_k & \dot{b}_k & d_k \end{bmatrix}' \quad (8.28)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} x_k & y_k & z_k & \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}'. \quad (8.29)$$

Asociado a este vector de estado definimos el ruido de modelo, incorporando una componente para la “aceleración” de la diferencia entre los marcos de referencia, de la siguiente manera

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} \ddot{b}_k & \ddot{d}_k & \ddot{x}_k & \ddot{y}_k & \ddot{z}_k \end{bmatrix}' \quad (8.30)$$

No se utilizará una notación especial para identificar cada estado. Simplemente los indicaremos como vector de estados de 8, 9, 11 y 12 componentes para hacer referencia a las cuatro variantes expuestas, respectivamente. La utilización de uno u otro quedará explícita de acuerdo al contexto.

8.2.1. Propagación de los Estados de Sesgo y Deriva

En todos los casos que analizaremos consideraremos que la propagación de los estados de sesgo y deriva (y adicionalmente el estado de diferencia entre los relojes de dos sistemas), descritos por el vector $\mathbf{x}_{\mathbf{a}k}$ está dada por

$$\mathbf{x}_{\mathbf{a}k+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{a}k} \mathbf{x}_{\mathbf{a}k} \quad (8.31)$$

donde

$$\mathbf{F}_{\mathbf{a}k} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

en el caso de considerar un único sistema GNSS ($\mathbf{x}_{\mathbf{a}k}$ tiene sólo dos elementos), y mediante

$$\mathbf{F}_{\mathbf{a}k} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

para el caso de considerar dos sistemas GNSS ($\mathbf{x}_{\mathbf{a}k}$ tiene tres elementos).

8.2.2. Propagación de los Restantes Estados. Enfoque Cinemático.

En caso de adoptar el denominado enfoque cinemático, la propagación de los restantes estados corresponde a un sistema lineal invariante en el tiempo dada por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{b}k} \mathbf{x}_k \quad (8.34)$$

donde $\mathbf{F}_{\mathbf{b}k}$ está dada por las ecuaciones (4.16) y (4.21), resultando

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

en caso de considerar tres estados de posición y tres estados de velocidad en el vector de estado, y

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} & \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & T \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

en caso de considerar tres estados de posición, tres estados de velocidad y tres estados de aceleración en el vector de estado.

Al modelo en el que la propagación de los estados (de posición y velocidad) se realice mediante (8.35) lo denominaremos *Cinemático I*, mientras que al modelo en el que la propagación de estados (de posición, velocidad y aceleración) se realice mediante (8.36) lo denominaremos *Cinemático II*.

8.2.3. Propagación de los Restantes Estados. Enfoque Dinámico.

En caso de utilizar el enfoque que denominaremos dinámico, la propagación de los restantes estados está dada por

$$\mathbf{x}_{\mathbf{b}k+1} = \mathbf{f}_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_{\mathbf{b}k}) \quad (8.37)$$

donde $\mathbf{f}_{\mathbf{b}}(\cdot)$ es una función no-lineal que relaciona el estado en el instante $k+1$ con el estado en el instante k . Para obtener $\mathbf{x}_{\mathbf{b}k+1}$ en función de $\mathbf{x}_{\mathbf{b}k}$ resolveremos las ecuaciones diferenciales planteadas en la sección 4.3 por el método de Runge-Kutta de 4to orden. Consideraremos dos casos de modelo dinámico: el modelo orbital sin perturbaciones, y el modelo orbital que incorpora el término correspondiente a J_2 en las perturbaciones a causa de la distribución no uniforme de masa de la Tierra. A los modelos obtenidos en estos dos casos los denominaremos *Dinámico I* y *Dinámico II*, respectivamente.

Además, consideraremos dos casos adicionales similares a los anteriores pero incorporando en cada caso tres estados adicionales para estimar la aceleración no modelada en cada uno de ellos, y considerando que la perturbación está dada por el *jerk*. Es decir, consideraremos el modelo orbital sin perturbaciones, agregando tres estados para estimar la aceleración no modelada por éste; y el modelo orbital que incorpora el término correspondiente a J_2 , agregando tres estados para estimar la aceleración no modelada por éste. A los modelos obtenidos en estos dos casos los denominaremos *Dinámico III* y *Dinámico IV*, respectivamente.

Se debe tener en cuenta que estas últimas dos variantes difieren del caso del modelo Cinemático II, en el hecho de que las tres coordenadas de aceleración se utilizan para estimar la aceleración no contemplada en el modelo dinámico. Consecuentemente, la aceleración así estimada se incorpora en la propagación de estados por el método de Runge-Kutta de 4to orden.

Para la formulación del EKF se necesita además contar con el modelo linealizado en torno a la estimación previa del estado, para lo cual se utiliza la ecuación (4.65), con lo cual se obtiene

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{T^2}{2}a_1 & 0 & 0 & T & T^2\dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{T^2}{2}a_2 & 0 & -T^2\dot{\Omega}_{ie} & T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2}a_3 & 0 & 0 & T \\ Ta_1 & 0 & 0 & 1 & 2T\dot{\Omega}_{ie} & 0 \\ 0 & Ta_2 & 0 & -2T\dot{\Omega}_{ie} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Ta_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

donde

$$a_1 = a_2 = \left(\dot{\Omega}_{ie}^2 - \frac{\mu}{r_k^3} \right) \quad (8.39)$$

$$a_3 = -\frac{\mu}{r_k^3} \quad (8.40)$$

si se considera sólo el modelo orbital sin perturbaciones (Dinámico I), y

$$a_1 = a_2 = \dot{\Omega}_{ie}^2 - \frac{\mu}{r_k^3} - \frac{\mu R_e^2 J_2}{r_k^7} (r_k^2 - 5z_k^2) \quad (8.41)$$

$$a_3 = -\frac{\mu}{r_k^3} - \frac{\mu R_e^2 J_2}{r_k^7} (3r_k^2 - 5z_k^2) \quad (8.42)$$

si se considera el modelo orbital que incorpora el término correspondiente a J_2 en las perturbaciones a causa de la distribución no uniforme de masa de la Tierra (Dinámico II).

En caso de incorporar tres estados para estimar la aceleración no modelada, la matriz $\mathbf{F}_{\mathbf{b}k}$ resulta

$$\mathbf{F}_{\mathbf{b}k} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{T^2}{2}a_1 & 0 & 0 & T & T^2\dot{\Omega}_{ie} & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{T^2}{2}a_2 & 0 & -T^2\dot{\Omega}_{ie} & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2}a_3 & 0 & 0 & T & 0 & 0 & \frac{T^2}{2} \\ Ta_1 & 0 & 0 & 1 & 2T\dot{\Omega}_{ie} & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & Ta_2 & 0 & -2T\dot{\Omega}_{ie} & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & Ta_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.43)$$

donde, al igual que para el modelo Dinámico I

$$a_1 = a_2 = \left(\dot{\Omega}_{ie}^2 - \frac{\mu}{r_k^3} \right) \quad (8.44)$$

$$a_3 = -\frac{\mu}{r_k^3} \quad (8.45)$$

si se considera sólo el modelo orbital sin perturbaciones (Dinámico III), y al igual que en el modelo Dinámico II

$$a_1 = a_2 = \dot{\Omega}_{ie}^2 - \frac{\mu}{r_k^3} - \frac{\mu R_e^2 J_2}{r_k^7} (r_k^2 - 5z_k^2) \quad (8.46)$$

$$a_3 = -\frac{\mu}{r_k^3} - \frac{\mu R_e^2 J_2}{r_k^7} (3r_k^2 - 5z_k^2) \quad (8.47)$$

si se considera el modelo orbital que incorpora el término correspondiente a J_2 en las perturbaciones a causa de la distribución no uniforme de masa de la Tierra (Dinámico III).

Estas formulaciones son similares para el caso de utilizar uno o dos sistemas GNSS.

8.2.4. Vinculación de las Perturbaciones

En todos los casos analizados supondremos que las perturbaciones se vinculan linealmente con los estados mediante la matriz \mathbf{G}_k , dada por

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1} & \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

en el caso de considerar el vector de estado de 8 estados,

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 2} & \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

si se considera el vector de estado de 9 estados,

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \\ \mathbf{0}_{9 \times 1} & \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

en el caso de considerar el vector de estado de 11 estados, y por

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ T & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{9 \times 2} & \begin{bmatrix} \frac{T^3}{6} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{T^2}{2} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ T \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

si se considera el vector de estado de 12 estados.

8.2.5. Matriz de Covarianza del Ruido de Modelo

El ruido de modelo representará la “aceleración” de reloj así como las aceleraciones (o *jerk*) que se consideren perturbación en cada uno de los modelos formulados.

Definimos la matriz de covarianza del ruido de modelo como

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ddot{x}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ddot{y}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{z}}^2 \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

en el caso de considerar el vector de estado de 8 estados,

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ddot{x}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{y}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{z}}^2 \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

si se considera el vector de estado de 9 estados,

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\ddot{x}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ddot{y}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{z}}^2 \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

en el caso de considerar el vector de estado de 11 estados, y por

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\ddot{x}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{y}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\ddot{z}}^2 \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

si se considera el vector de estado de 12 estados; donde en todos los casos asumimos que las componentes son no-correlacionadas, e invariantes en el tiempo.

8.3. Comparación de Modelos con EKF

Analizaremos el desempeño del esquema de filtrado con EKF, utilizando los diferentes modelos expuestos previamente, considerando en cada caso tanto la utilización de un único sistema GNSS como la opción multi-sistema. En la tabla 8.1, se describen las variantes a analizar, detallando la dimensión del vector de estado, \mathbf{x}_k y del vector de perturbaciones, \mathbf{w}_k .

Para cada uno de estos modelos se realizan corridas de simulación como las descriptas en la sección 8.1, tomando diferentes valores para la matriz \mathbf{Q}_k , definida en la sección 8.2.5, con

Modelos	Sistema/s GNSS	Dimensión \mathbf{x}_k	Dimensión \mathbf{w}_k
Cinemático I	GPS	8	4
	GLONASS	8	4
	GPS/GLONASS	9	5
Cinemático II	GPS	11	4
	GLONASS	11	4
	GPS/GLONASS	12	5
Dinámico I	GPS	8	4
	GLONASS	8	4
	GPS/GLONASS	9	5
Dinámico II	GPS	8	4
	GLONASS	8	4
	GPS/GLONASS	9	5
Dinámico III	GPS	11	4
	GLONASS	11	4
	GPS/GLONASS	12	5
Dinámico IV	GPS	11	4
	GLONASS	11	4
	GPS/GLONASS	12	5

Tabla 8.1: Diferentes modelos a analizar.

las condiciones (cuando corresponda)

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} \quad (8.56)$$

$$\sigma_j \triangleq \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}}. \quad (8.57)$$

Es decir, consideraremos igual desviación estándar en las aceleraciones en las tres dimensiones.

A la matriz de covarianza del ruido de mediciones, \mathbf{R}_k , la modelaremos mediante

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_\rho^2 \mathbf{I}_{N_k \times N_k} & \mathbf{0}_{N_k \times N_k} \\ \mathbf{0}_{N_k \times N_k} & \sigma_{\dot{\rho}}^2 \mathbf{I}_{N_k \times N_k} \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

donde N_k indica el número de mediciones de pseudo-rango y de delta-rango, en el instante k , tanto si corresponden a dos o a un único un mismo sistema GNSS. Es decir, se considera que el ruido que afecta a las mediciones es independiente, y que todas las mediciones tienen igual varianza. Para el ajuste del filtro se toman estos valores iguales a los configurados para la generación de las mediciones, es decir

$$\sigma_\rho = 3 \text{ [m]} \quad (8.59)$$

$$\sigma_{\dot{\rho}} = 0,3 \text{ [m/s]}. \quad (8.60)$$

Para el análisis de desempeño definimos el error de posición-sesgo al instante k

$$\epsilon_p[k] = \sqrt{\frac{(\hat{x}[k] - x[k])^2 + (\hat{y}[k] - y[k])^2 + (\hat{z}[k] - z[k])^2 + (\hat{b}[k] - b[k])^2}{4}} \quad (8.61)$$

y el error de velocidad-deriva al instante k

$$\epsilon_v[k] = \sqrt{\frac{(\hat{\dot{x}}[k] - \dot{x}[k])^2 + (\hat{\dot{y}}[k] - \dot{y}[k])^2 + (\hat{\dot{z}}[k] - \dot{z}[k])^2 + (\hat{\dot{b}}[k] - \dot{b}[k])^2}{4}}. \quad (8.62)$$

Y consideramos como métrica el error medio cuadrático, sobre K instantes

$$\sqrt{\epsilon_p^2} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (\epsilon_p[k])^2} \quad (8.63)$$

$$\sqrt{\epsilon_v^2} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} (\epsilon_v[k])^2}. \quad (8.64)$$

Definimos además los residuos de pseudo-rango post-filtrado de la siguiente manera

$$\check{\rho}_i[k] = \hat{\rho}_i^+[k] - \rho_i[k] \quad (8.65)$$

donde $\hat{\rho}_i^+[k]$ es la “medición” de pseudo-rango que correspondería a la estimación $\hat{\mathbf{x}}^+[k]$ (se obtienen reemplazando esta estimación en la ecuación del pseudo-rango, (2.14)). De la misma manera, definimos los residuos de delta-rango post-filtrado como

$$\check{\dot{\rho}}_i[k] = \hat{\dot{\rho}}_i^+[k] - \dot{\rho}_i[k] \quad (8.66)$$

donde $\hat{\dot{\rho}}_i^+[k]$ es la “medición” de delta-rango que correspondería a la estimación $\hat{\mathbf{x}}^+[k]$ (se obtienen reemplazando esta estimación en la ecuación del delta-rango, (2.25)).

Obtenemos una estimación de la desviación estándar de estos residuos

$$\sigma_{\check{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N_k} \sum_i (\check{\rho}_i[k] - \bar{\check{\rho}})^2} \quad (8.67)$$

$$\sigma_{\check{\dot{\rho}}} = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N_k} \sum_i (\check{\dot{\rho}}_i[k] - \bar{\check{\dot{\rho}}})^2} \quad (8.68)$$

donde

$$\bar{\check{\rho}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N_k} \sum_i \check{\rho}_i[k] \quad (8.69)$$

$$\bar{\check{\dot{\rho}}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N_k} \sum_i \check{\dot{\rho}}_i[k] \quad (8.70)$$

y en ambos casos la suma en i se realiza sobre todas las mediciones disponibles en el instante k correspondiente.

En las figuras 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5 y 8.6 se presentan los resultados de los errores medios cuadráticos y los residuos de pseudo-rango y delta-rango para los distintos modelos utilizados; en cada caso con diferentes valores de “sintonía” del filtro, considerando sólo mediciones del sistema GPS. En cada caso se indica el punto correspondiente al valor óptimo, tanto en $\sqrt{\epsilon_p^2}$ (error de posición-sesgo) como en $\sqrt{\epsilon_v^2}$ (error de velocidad-deriva). Para complementar, también se indica en la gráfica de residuos el punto correspondiente a dicho óptimo. En las tablas 8.2 y 8.3 se presentan estos valores óptimos.

Puede observarse que en caso de sintonizar el filtro en valores chicos de $\sigma_{\ddot{b}}$ ó $\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j), se obtiene un mayor error. Esta sintonía puede interpretarse como que se confía más en el modelo que en las mediciones; sin embargo, si el modelo no ajusta demasiado bien a la “realidad”² confiar demasiado en el modelo da lugar a errores en la estimación. Dicho de otra manera, el estimador no puede seguir las variaciones del usuario, lo cual redundaría en error de estimación.

Por otra parte, en caso de sintonizar el filtro en valores grandes de $\sigma_{\ddot{b}}$ ó $\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j), también se obtiene un mayor error. Esta sintonía puede interpretarse como que se confía más en las mediciones que en el modelo; sin embargo, como las mediciones están contaminadas por ruido confiar demasiado en ellas conduce a no filtrar este ruido. Dicho de otra manera, el estimador sigue las variaciones en las mediciones dadas por el ruido, lo cual también redundaría en error de estimación.

Modelo	Óptimo	$\sigma_{\ddot{b}}$	$\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_p^2}$	$\sigma_{\ddot{p}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	6,00	$7,7087 \times 10^{-1}$	2,9360
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	6,00	$7,7087 \times 10^{-1}$	2,9360
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,6727 \times 10^{-1}$	2,9368
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$7,6752 \times 10^{-1}$	2,9367
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$8,00 \times 10^{-2}$	$7,6432 \times 10^{-1}$	2,9366
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$4,00 \times 10^{-2}$	$7,8822 \times 10^{-1}$	2,9404
Din. II	Pos	$1,25 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$3,8721 \times 10^{-1}$	2,9617
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$3,8740 \times 10^{-1}$	2,9623
Din. III	Pos	$7,50 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$7,0665 \times 10^{-1}$	2,9452
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$7,1155 \times 10^{-1}$	2,9436
Din. IV	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$4,0627 \times 10^{-1}$	2,9652
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$4,0627 \times 10^{-1}$	2,9652

Tabla 8.2: Resultados de comparación de los diferentes modelos.

Estas observaciones se ponen de manifiesto más claramente en la figura 8.7, donde se toma el valor de $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01^3$, y se comparan los errores obtenidos con los seis modelos presentados en función del valor de $\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j).

²Hablando con propiedad, existen diferencias entre el modelo más realista utilizado para generar las simulaciones y el modelo utilizado en el filtrado

³Que corresponde al óptimo, o es muy cercano al óptimo en todos los casos

Modelo	Óptimo	$\sigma_{\ddot{b}}$	$\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_v^2}$	$\sigma_{\ddot{\rho}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	6,00	$1,5564 \times 10^{-1}$	$2,5046 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	6,00	$1,5564 \times 10^{-1}$	$2,5046 \times 10^{-1}$
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$9,7598 \times 10^{-2}$	$2,8453 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$9,6944 \times 10^{-2}$	$2,8045 \times 10^{-1}$
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$8,00 \times 10^{-2}$	$7,9488 \times 10^{-2}$	$2,7572 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$4,00 \times 10^{-2}$	$6,7395 \times 10^{-2}$	$2,8760 \times 10^{-1}$
Din. II	Pos	$1,25 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,7109 \times 10^{-2}$	$2,9799 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,6900 \times 10^{-2}$	$2,9865 \times 10^{-1}$
Din. III	Pos	$7,50 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$3,5812 \times 10^{-2}$	$2,9806 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$3,5788 \times 10^{-2}$	$2,9734 \times 10^{-1}$
Din. IV	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$1,7529 \times 10^{-2}$	$2,9863 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$1,7529 \times 10^{-2}$	$2,9863 \times 10^{-1}$

Tabla 8.3: Resultados de comparación de los diferentes modelos.

En esta figura puede observarse que el modelo Cinemático I, es el que presenta el peor desempeño, lo cual resulta esperable en base a la simplicidad del mismo: no intenta modelar ni estimar la aceleración. Puede verse también que los modelos Cinemático II y Dinámico I presentan un desempeño similar⁴, es decir que un modelo sencillo de la aceleración presenta un comportamiento similar a intentar estimarla incluyéndola como estado del filtro.

Se observa también que el modelo Dinámico III presenta un desempeño superior a los dos mencionados previamente; la mejora sobre el Dinámico I se debe a que incorpora la estimación de la aceleración no modelada, mientras que la mejora sobre el Cinemático II se debe a que incorpora un modelo de la principal componente de la aceleración presente. Finalmente, se observa que los modelos Dinámico II y Dinámico IV son los que obtienen un mejor desempeño, lo cual es esperable ya que al incluir el efecto de J_2 utilizan un modelo más exacto de la aceleración presente. En la comparación entre estos últimos se concluye que el Dinámico II presenta un mejor desempeño. En este caso, a diferencia de lo que ocurre en la comparación Dinámico I/Dinámico III, no se obtiene una mejora al incorporar la estimación de la aceleración no modelada. Por el contrario, al incorporar más estados a estimar, se reduce la capacidad de filtrado.

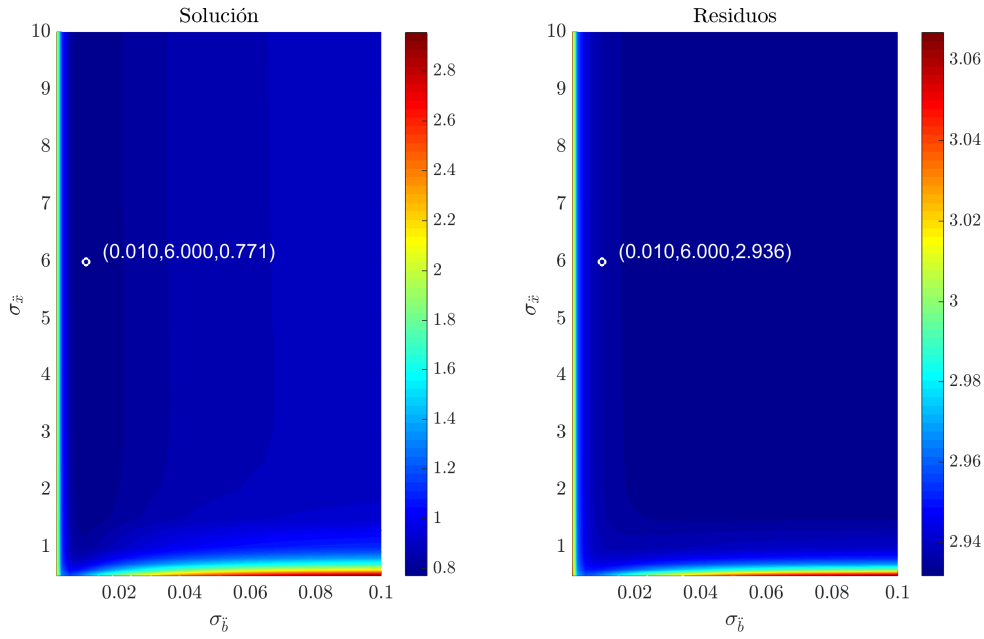
Esta figura resulta útil también a los efectos de analizar cómo empeora el desempeño de cada modelo al escoger otro valor de sintonía, por ejemplo para obtener un mejor desempeño frente a efectos no ideales como los analizados en el capítulo 9.

Además resulta interesante notar que para valores de σ_j superiores al óptimo del modelo Dinámico III, los modelos Dinámico III y Dinámico IV obtienen un desempeño similar (ambas curvas se solapan, lo cual se pone de manifiesto de manera más nítida en la figura 8.7b). Esto

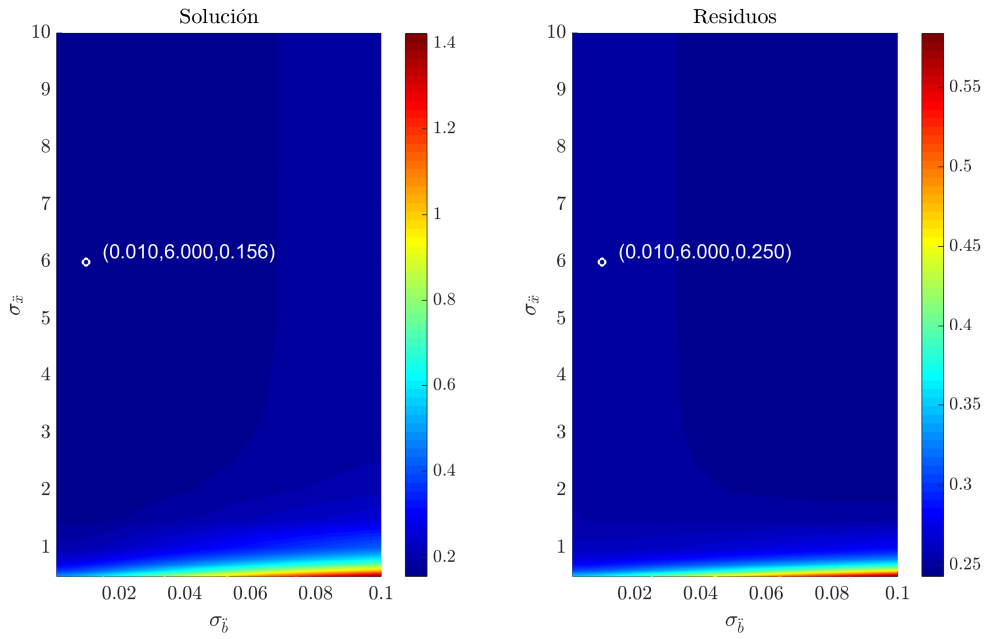
⁴En la comparación de los modelos Cinemático II, Dinámico III y Dinámico IV con todos los demás debe tenerse en cuenta que el eje x representa una magnitud diferente de las de los demás: corresponde al *jerk*, mientras que en los demás corresponde a la aceleración.

se debe a que para valores de σ_j inferiores, el desempeño del modelo Dinámico III empeora debido al error sistemático por la dinámica no modelada, mientras que para valores de σ_j superiores, el desempeño de ambos empeora debido al ruido, mientras que el efecto de la dinámica no modelada de uno con respecto al otro se vuelve despreciable, o queda absorbida en el filtrado. Esto también se observa al comparar entre sí los modelos Dinámico I y Dinámico II.

También puede observarse en las tablas 8.2 y 8.3 que los valores de σ_{ρ} y $\sigma_{\dot{\rho}}$ obtenidos en el óptimo son muy cercanos a los valores de desviación estándar de ruido de mediciones configurados, $\sigma_{\rho_{i,j,k}}$ y $\sigma_{\dot{\rho}_{i,j,k}}$, lo cual es consistente con el hecho de lograr el valor óptimo de filtrado: un valor grande de la desviación estándar del residuo indica un error sistemático grande en la estimación, mientras que un valor chico del residuo indica un bajo nivel de filtrado de ruido (si bien la escala de las gráficas no permiten apreciarlo, las curvas de residuos son decrecientes).

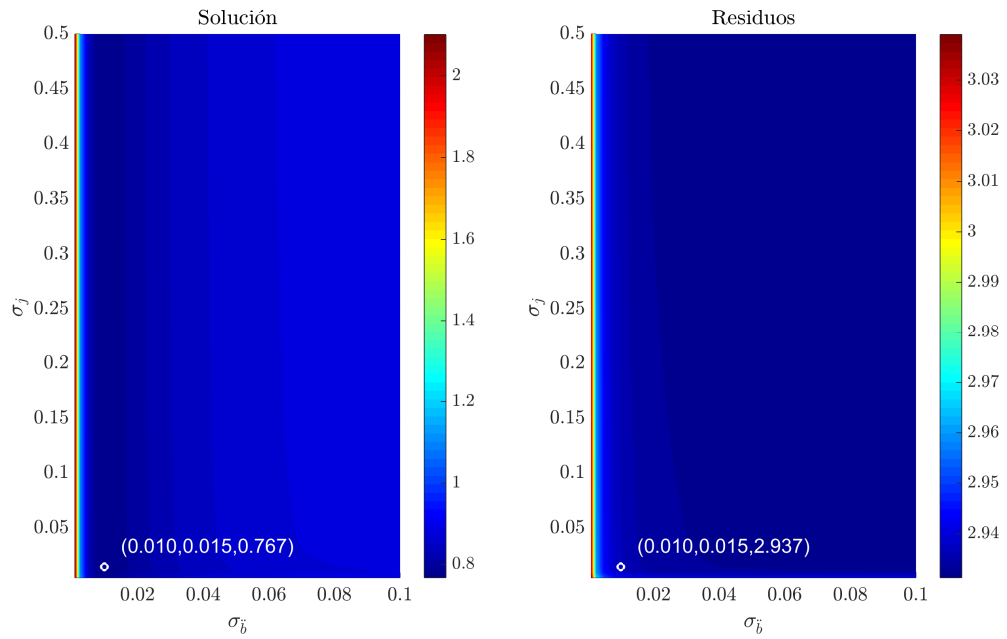


(a) Posición-Sesgo.

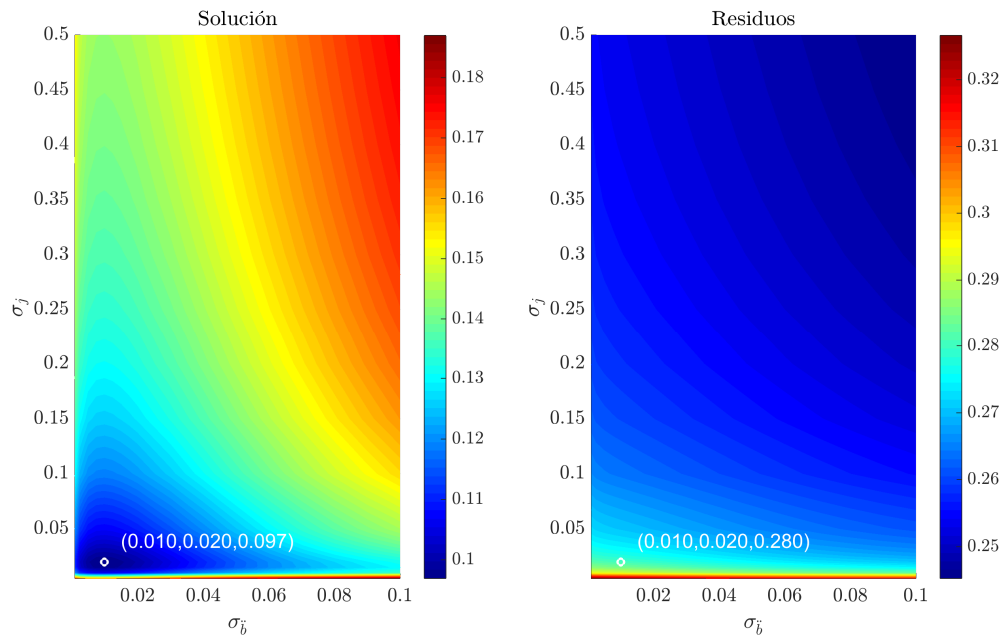


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.1: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistema GPS.

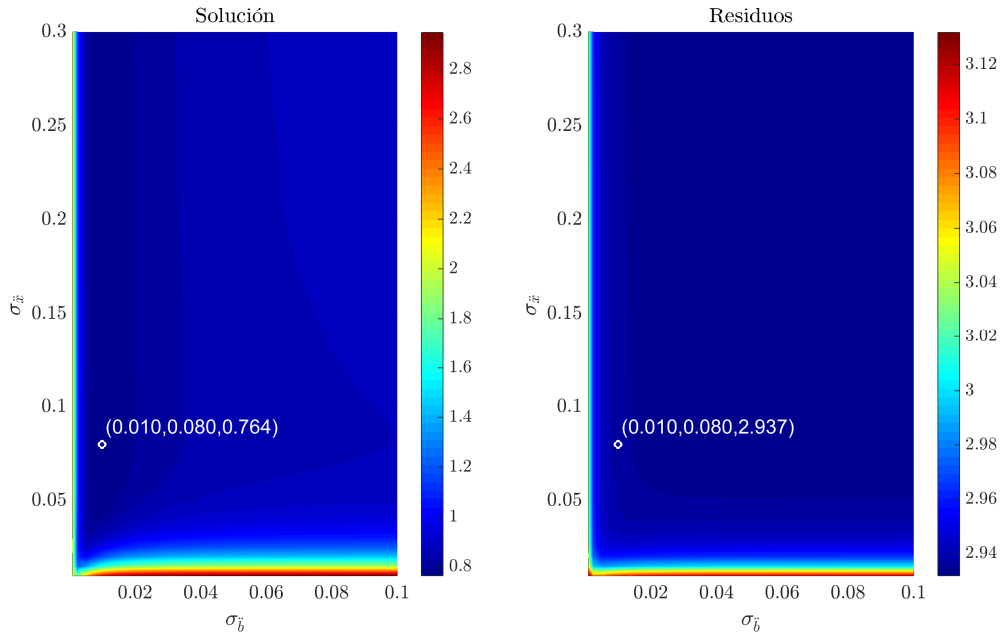


(a) Posición-Sesgo.

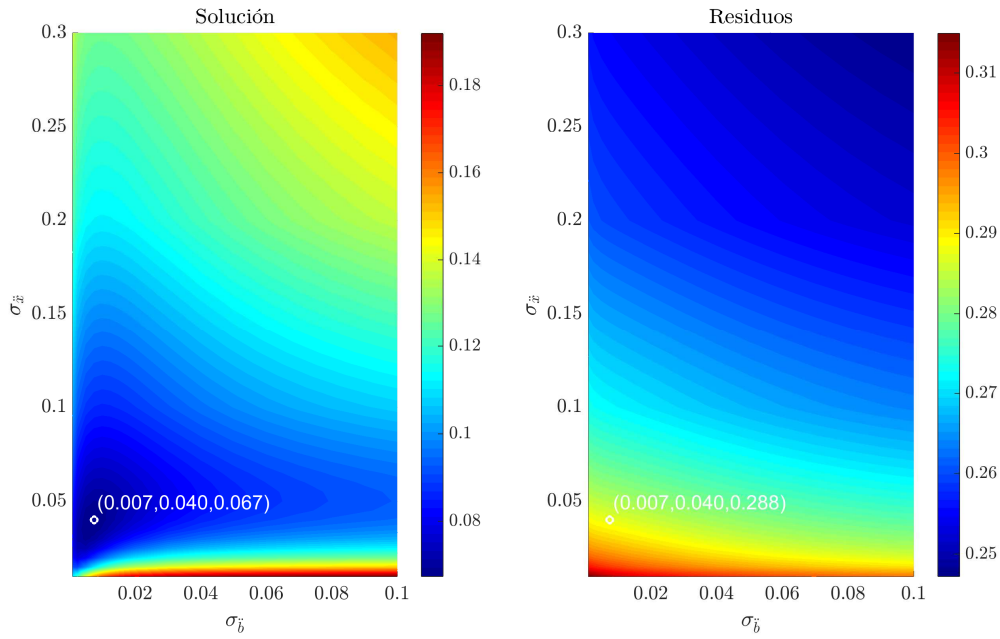


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.2: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistema GPS.

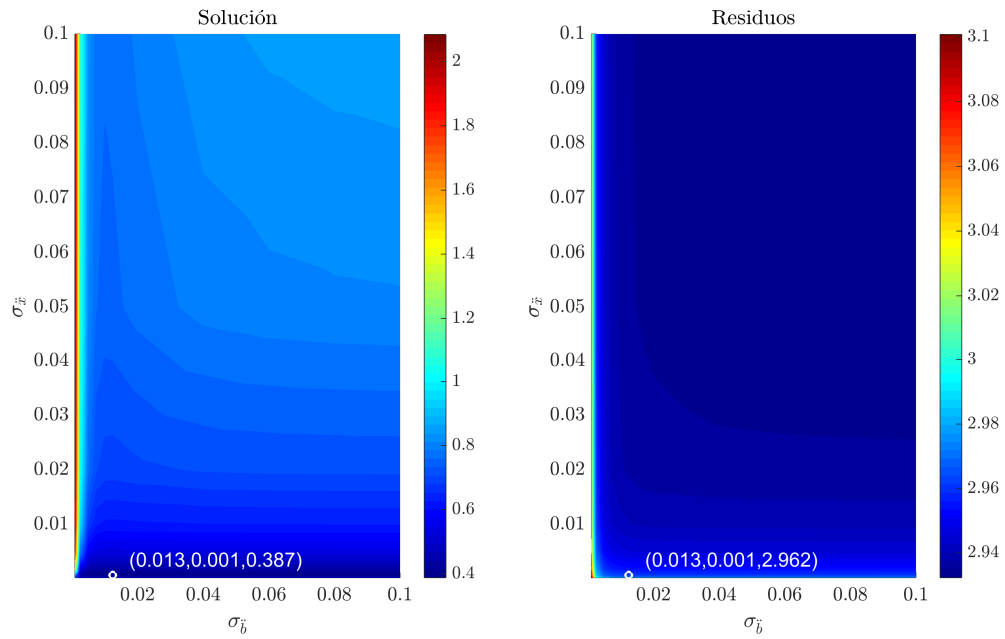


(a) Posición-Sesgo.

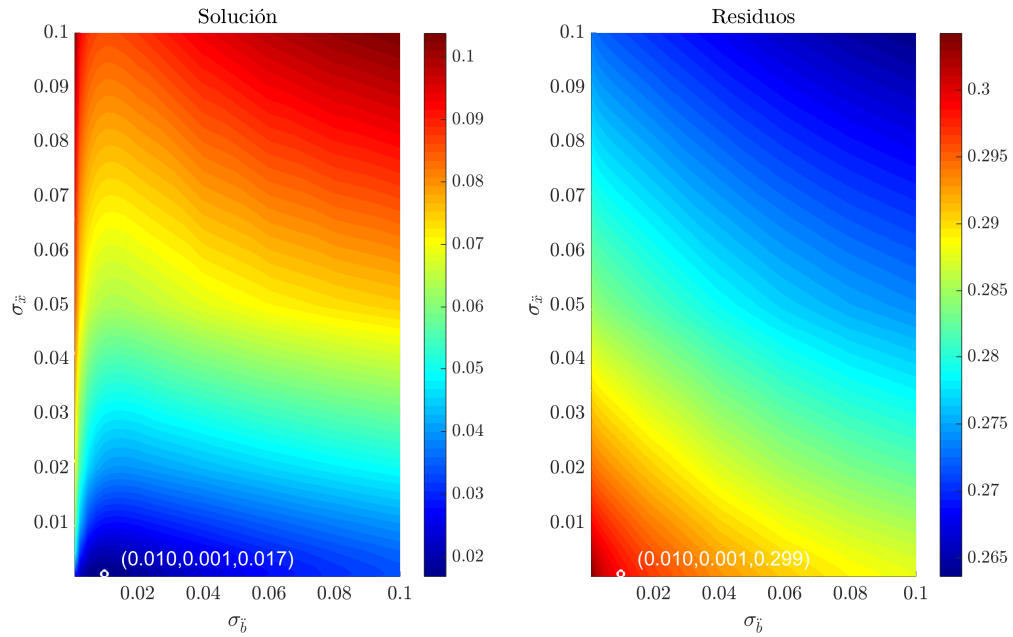


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.3: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistema GPS.

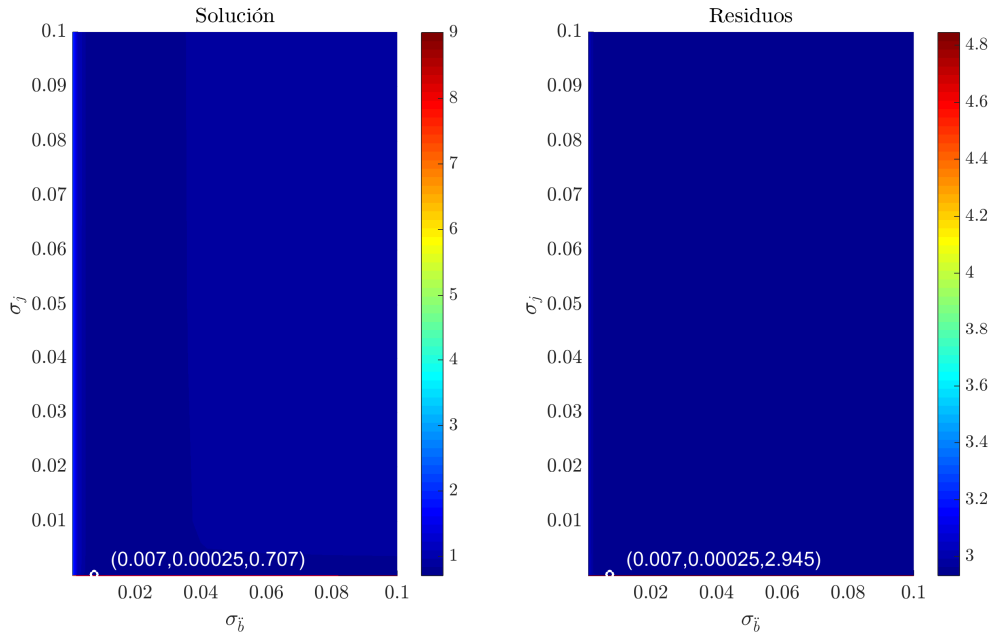


(a) Posición-Sesgo.

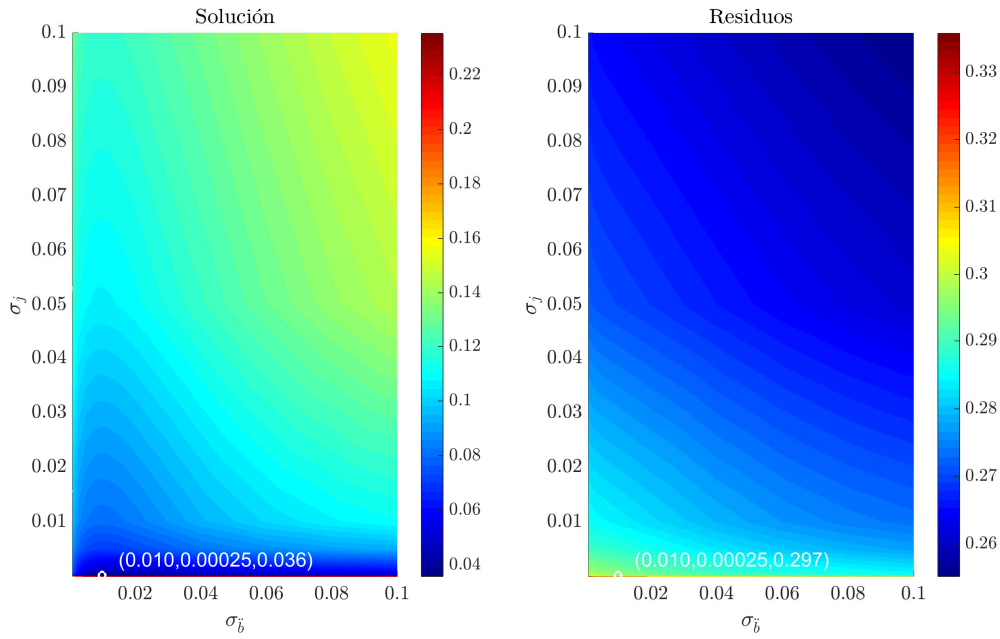


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.4: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistema GPS.

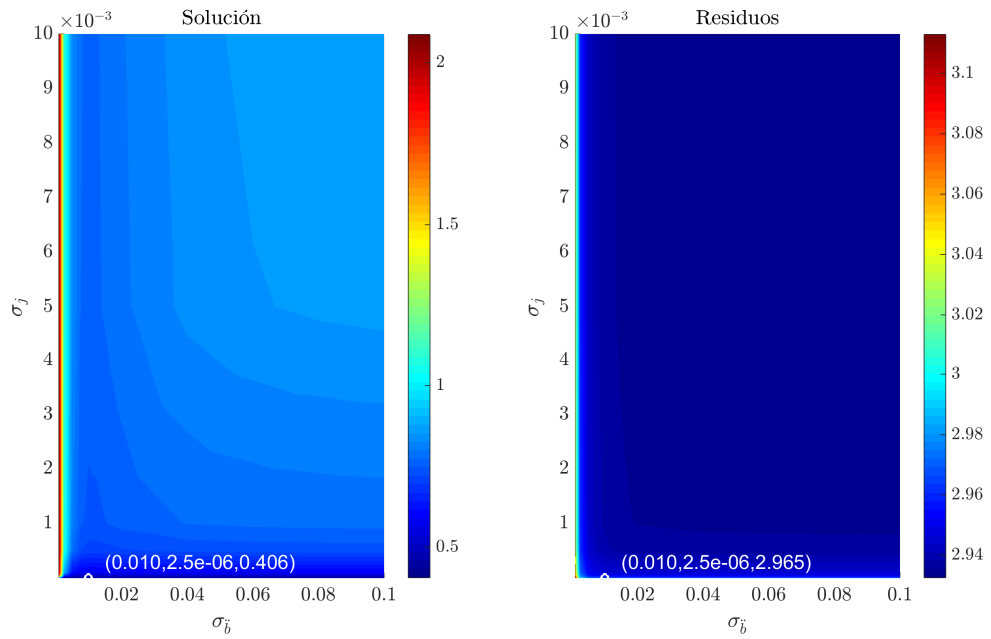


(a) Posición-Sesgo.

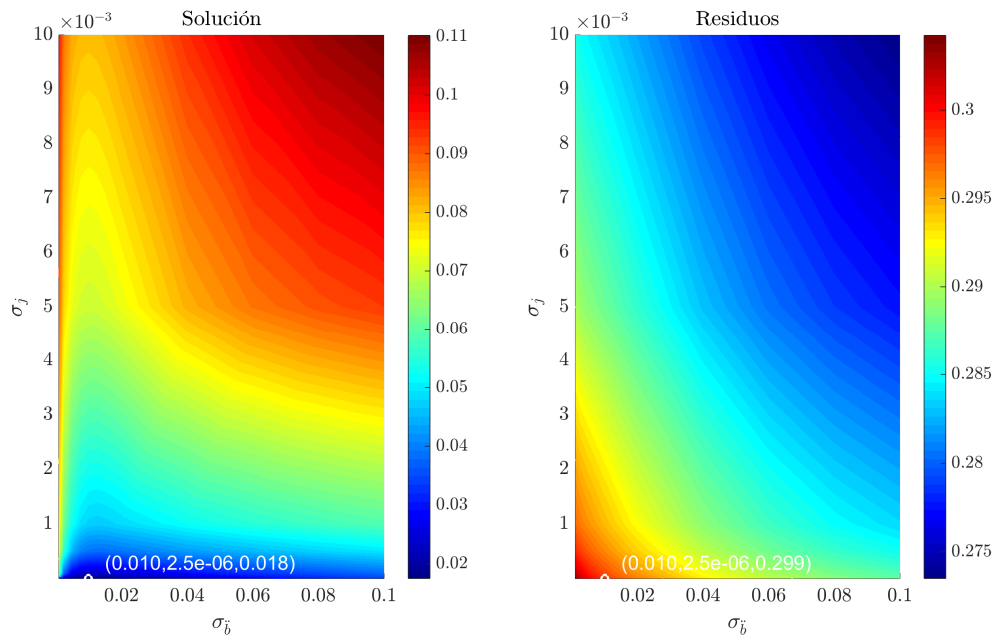


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.5: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistema GPS.

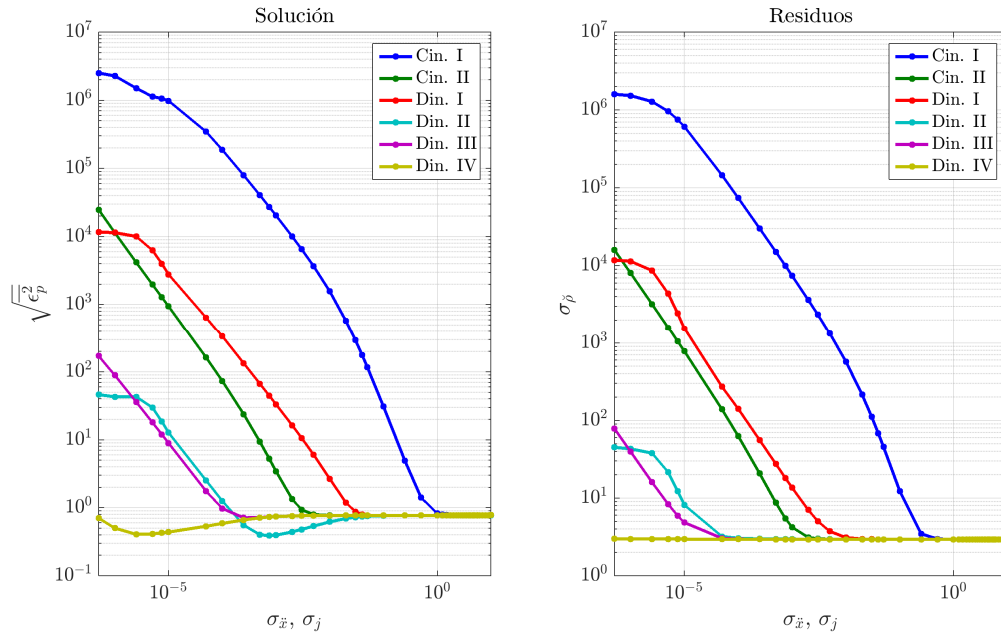


(a) Posición-Sesgo.

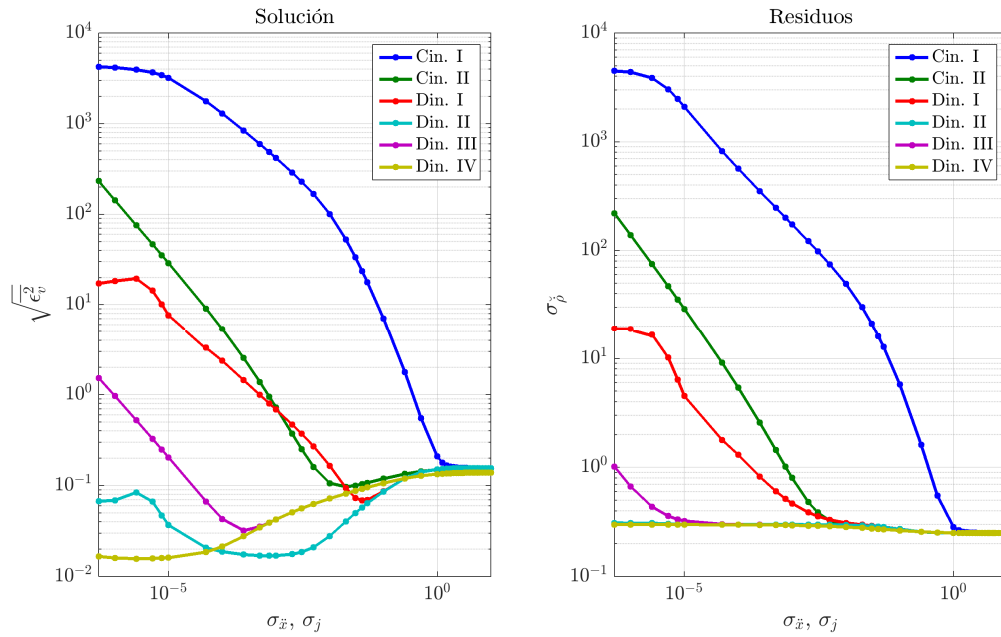


(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.6: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistema GPS.



(a) Posición-Sesgo.



(b) Velocidad-Deriva.

Figura 8.7: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\hat{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistema GPS. En todos los casos se toma $\sigma_b = 0,01$.

En la figura 8.8 se presentan, en trazo color rojo, los errores en las soluciones de posición y velocidad con EKF para el caso Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$ (valor óptimo). En la misma figura también se presenta, en trazo color azul, los errores en la solución puntual de posición y velocidad; notándose el efecto de filtrado en la solución con EKF frente a la solución puntual.

También se presenta, en trazo color negro, el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ . Puede observarse que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

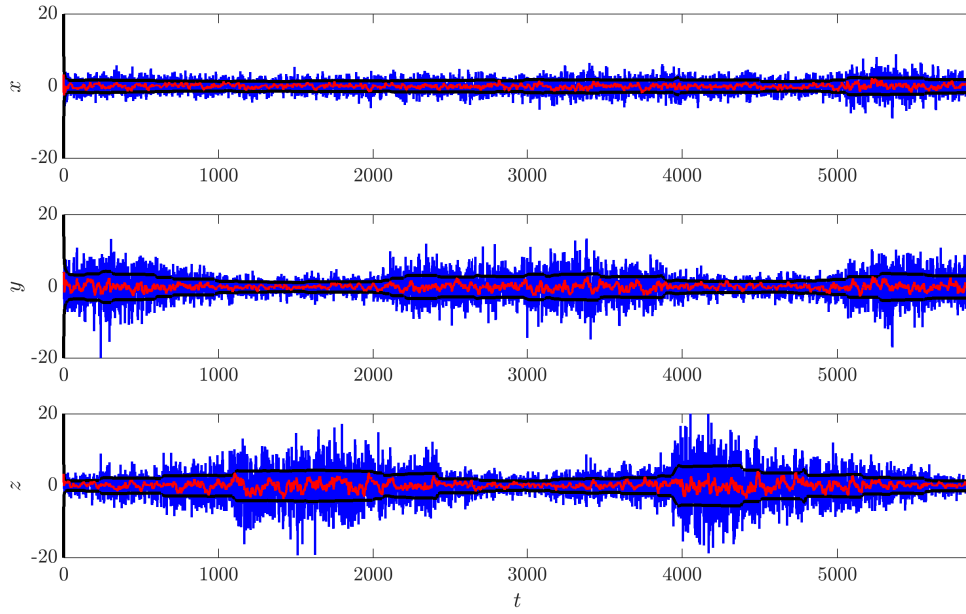
En la figura 8.9a se presentan los errores en las soluciones de sesgo y deriva. El análisis es similar al expuesto previamente. Además, en la figura 8.9b se muestra el resultado de la correlación normalizada (al valor de varianza) de los residuos de post-filtrado. Se observa que los mismos son fuertemente no-correlacionados, lo cual es esperable: si el filtrado es bueno, en los residuos de post-filtrado debe observarse el efecto del ruido.

A modo de comparación, en las figuras 8.10 y 8.11 se presentan los resultados obtenidos tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,5$. Pueden observarse errores sistemáticos tanto en las soluciones de posición y velocidad como en la solución de sesgo y deriva, así como una fuerte correlación en los residuos de post-filtrado de pseudo-rango y delta-rango.

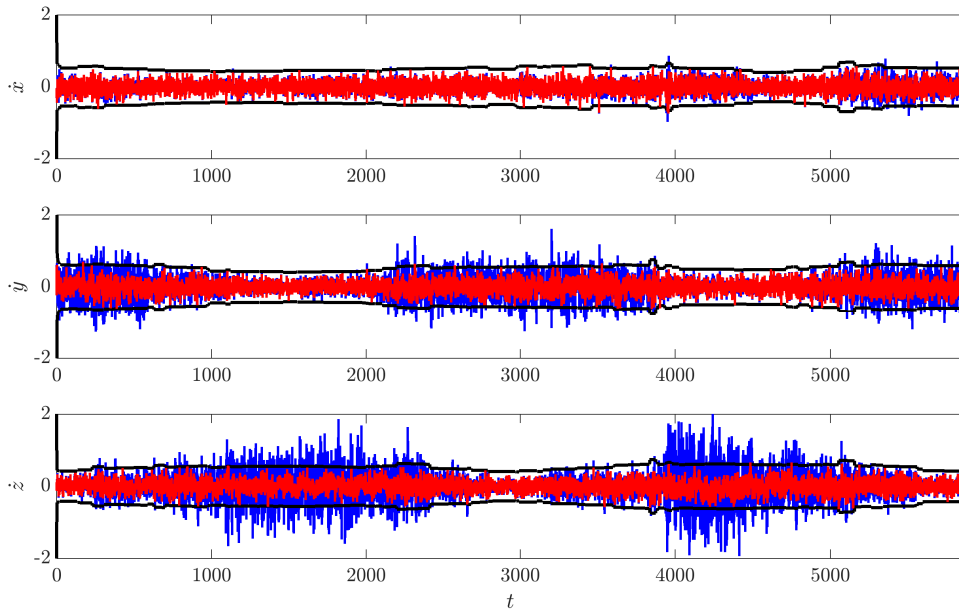
En las figuras 8.12 y 8.13 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Cinemático II, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$ (valor óptimo, en el error de velocidad).

De igual manera, en las figuras 8.14 y 8.15 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico I, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 4,0 \times 10^{-2}$; en las figuras 8.16 y 8.17 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico II, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en las figuras 8.18 y 8.19 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico III, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; y en las figuras 8.20 y 8.21 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico IV, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. En todos los casos la sintonía seleccionada corresponde al valor óptimo en el error de velocidad.

Puede observarse como varía el error al seleccionar diferentes modelos, en concordancia con lo observado en la figura 8.7.

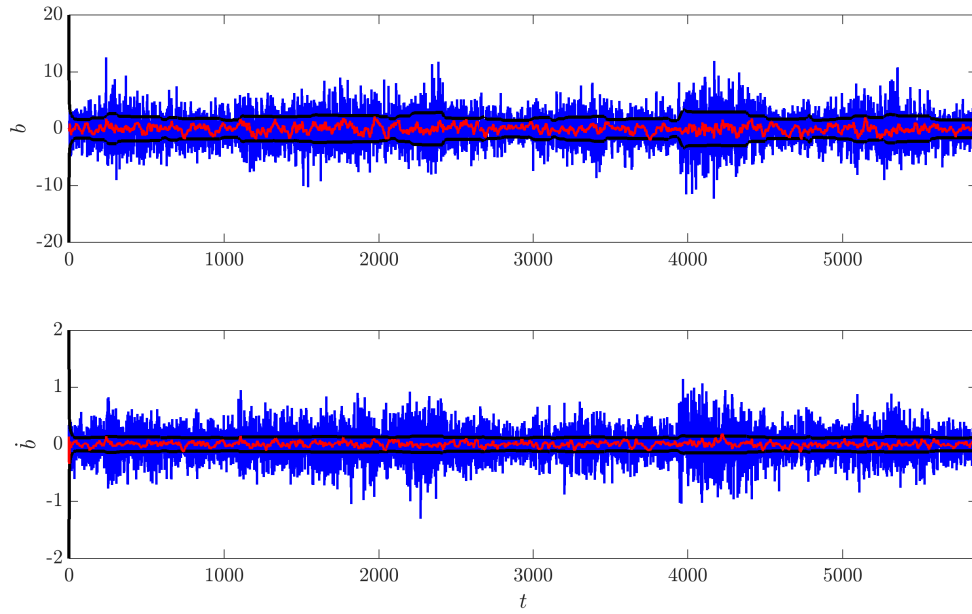


(a) Posición.

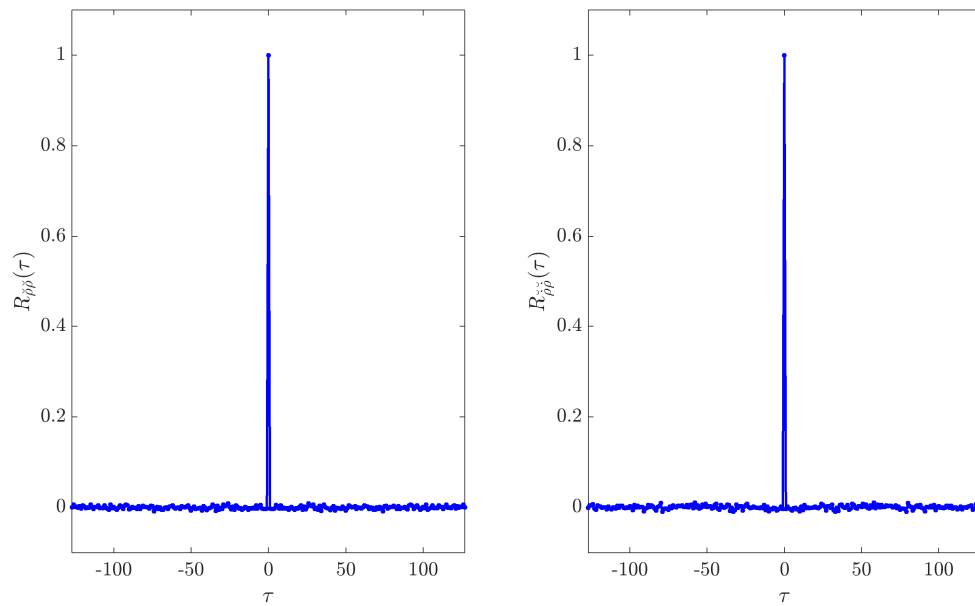


(b) Velocidad.

Figura 8.8: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

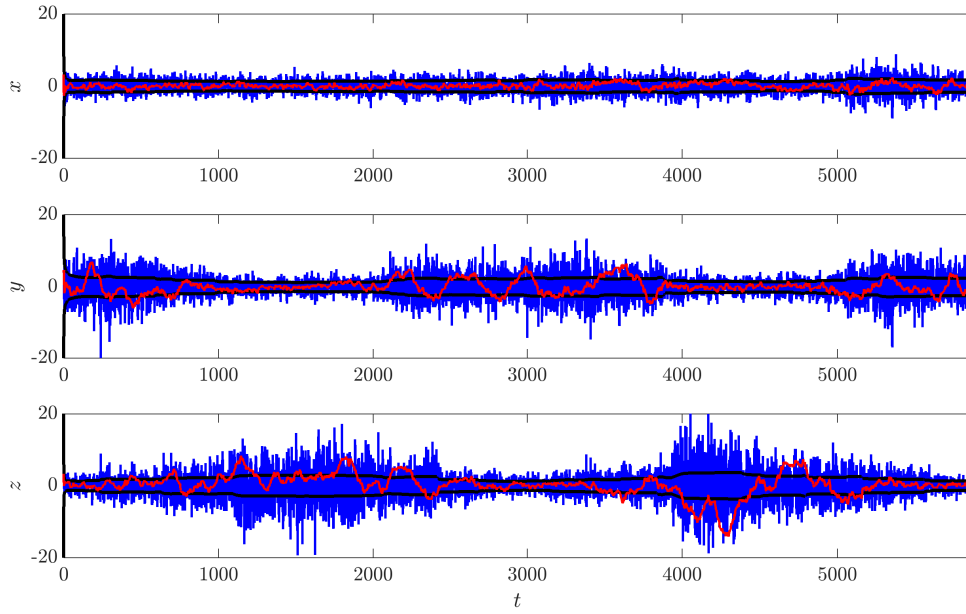


(a) Sesgo-Deriva.

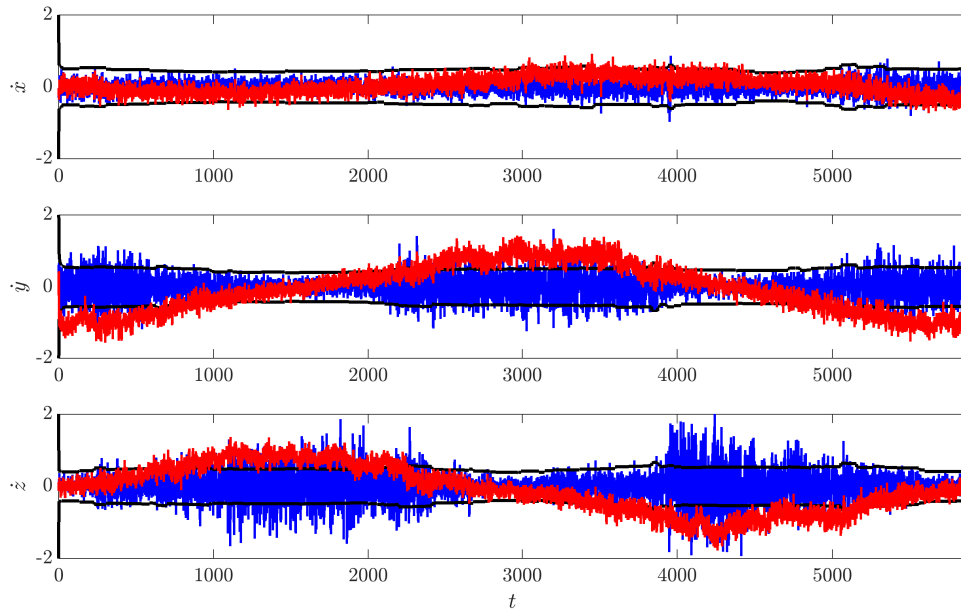


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.9: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 6,0$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

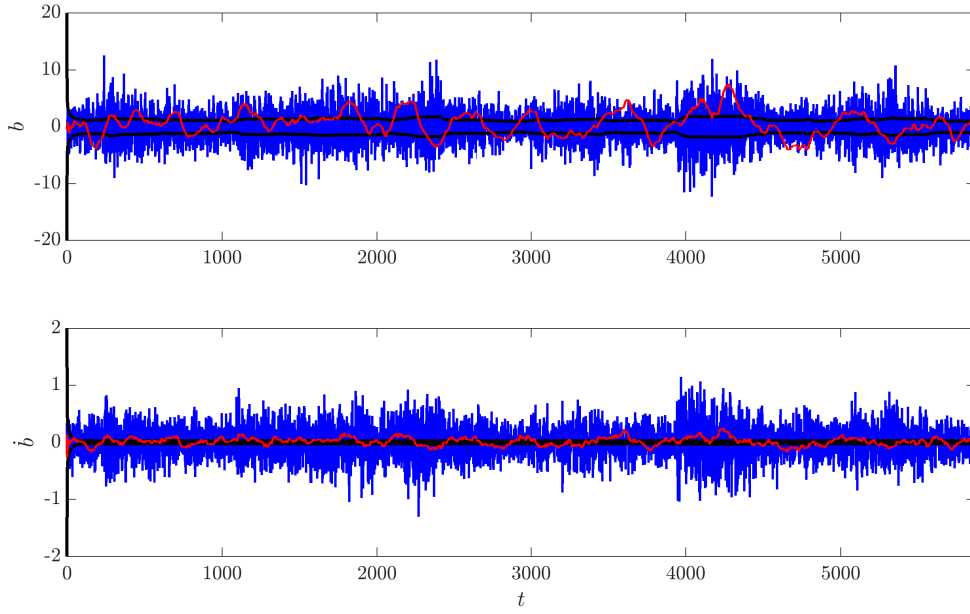


(a) Posición.

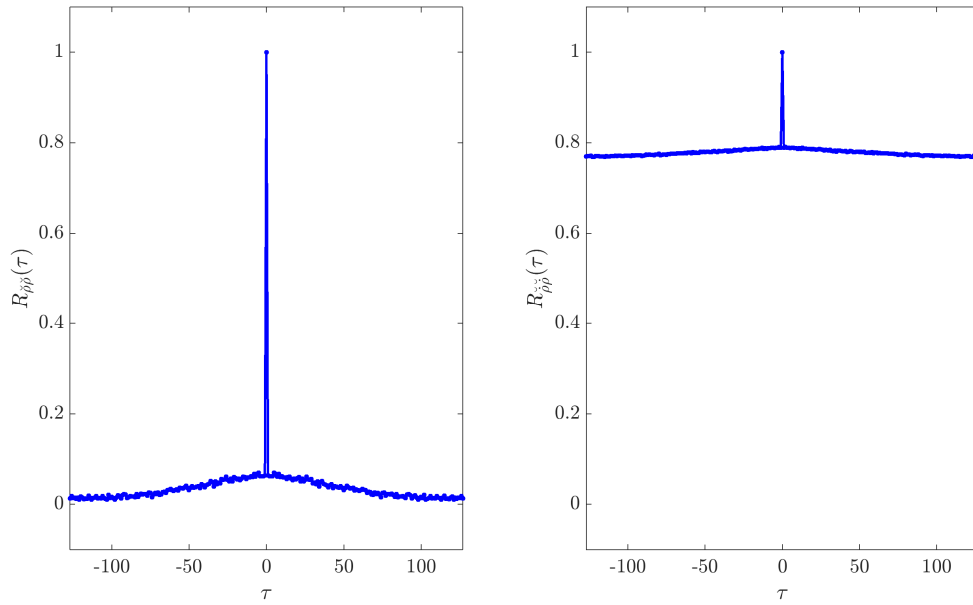


(b) Velocidad.

Figura 8.10: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,5$.

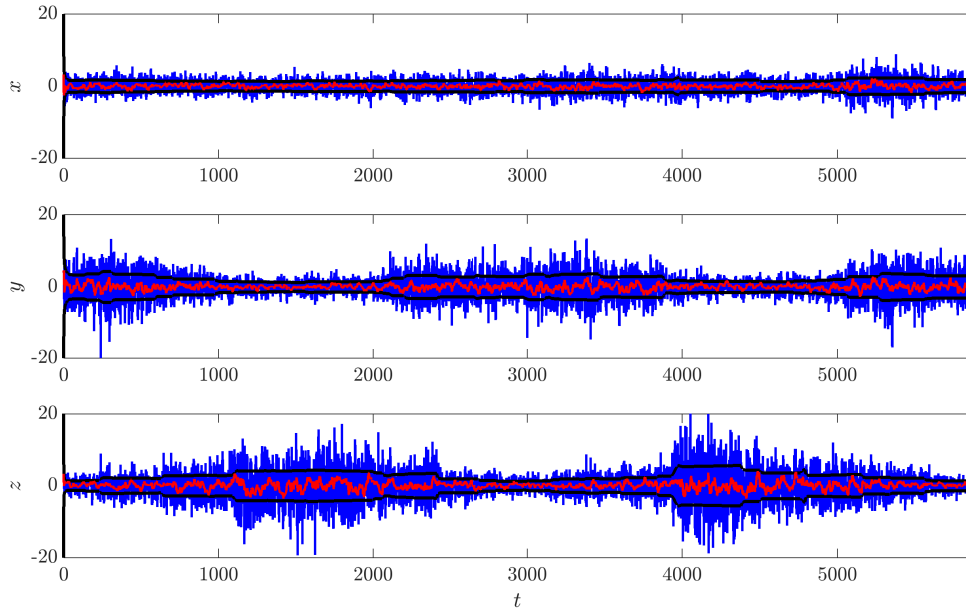


(a) Sesgo-Deriva.

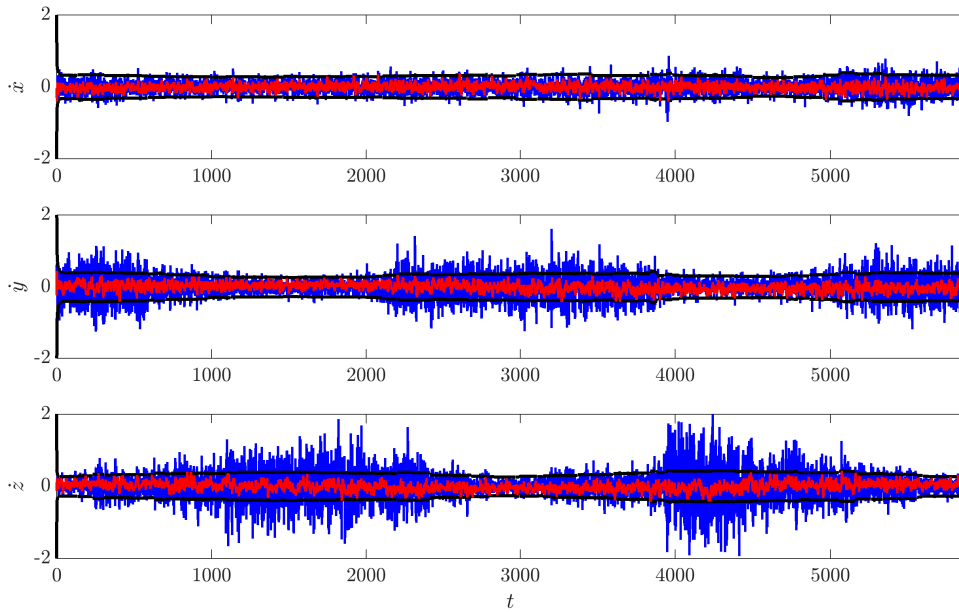


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.11: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 1 \times 10^{-3}$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0,5$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

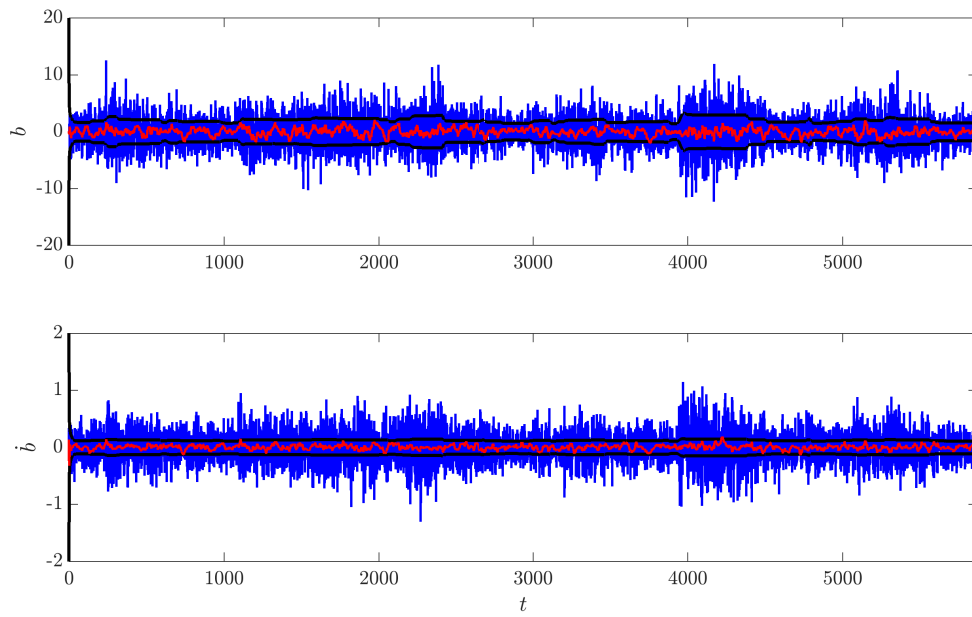


(a) Posición.

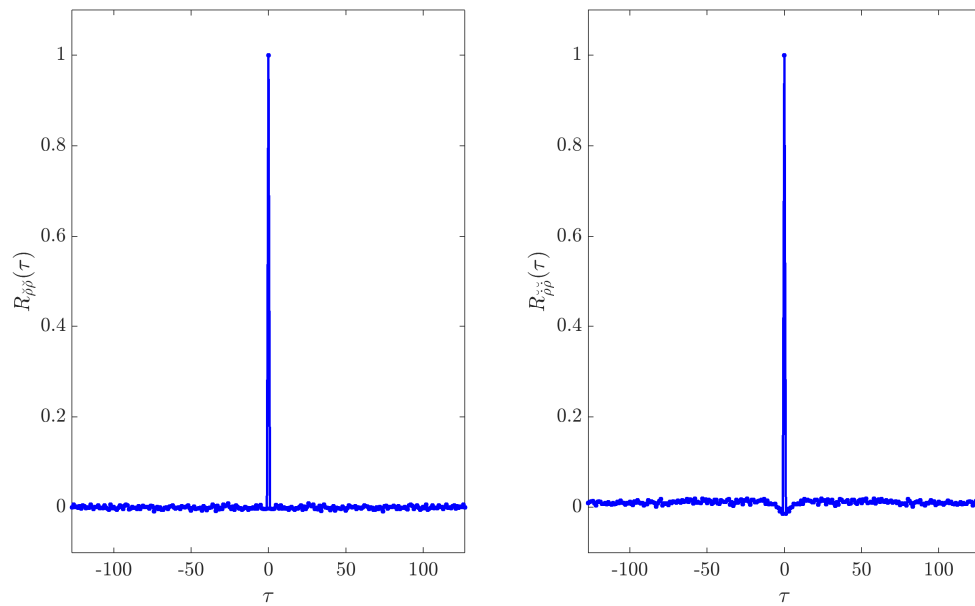


(b) Velocidad.

Figura 8.12: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02$.

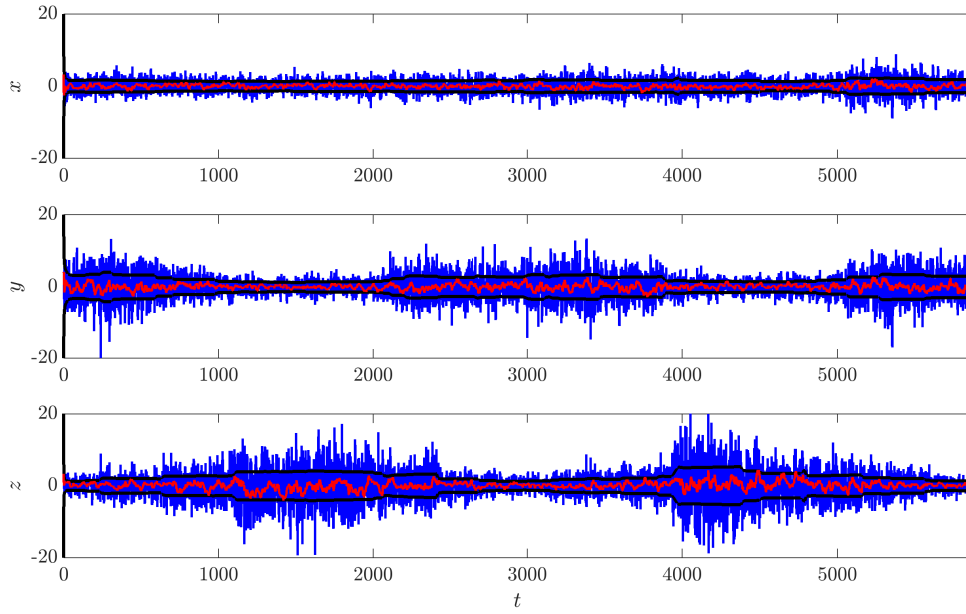


(a) Sesgo-Deriva.

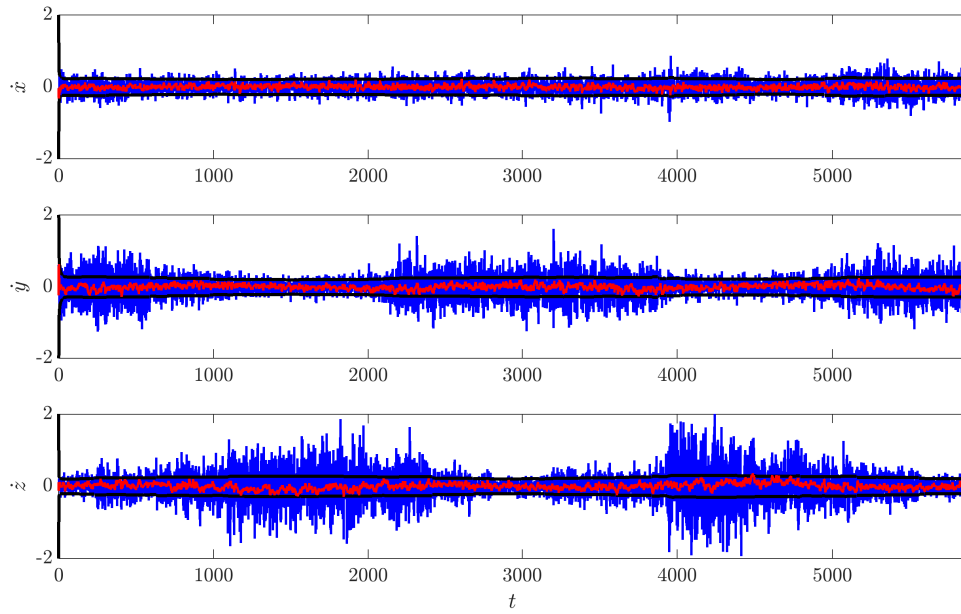


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.13: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

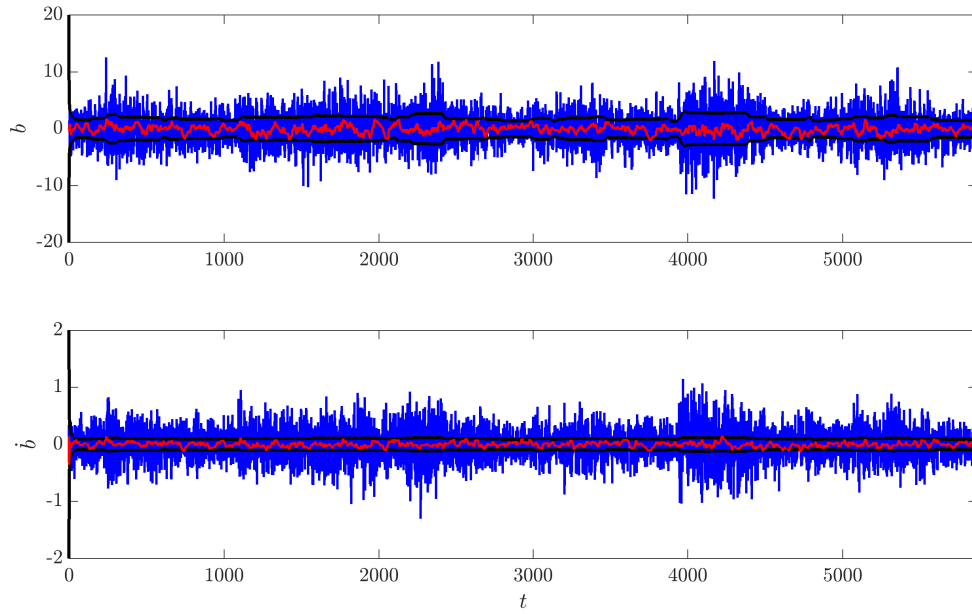


(a) Posición.

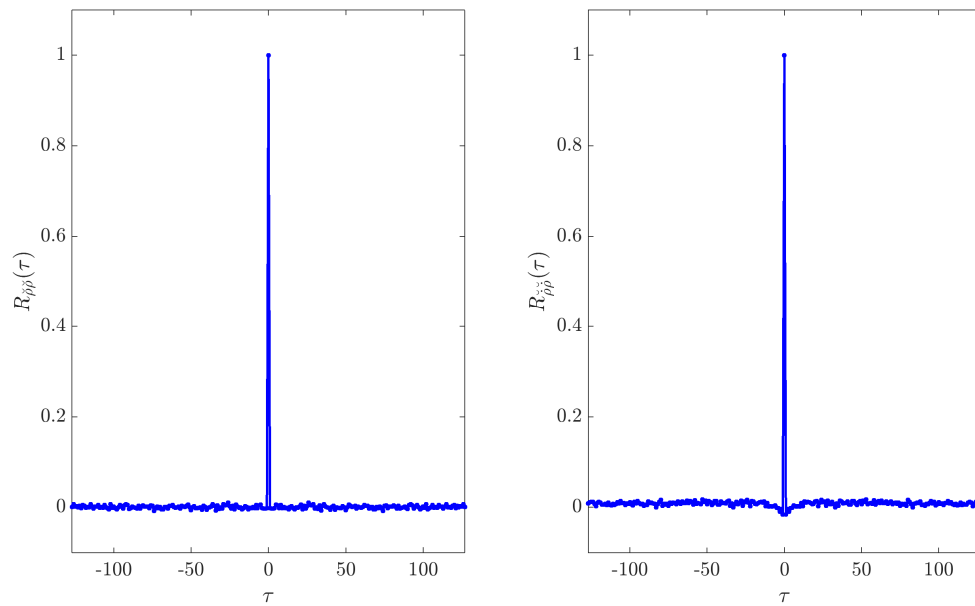


(b) Velocidad.

Figura 8.14: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$.

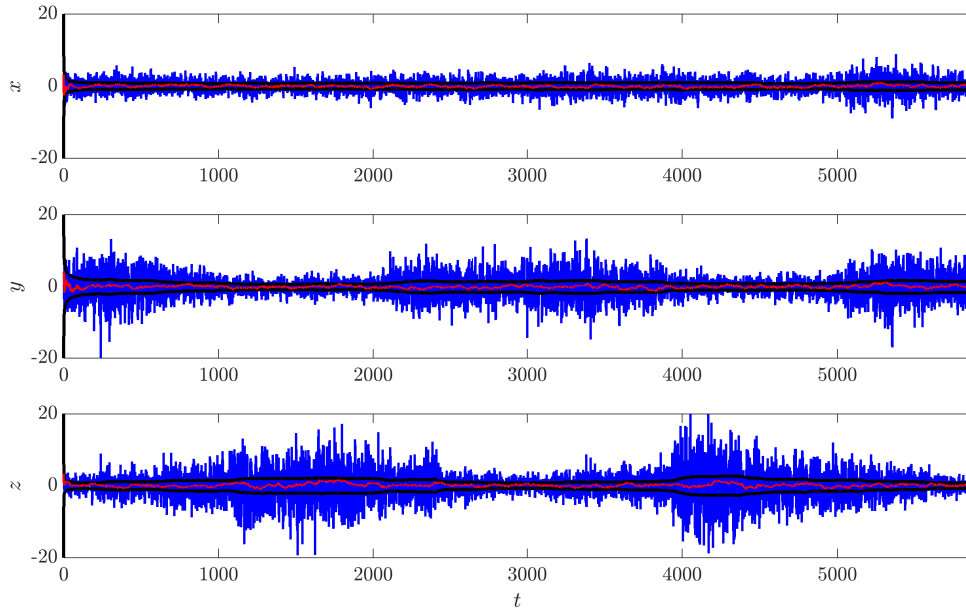


(a) Sesgo-Deriva.

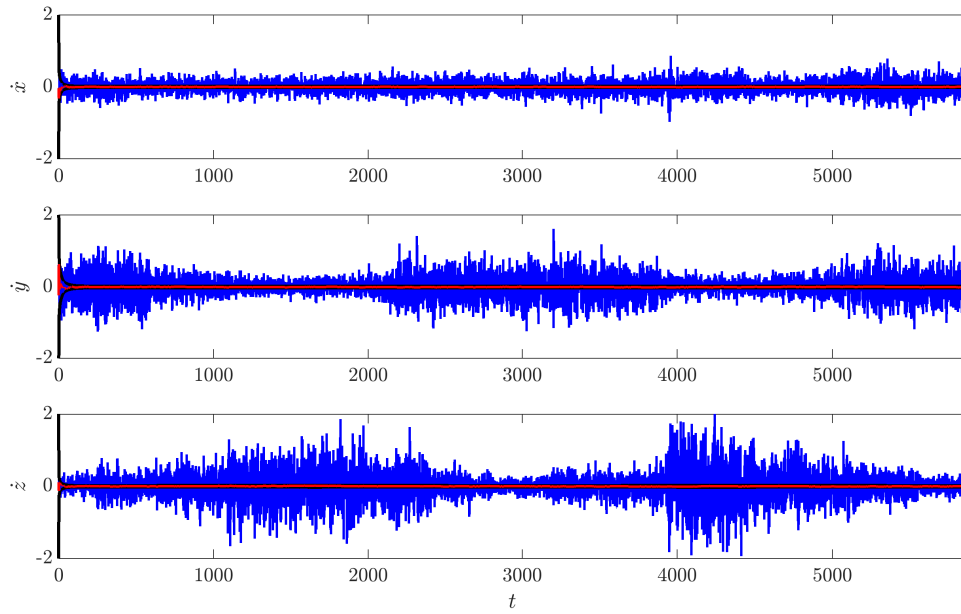


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.15: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

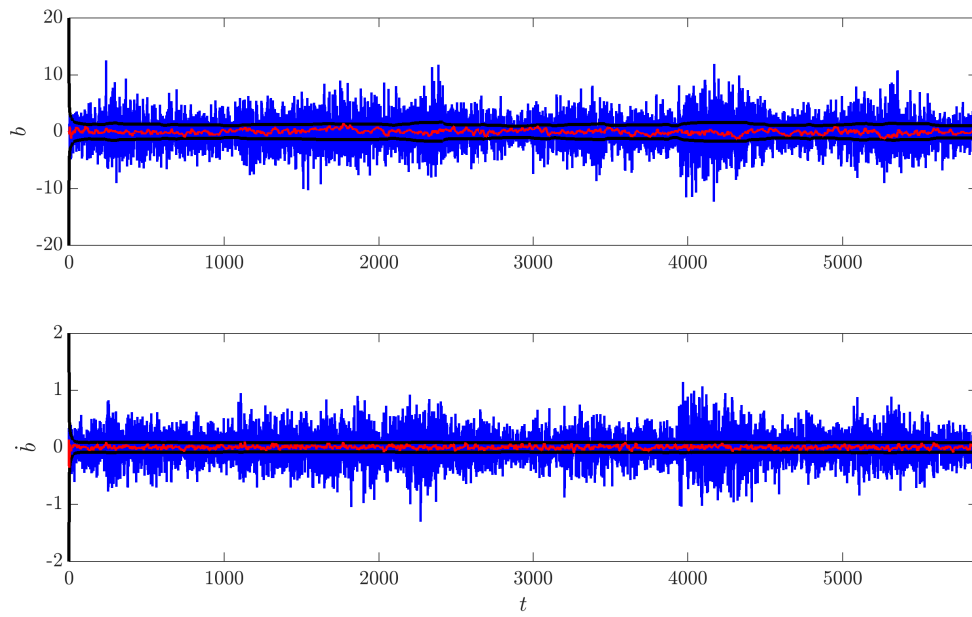


(a) Posición.

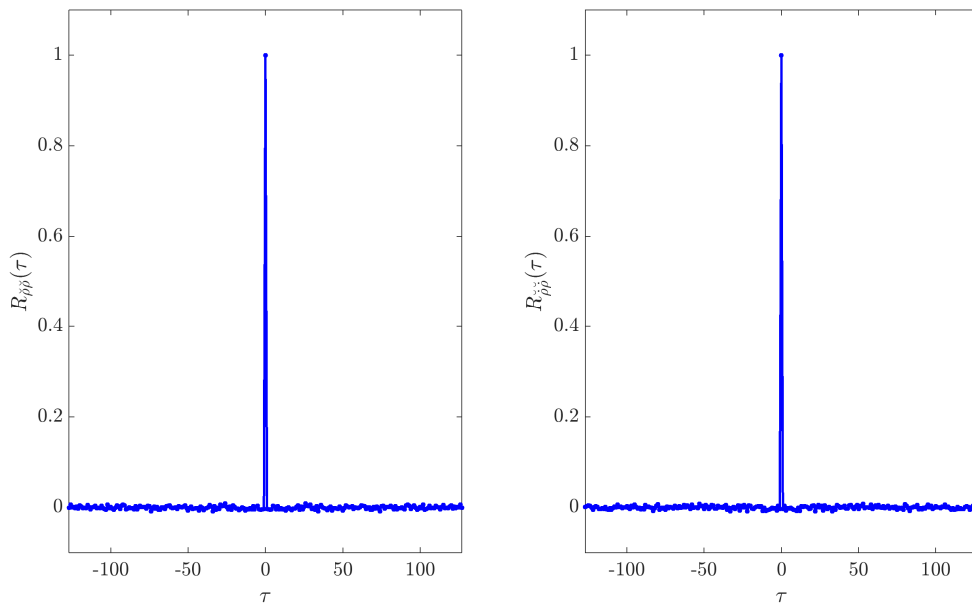


(b) Velocidad.

Figura 8.16: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$.

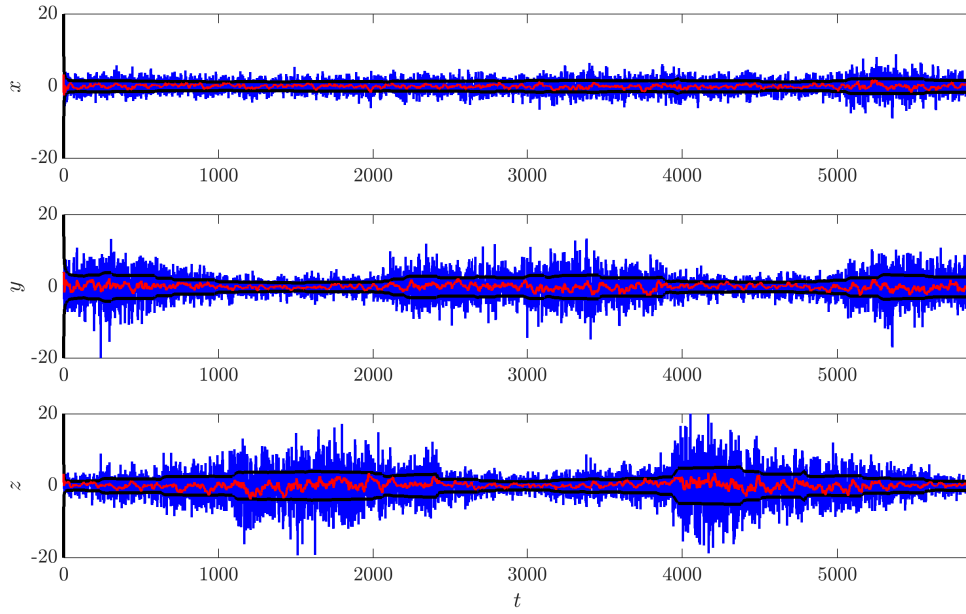


(a) Sesgo-Deriva.

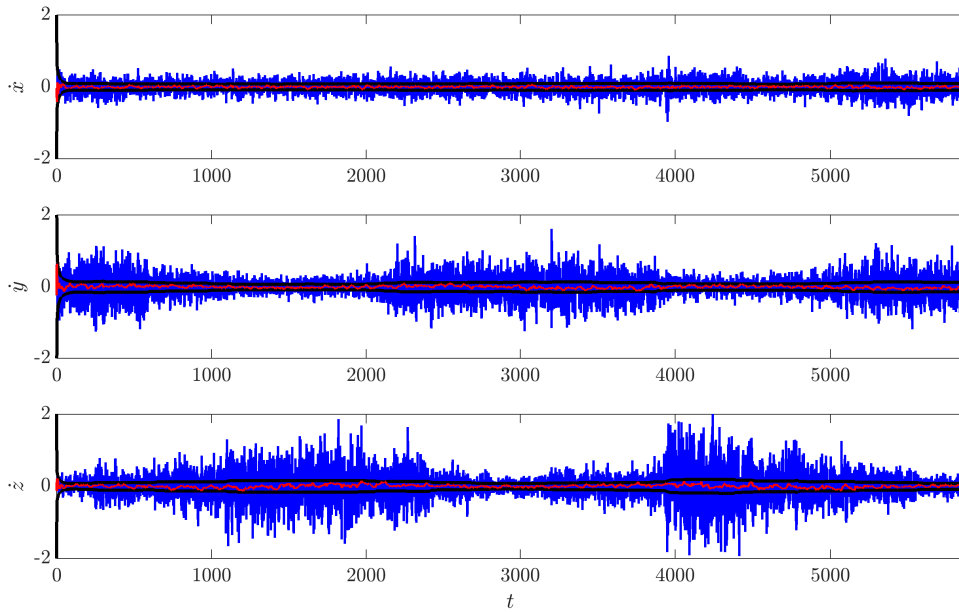


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.17: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

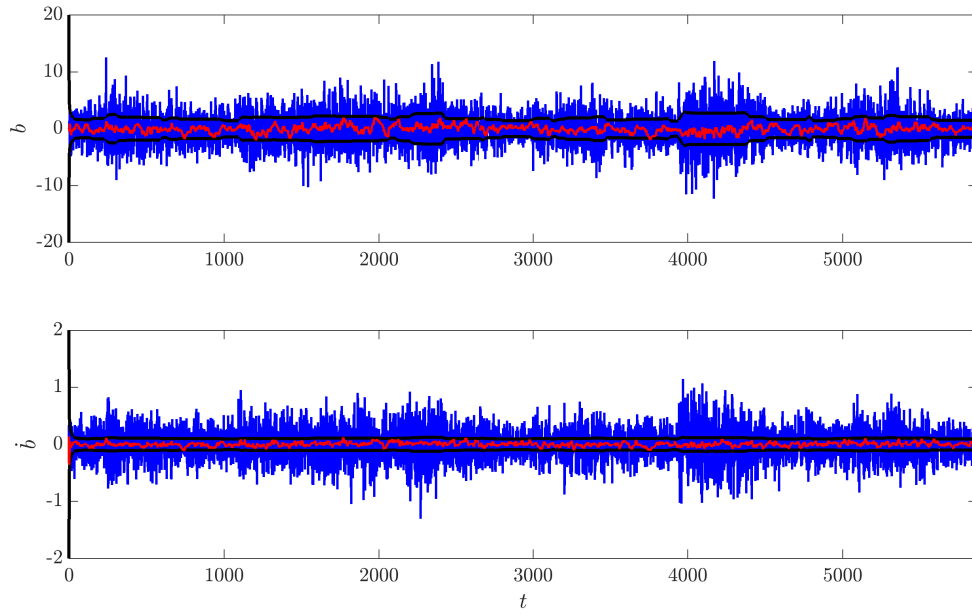


(a) Posición.

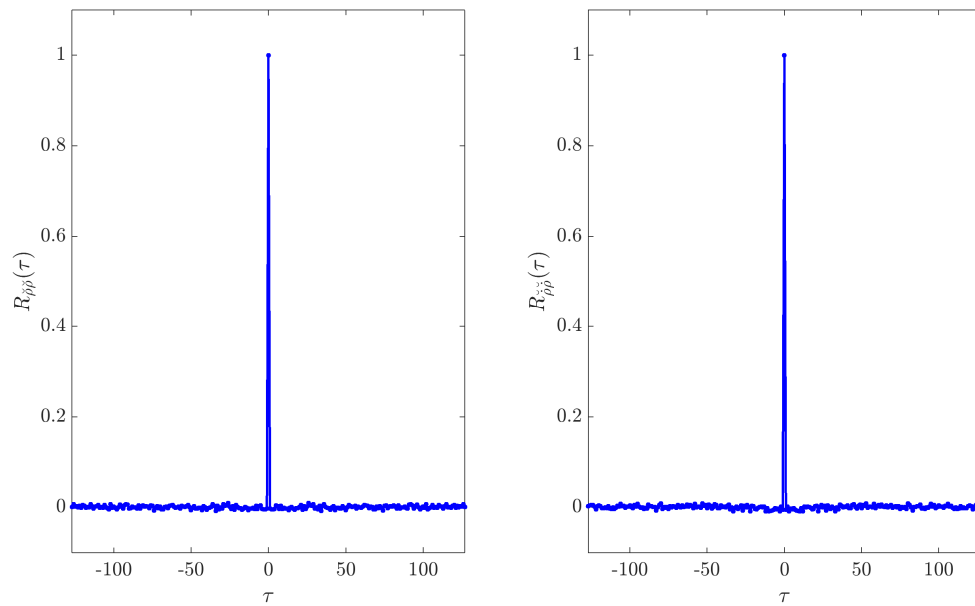


(b) Velocidad.

Figura 8.18: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$.

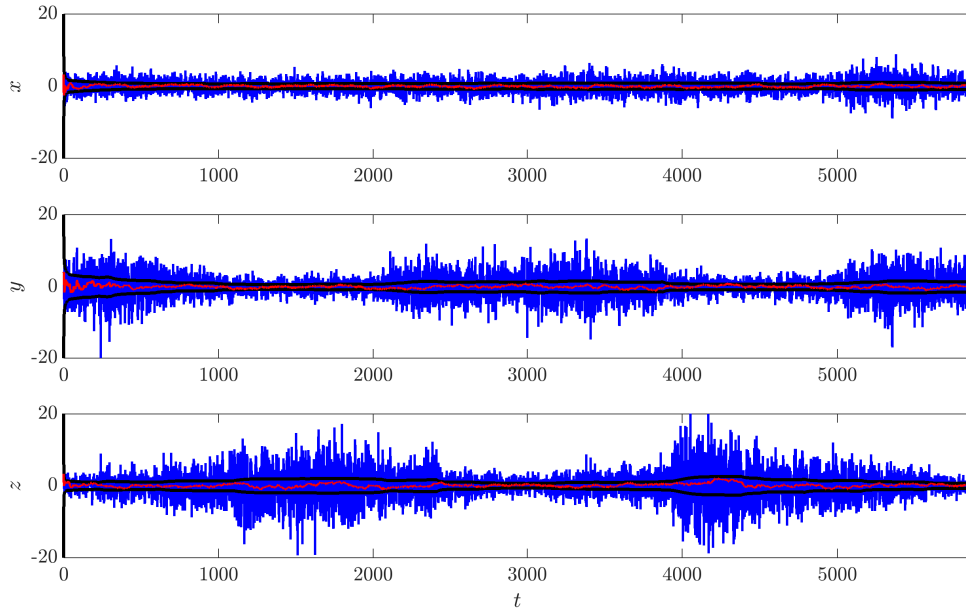


(a) Sesgo-Deriva.

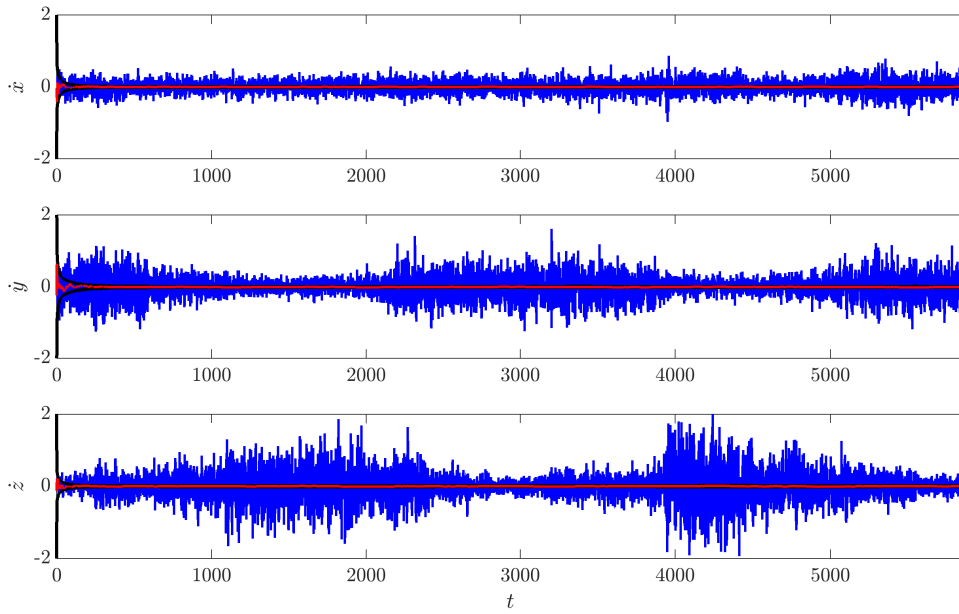


(b) Correlación normalizada.

Figura 8.19: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

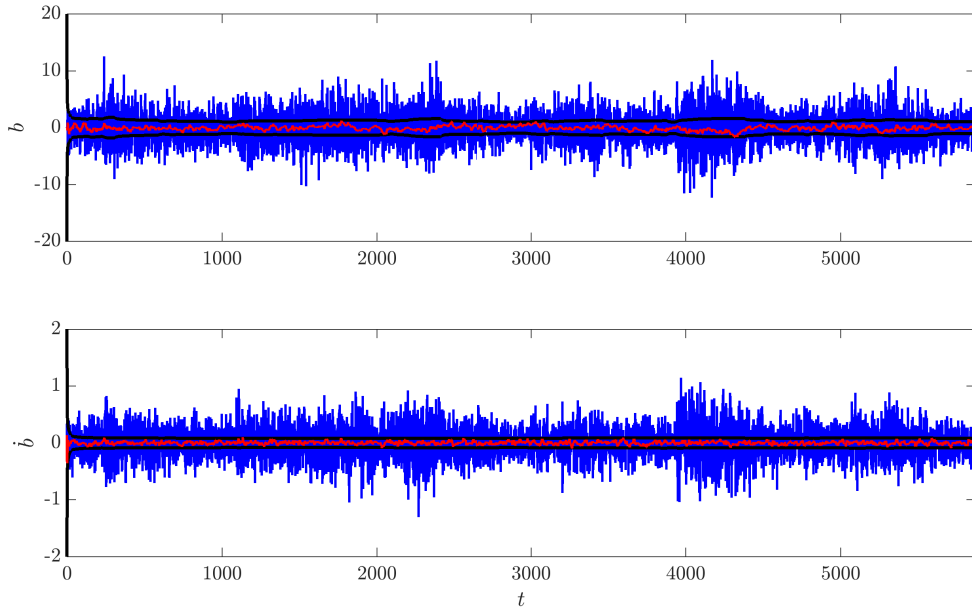


(a) Posición.

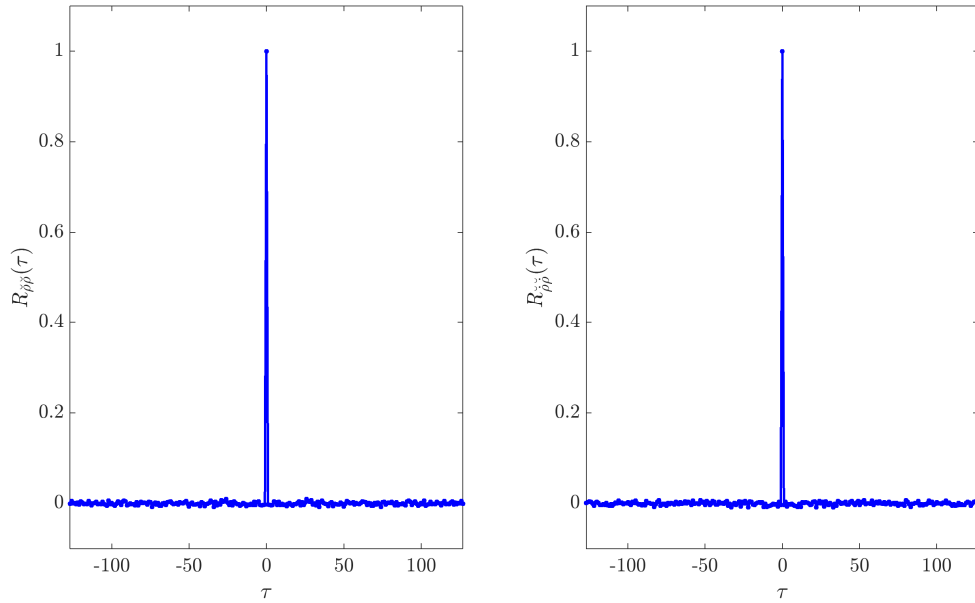


(b) Velocidad.

Figura 8.20: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$.



(a) Sesgo-Deriva.



(b) Correlación normalizada.

Figura 8.21: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, y correlación de los residuos de post-filtrado, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se compara con la solución puntual (sesgo y deriva). Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

Finalmente, en las figuras, 8.22, 8.23 y 8.24 se presentan en trazo color rojo los errores obtenidos en la solución de aceleración (no hay solución puntual de aceleración contra la cual comparar) con los modelos Cinemático II, Dinámico III y Dinámico IV, respectivamente, seleccionando en cada caso el valor de sintonía que corresponde al óptimo error de velocidad. Al igual que en las gráficas anteriores, también se presenta en trazo color negro el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ , observándose que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

En la comparación de estas gráficas se debe tener en cuenta que corresponden al error de estimación de tres aceleraciones diferentes: en el modelo Cinemático II corresponde a la estimación de toda la aceleración presente, en el modelo Dinámico III corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria dada por una Tierra con distribución de masa uniforme, mientras que en el modelo Dinámico IV corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria que incorpora el efecto del término J_2 .

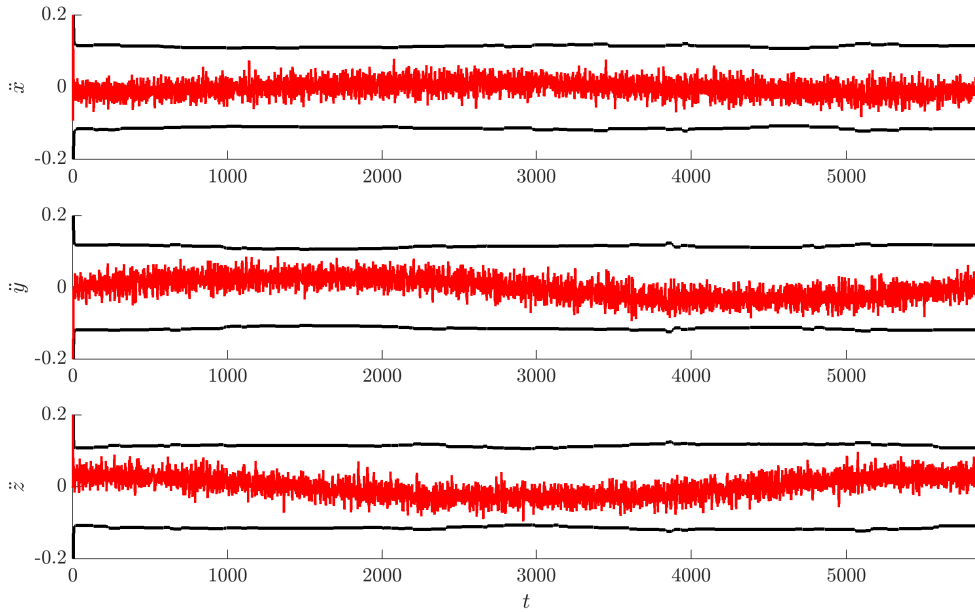


Figura 8.22: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02.$$

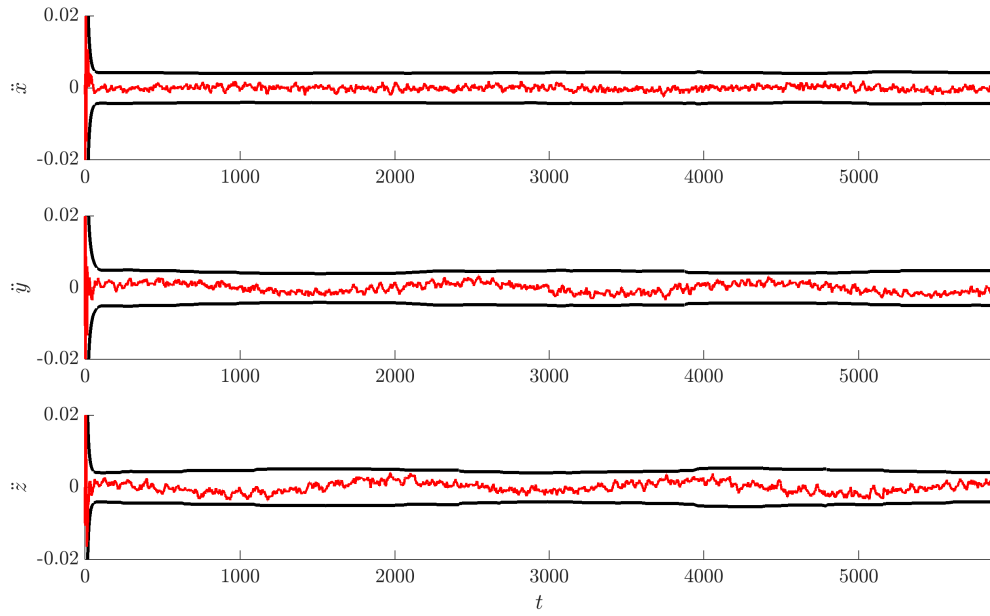


Figura 8.23: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$.

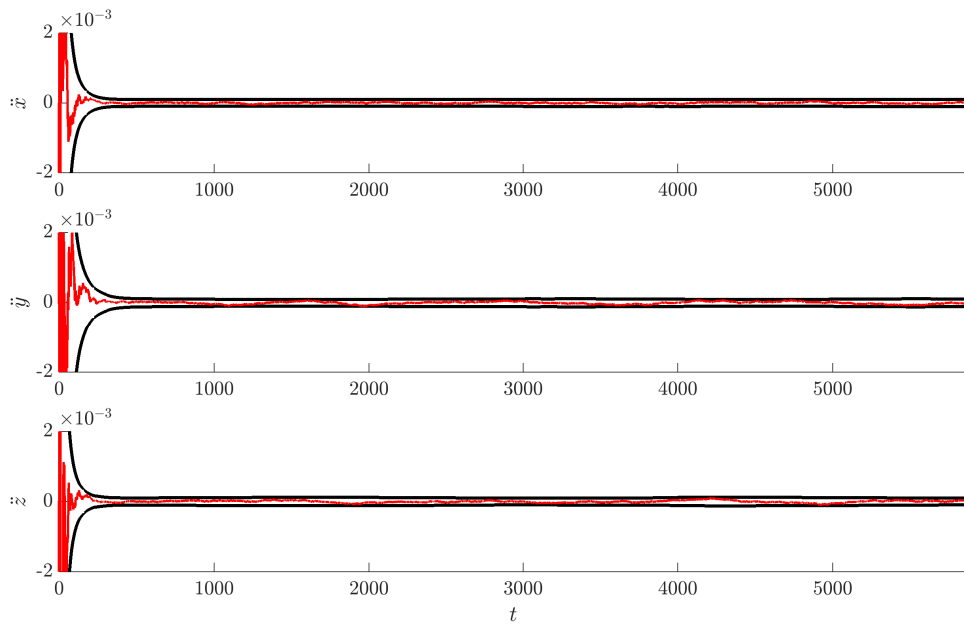


Figura 8.24: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$.

En el apéndice B se comparan los diferentes modelos en caso de utilizar mediciones de GLONASS y en caso de utilizar mediciones de GPS y GLONASS de manera conjunta. Los resultados del análisis son similares a los expuestos en el caso GPS.

En base a los resultados expuestos en las tablas 8.2, B.1, B.3, 8.3, B.2 y B.4, en las tablas 8.4 y 8.5 se presenta la comparación de los valores óptimos de $\sqrt{\epsilon_p^2}$ y $\sqrt{\epsilon_v^2}$, respectivamente, en caso de utilizar solamente el sistema GPS, solamente el sistema GLONASS, y mediciones combinadas de los sistemas GPS/GLONASS.

Se puede observar que para todos los modelos utilizados, existe una merma en el valor óptimo obtenido con GLONASS con respecto al obtenido con GPS. Esto se explica por la menor cantidad de satélites en la constelación GLONASS, lo que implica que en promedio se cuente con un número menor de mediciones. Por otra parte, se observa que para todos los modelos utilizados, existe una mejora en la solución combinada con respecto a la que se obtiene con un único sistema.

Modelo	Óptimo	GPS	GLONASS	GPS/GLONASS
Cin. I	Pos	$7,7087 \times 10^{-1}$	$9,5579 \times 10^{-1}$	$5,4912 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,7087 \times 10^{-1}$	$9,5648 \times 10^{-1}$	$5,4921 \times 10^{-1}$
Cin. II	Pos	$7,6727 \times 10^{-1}$	$9,5316 \times 10^{-1}$	$5,4730 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,6752 \times 10^{-1}$	$9,5325 \times 10^{-1}$	$5,4730 \times 10^{-1}$
Din. I	Pos	$7,6432 \times 10^{-1}$	$9,4380 \times 10^{-1}$	$5,4615 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,8822 \times 10^{-1}$	$9,5982 \times 10^{-1}$	$5,6279 \times 10^{-1}$
Din. II	Pos	$3,8721 \times 10^{-1}$	$4,8867 \times 10^{-1}$	$2,9994 \times 10^{-1}$
	Vel	$3,8740 \times 10^{-1}$	$4,8872 \times 10^{-1}$	$3,0033 \times 10^{-1}$
Din. III	Pos	$7,0665 \times 10^{-1}$	$8,7778 \times 10^{-1}$	$5,0430 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,1155 \times 10^{-1}$	$8,8149 \times 10^{-1}$	$5,0430 \times 10^{-1}$
Din. IV	Pos	$4,0627 \times 10^{-1}$	$4,7647 \times 10^{-1}$	$2,8767 \times 10^{-1}$
	Vel	$4,0627 \times 10^{-1}$	$4,7707 \times 10^{-1}$	$2,8767 \times 10^{-1}$

Tabla 8.4: Comparación de los valores óptimos de $\sqrt{\epsilon_p^2}$ para el caso de utilizar GPS, GLONASS, ó GPS/GLONASS para los diferentes modelos.

Modelo	Óptimo	GPS	GLONASS	GPS/GLONASS
Cin. I	Pos	$1,5564 \times 10^{-1}$	$1,7739 \times 10^{-1}$	$1,1496 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,5564 \times 10^{-1}$	$1,7733 \times 10^{-1}$	$1,1496 \times 10^{-1}$
Cin. II	Pos	$9,7598 \times 10^{-2}$	$1,0806 \times 10^{-2}$	$7,5626 \times 10^{-2}$
	Vel	$9,6944 \times 10^{-2}$	$1,0616 \times 10^{-2}$	$7,5626 \times 10^{-2}$
Din. I	Pos	$7,9488 \times 10^{-2}$	$7,7129 \times 10^{-2}$	$6,6010 \times 10^{-2}$
	Vel	$6,7395 \times 10^{-2}$	$7,1561 \times 10^{-2}$	$5,5917 \times 10^{-2}$
Din. II	Pos	$1,7109 \times 10^{-2}$	$1,8323 \times 10^{-2}$	$1,4256 \times 10^{-2}$
	Vel	$1,6900 \times 10^{-2}$	$1,8102 \times 10^{-2}$	$1,3655 \times 10^{-2}$
Din. III	Pos	$3,5812 \times 10^{-2}$	$4,0499 \times 10^{-2}$	$2,9495 \times 10^{-2}$
	Vel	$3,5788 \times 10^{-2}$	$4,0452 \times 10^{-2}$	$2,9495 \times 10^{-2}$
Din. IV	Pos	$1,7529 \times 10^{-2}$	$2,0280 \times 10^{-2}$	$1,4212 \times 10^{-2}$
	Vel	$1,7529 \times 10^{-2}$	$1,9647 \times 10^{-2}$	$1,4212 \times 10^{-2}$

Tabla 8.5: Comparación de los valores óptimos de $\sqrt{\epsilon_v^2}$ para el caso de utilizar GPS, GLONASS, ó GPS/GLONASS para los diferentes modelos.

8.4. Comparación de Estrategias de Filtrado

En esta sección compararemos el desempeño del EKF con otra estrategia de filtrado como el PKF (Cogo *et al.*, 2014). Básicamente la idea del PKF, descrita en la sección 5.4 consiste en obtener la solución puntual de posición y velocidad en cada instante (resolver parte del problema no-lineal) e ingresar con esta solución como medición al esquema de filtrado. En caso de utilizar el modelo Cinemático I o el modelo Cinemático II, el esquema de filtrado a implementar resulta lineal. En caso de utilizar el modelo Dinámico I o el modelo Dinámico II, el esquema de filtrado continúa siendo no-lineal; y para la actualización temporal se utilizará la misma implementación que en el caso del EKF.

Para cotejar el desempeño de estos esquemas, se realizan 500 corridas de simulación en el escenario que denominamos “ideal”; en cada corrida se toma aleatoriamente el tiempo de inicio de la simulación (en el intervalo de una semana), de manera de aleatorizar las constelaciones presentes, y se generan nuevas realizaciones tanto de sesgo y deriva como del ruido que afecta a las mediciones, y en cada corrida se obtienen las soluciones con ambos esquemas de filtrado para dicha realización.

Para contrastar el desempeño comparamos el error instantáneo cada 60 segundos⁵ en la estimación obtenido con ambos esquemas, como así también el error cuadrático medio sobre intervalos de 60 segundos. En las figuras 8.25 y 8.26 se muestra el valor medio y la desviación estándar (sobre las 500 corridas) observado con ambos esquemas de filtrado, para el caso de utilizar el modelo Cinemático I, con los valores óptimos de sintonía, con mediciones del

⁵El objetivo de este “muestreo” consiste simplemente en obtener una gráfica menos densa que permita interpretar más sencillamente los resultados.

sistema GPS. Para completar el análisis también se incluyen los valores obtenidos con la solución puntual. Para facilitar la visualización, las gráficas se presentan desplazadas en el eje t , pero corresponden a los mismos instantes. Puede observarse que el desempeño de ambos esquemas de filtrado es similar.

En la figura 8.27 se presenta la probabilidad de que un esquema tenga un desempeño inferior al del otro (sobre las 500 corridas de simulación), en términos de error de estimación medio cuadrático en el intervalo. Puede verse que en la comparación PKF vs. EKF se obtiene un valor cercano a 0,5, lo cual corrobora la presunción de que no hay un desempeño preferente.

Finalmente, en la figura 8.28 se presentan los errores cuadráticos medios sobre todo el intervalo para cada una de las 500 corridas de simulación con ambos esquemas de filtrado y en la solución puntual. Puede verse que la solución con EKF y PKF prácticamente se superponen. Esto resulta explicable en términos de qué tan buena resulta la aproximación lineal de la relación (no-lineal) entre los estados y las mediciones en el punto de linealización. En nuestro caso, si bien la relación es no-lineal, dado que la aproximación lineal es localmente buena, no se observan diferencias entre el esquema que primero resuelve la no-linealidad y luego filtra (PKF), y el esquema que la linealiza en el filtrado (EKF).

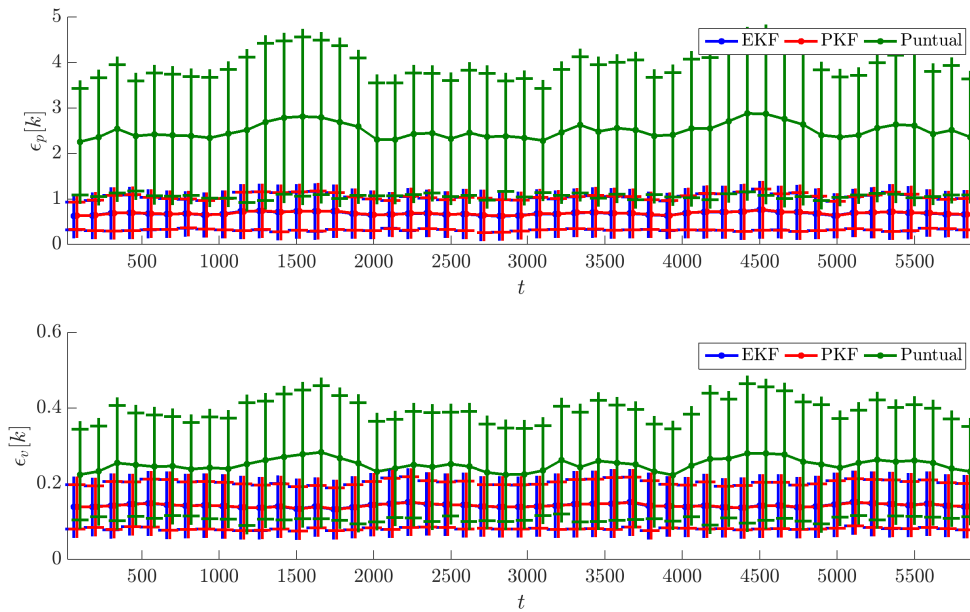


Figura 8.25: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\hat{y}} = 0,01$, $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 6,0$.

En las figuras 8.29, 8.30, 8.31 y 8.32 se muestra el mismo análisis para el caso de considerar mediciones del sistema GLONASS, mientras que en las figuras 8.33, 8.34, 8.35 y 8.36 se presentan los resultados en caso de tomar mediciones conjuntas de GPS y GLONASS. En ambos casos se utiliza el modelo Cinemático I. Las conclusiones son similares a las observadas para el caso de utilizar únicamente el sistema GPS.

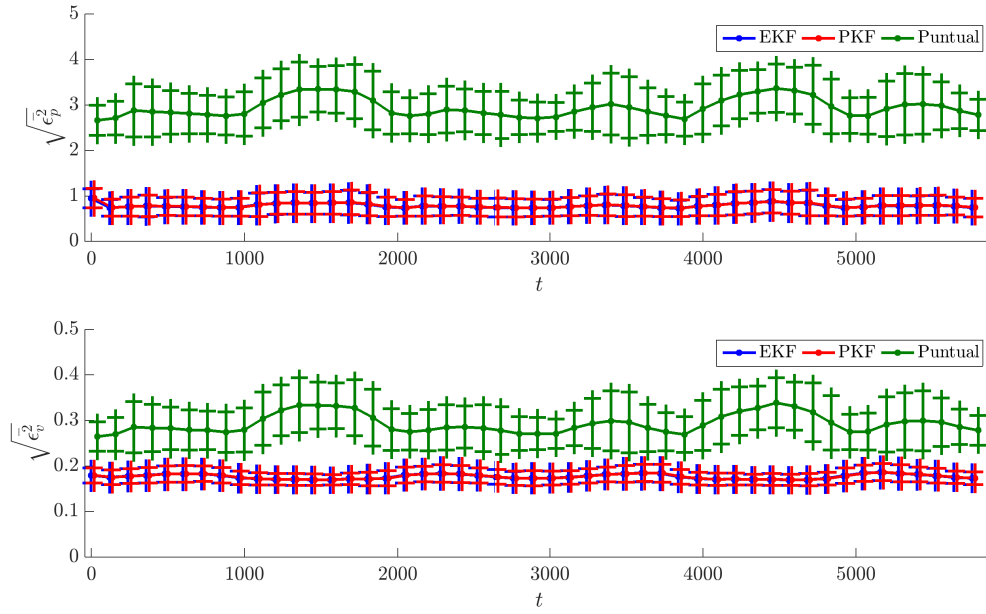


Figura 8.26: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

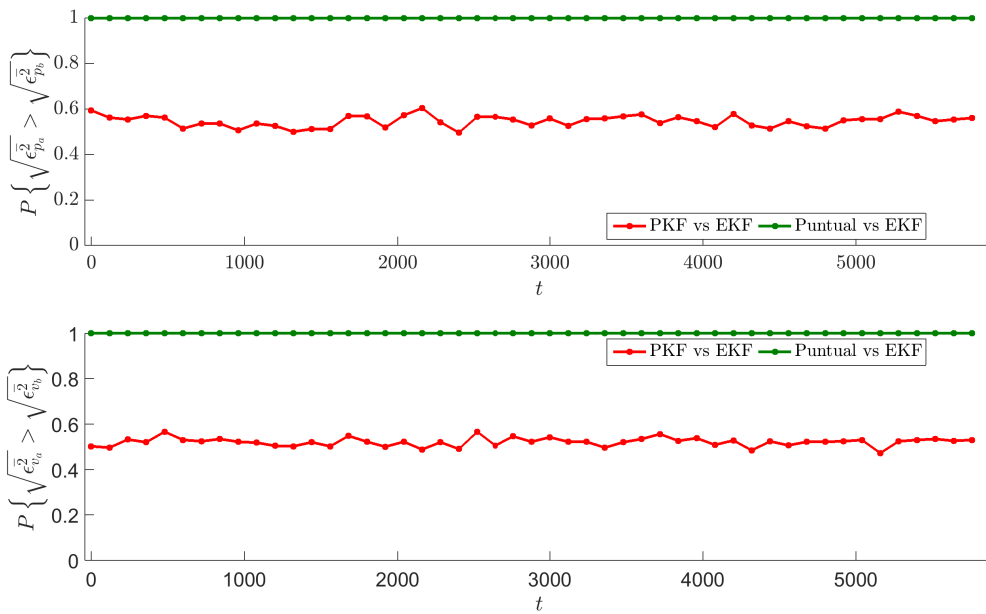


Figura 8.27: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

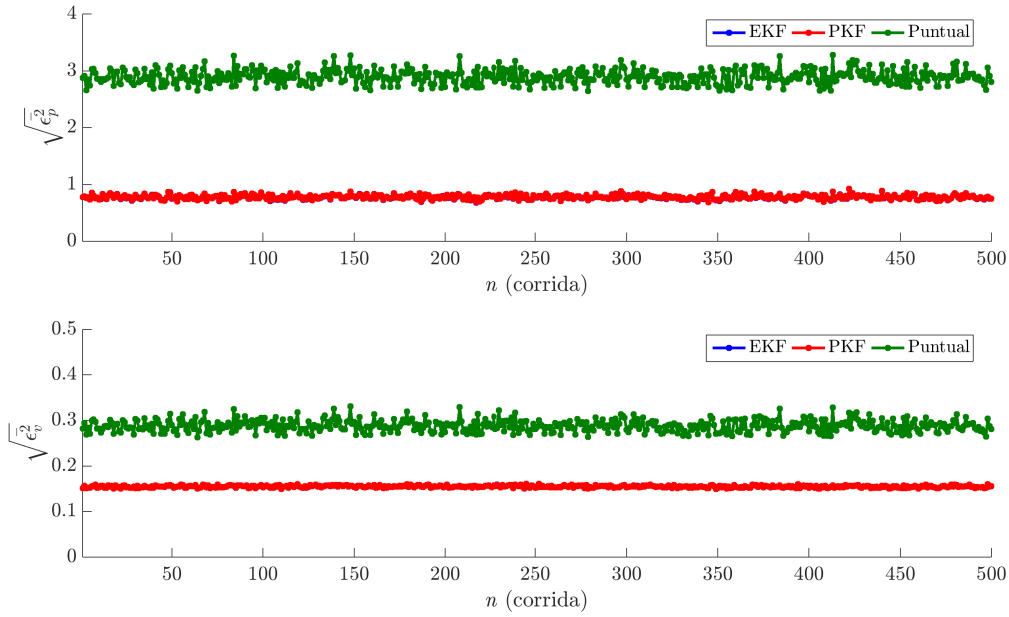


Figura 8.28: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

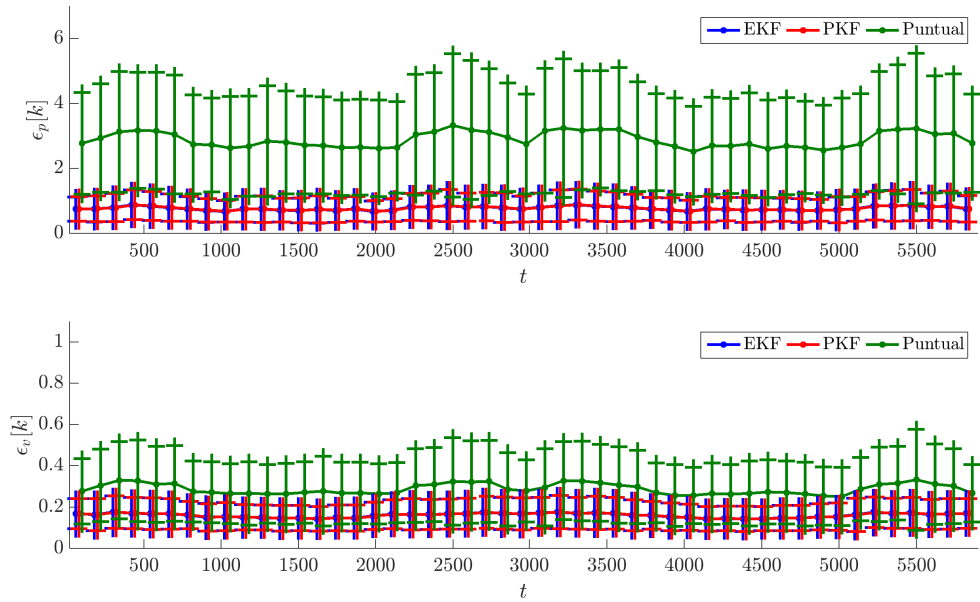


Figura 8.29: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

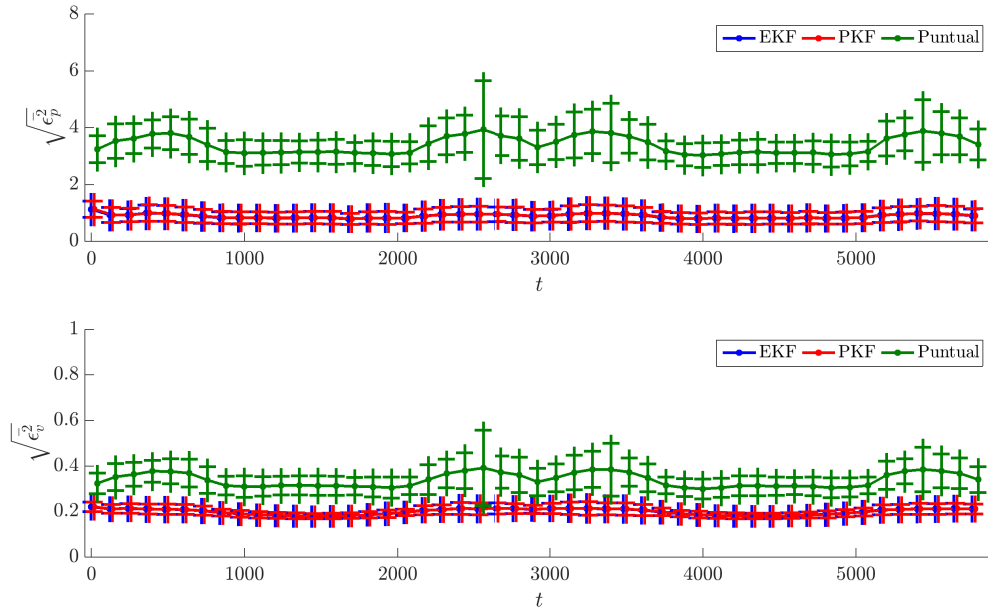


Figura 8.30: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

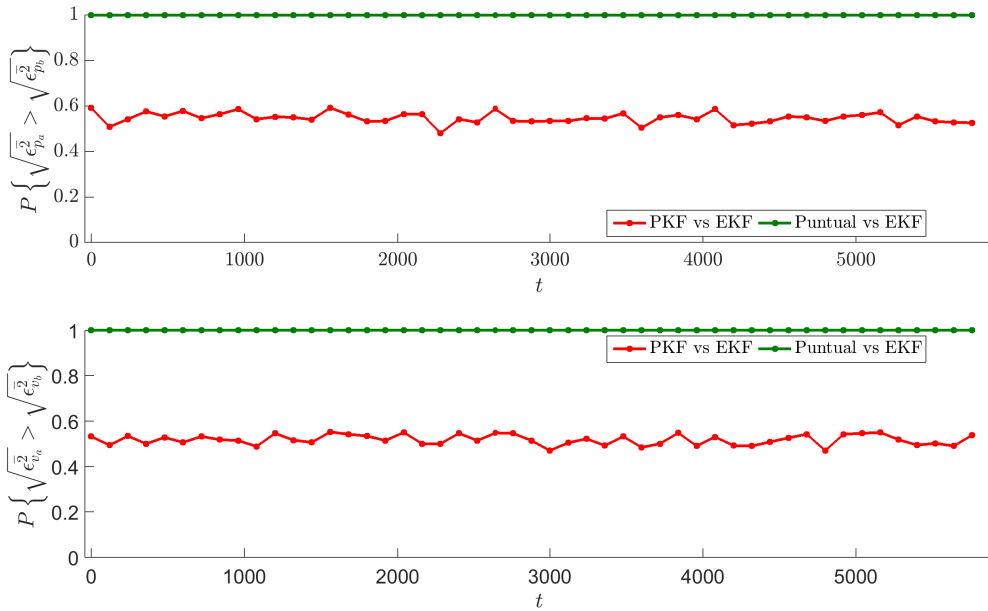


Figura 8.31: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

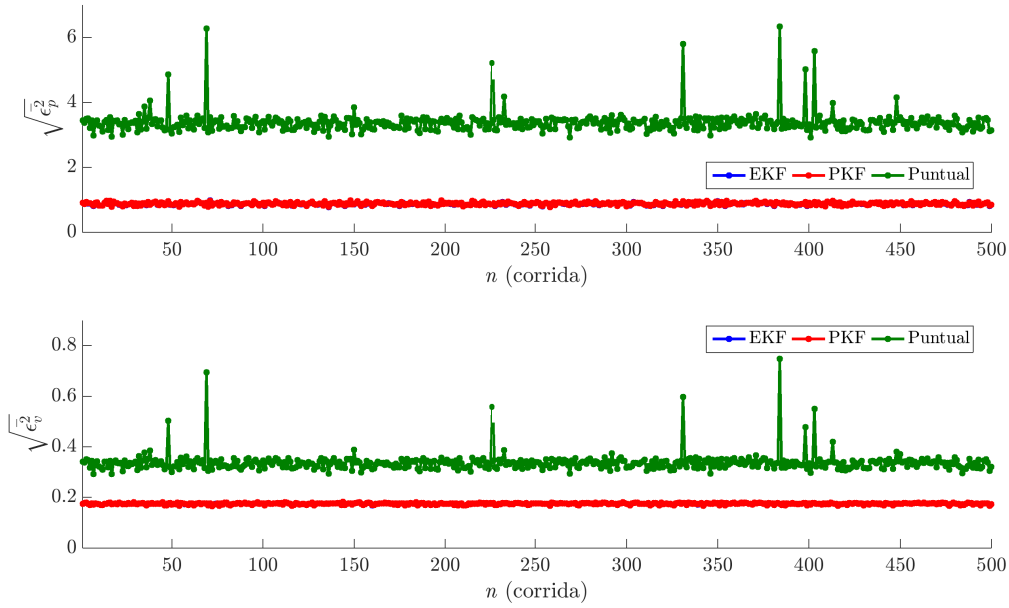


Figura 8.32: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

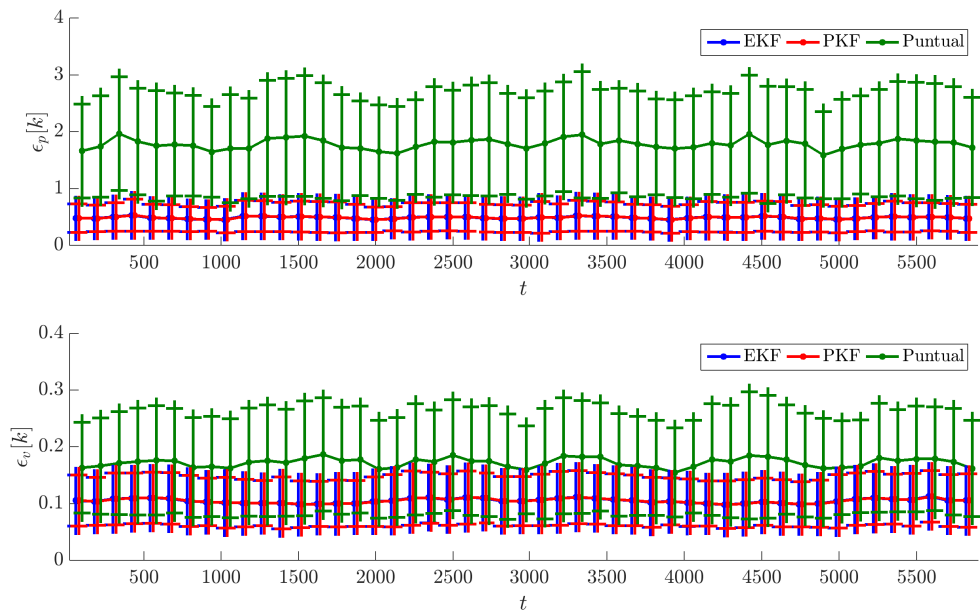


Figura 8.33: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

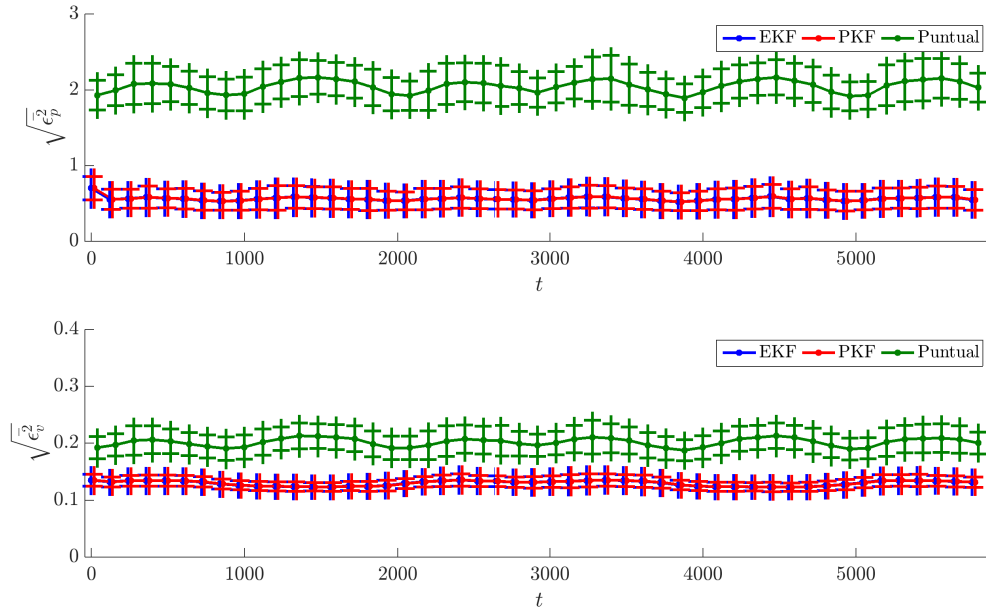


Figura 8.34: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

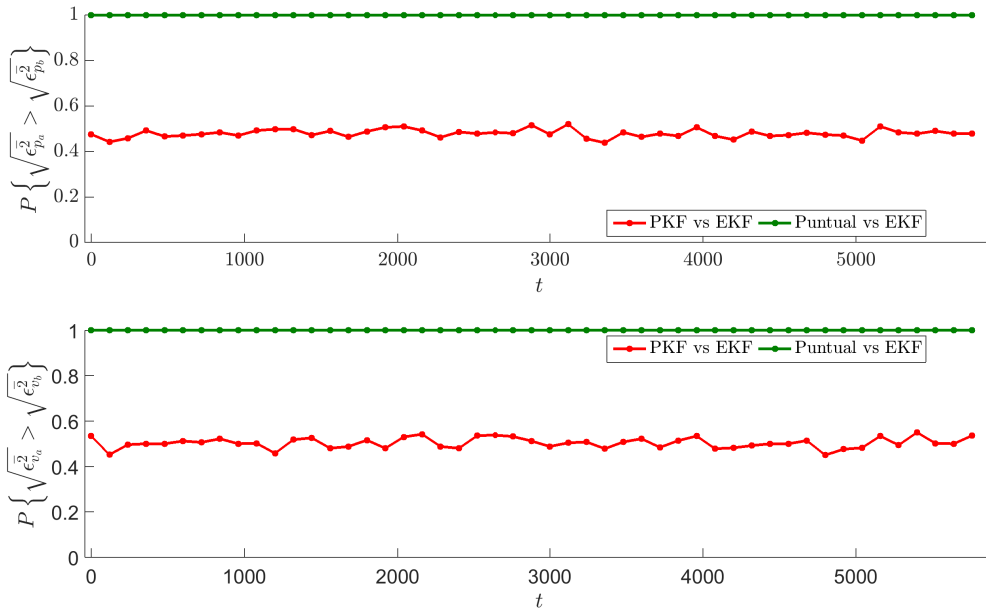


Figura 8.35: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_{\ddot{b}} = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

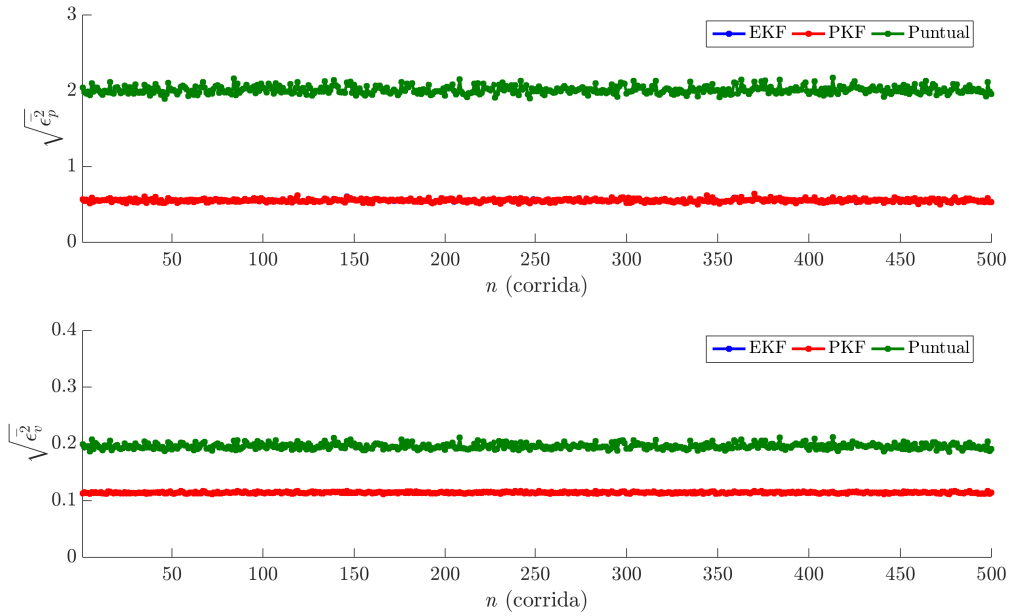


Figura 8.36: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 6,0$.

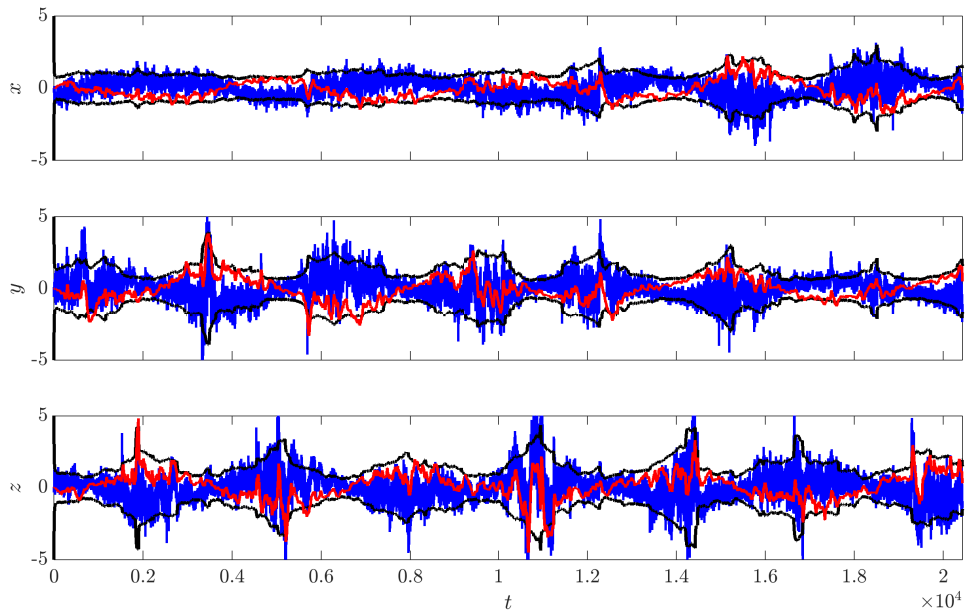
En el apéndice D se presentan los resultados obtenidos para el caso de utilizar los demás modelos propuestos. En todos los casos se observa un comportamiento similar al observado previamente.

8.5. Ejemplo de Aplicación

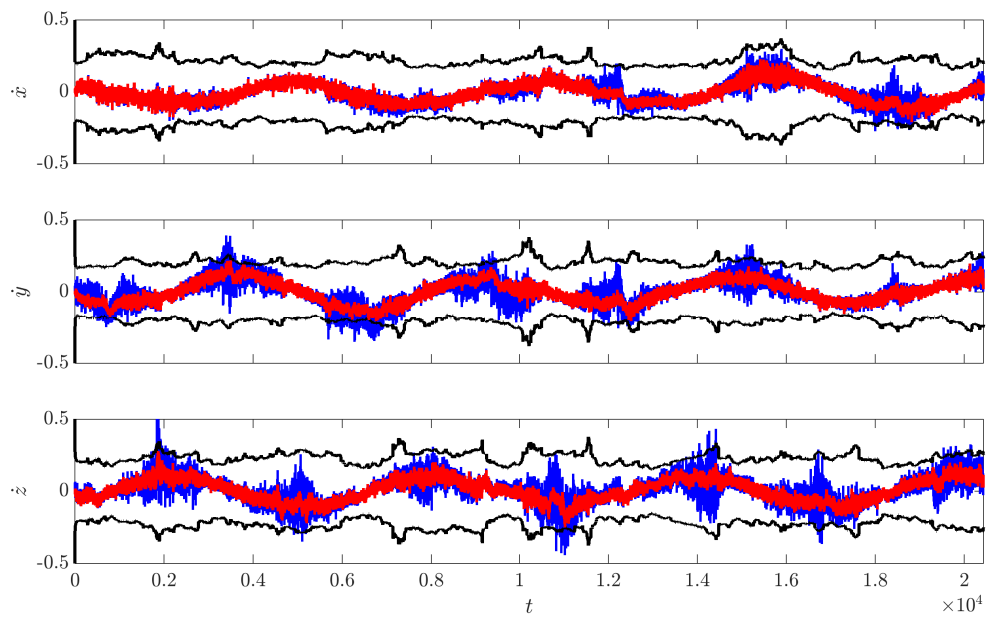
Como ejemplo de aplicación, analizaremos las mediciones tomadas a bordo del satélite argentino SAC-D por el receptor de plataforma. En este caso, se hace necesario aplicar las correcciones a los errores sistemáticos en las mediciones de pseudo-rango y delta-rango, como se describe en el capítulo 6, y modelamos la desviación estándar de cada medición de acuerdo con el C/N_0 estimado por el propio receptor.

Dado que en este caso no contamos con la posición y velocidad “reales” contra las cuales comparar, optamos por realizar la comparación entre estrategias de filtrado, tomando como referencia la solución obtenida con el modelo Dinámico IV. En las figuras 8.37, 8.38, 8.39, 8.40 y 8.41 se presentan los resultados obtenidos al utilizar los modelos Cinemático I, Cinemático II, Dinámico I, Dinámico II y Dinámico III, respectivamente. En cada caso también se presenta el “error” obtenido con la solución puntual, y el intervalo $\pm 3\sigma$ dado por la componente correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ . Se observa que en todos los casos, el error de estimación se encuentra prácticamente en todos los instantes acotado por dicho intervalo $\pm 3\sigma$.

Si bien los resultados no son totalmente conclusivos, ya que se está comparando entre sí diferentes modelos de filtrado, se puede verificar la correcta operación de las estrategias de filtrado propuestas, al utilizar mediciones reales, relevadas en la operación en órbita.

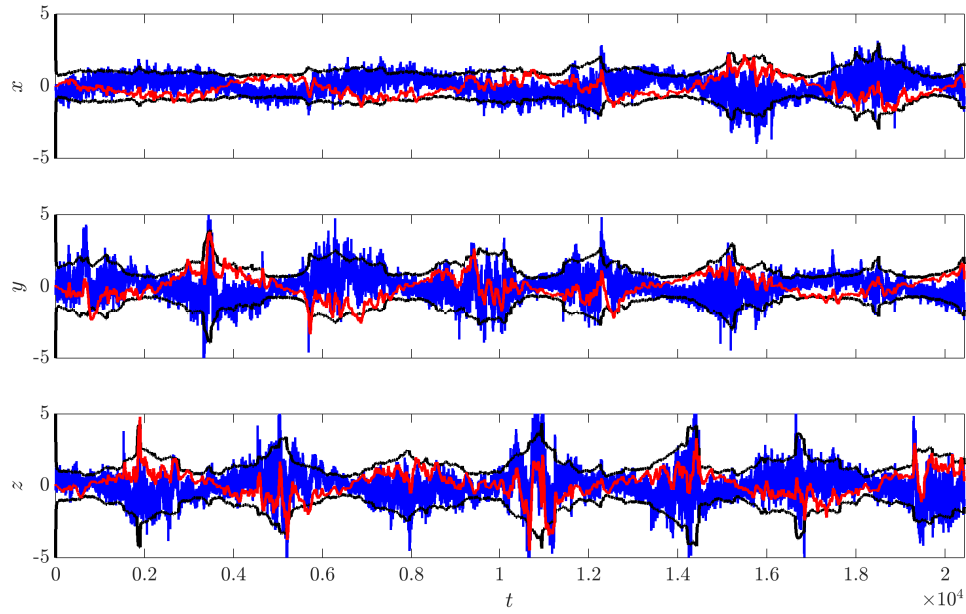


(a) Posición.

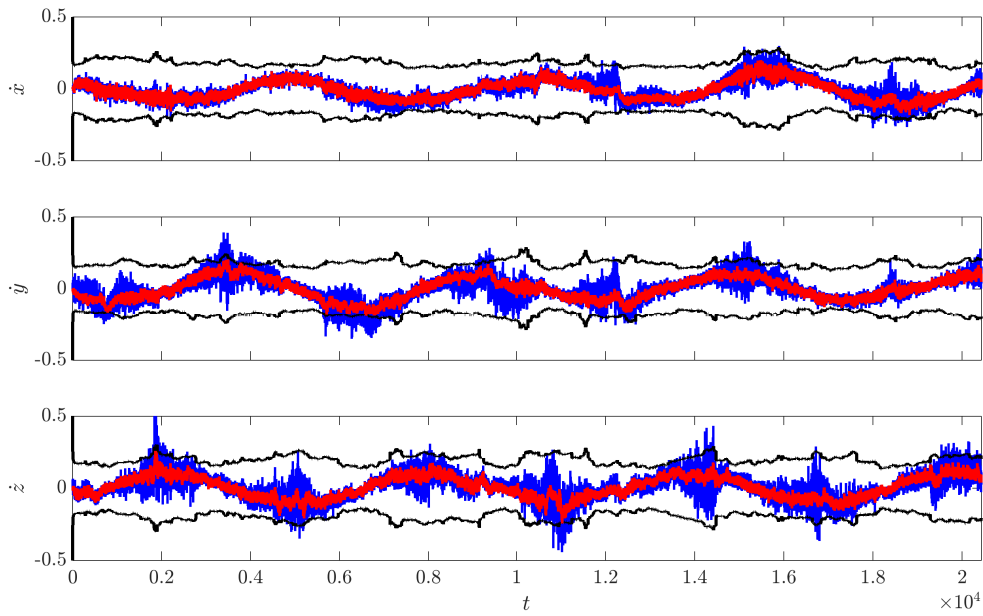


(b) Velocidad.

Figura 8.37: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 6,0$, con respecto a la solución tomada como referencia.

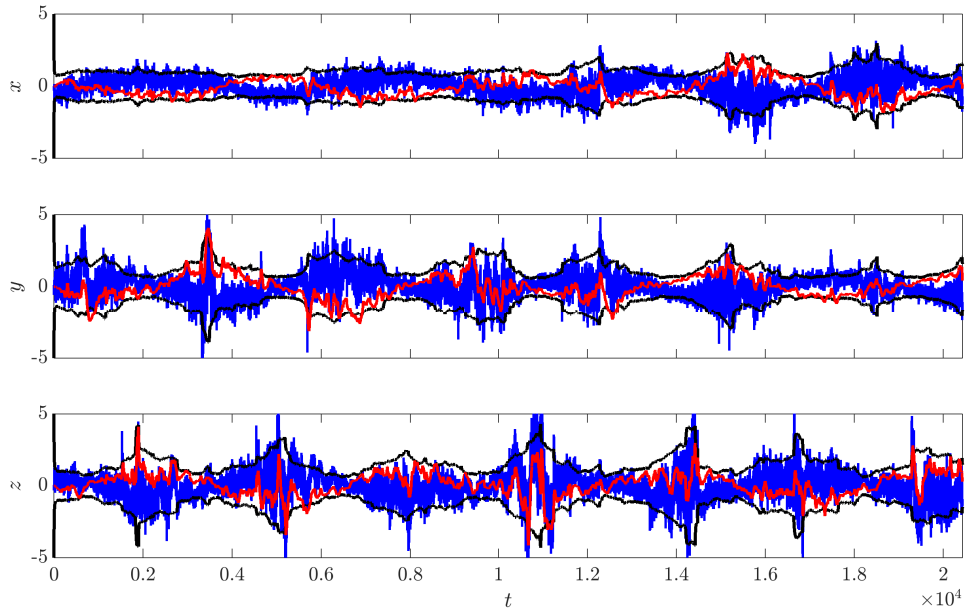


(a) Posición.

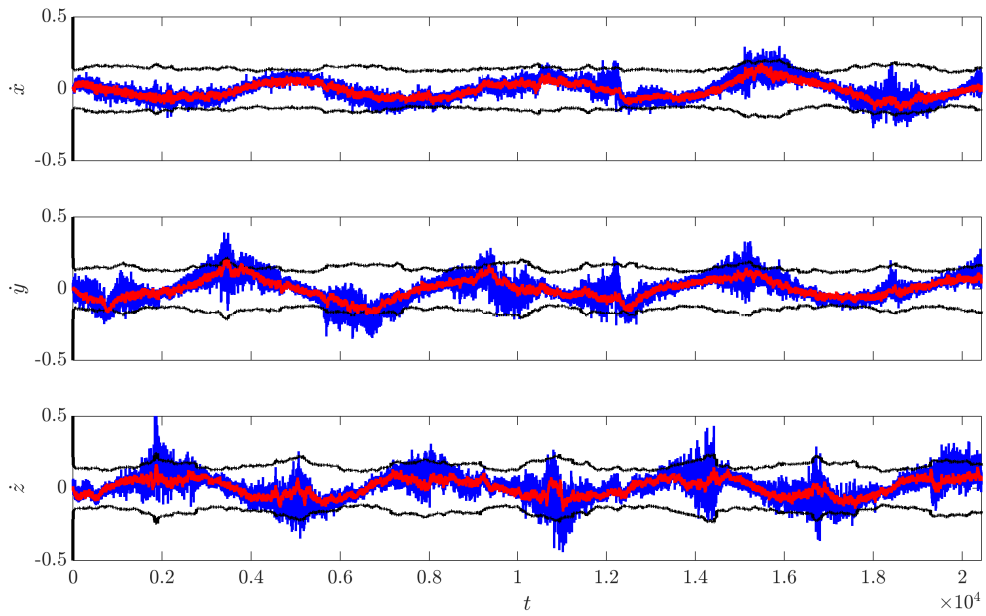


(b) Velocidad.

Figura 8.38: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$, con respecto a la solución tomada como referencia.

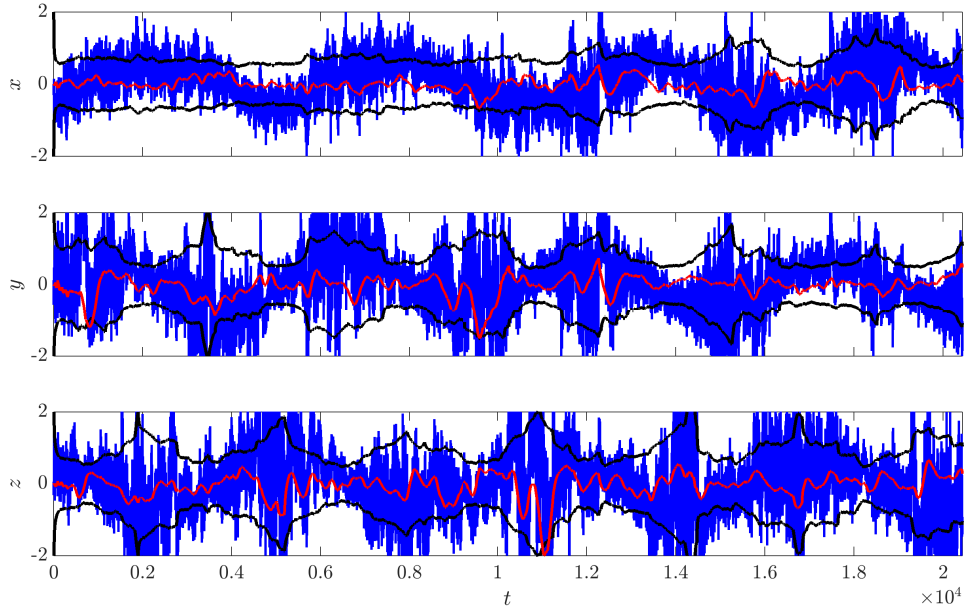


(a) Posición.

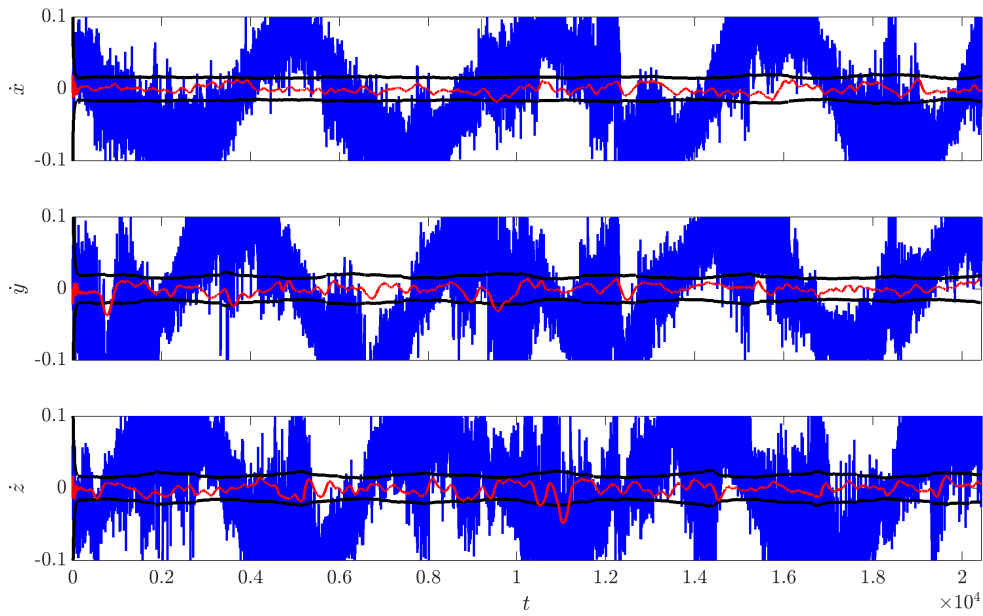


(b) Velocidad.

Figura 8.39: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 4,0 \times 10^{-2}$, con respecto a la solución tomada como referencia.

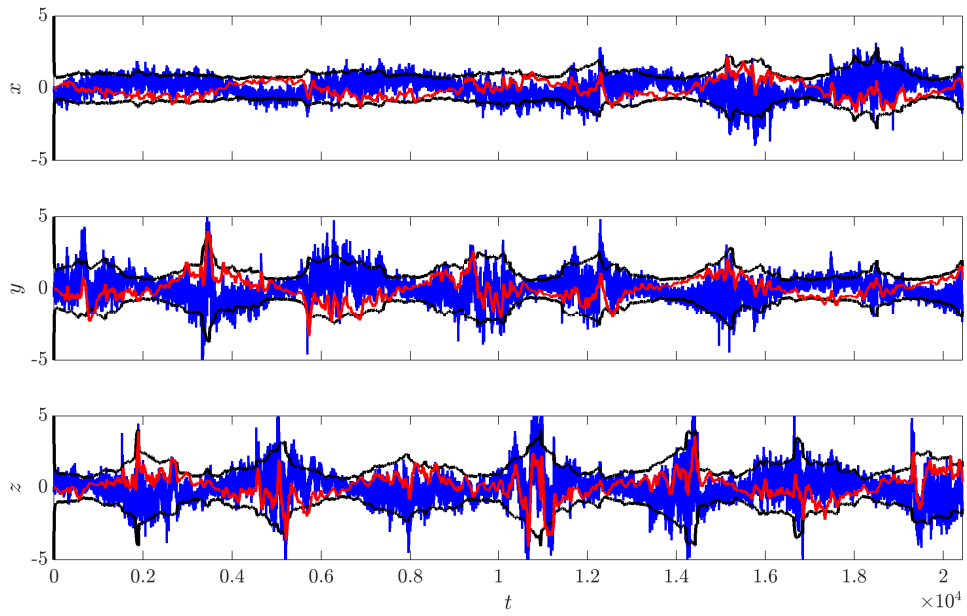


(a) Posición.

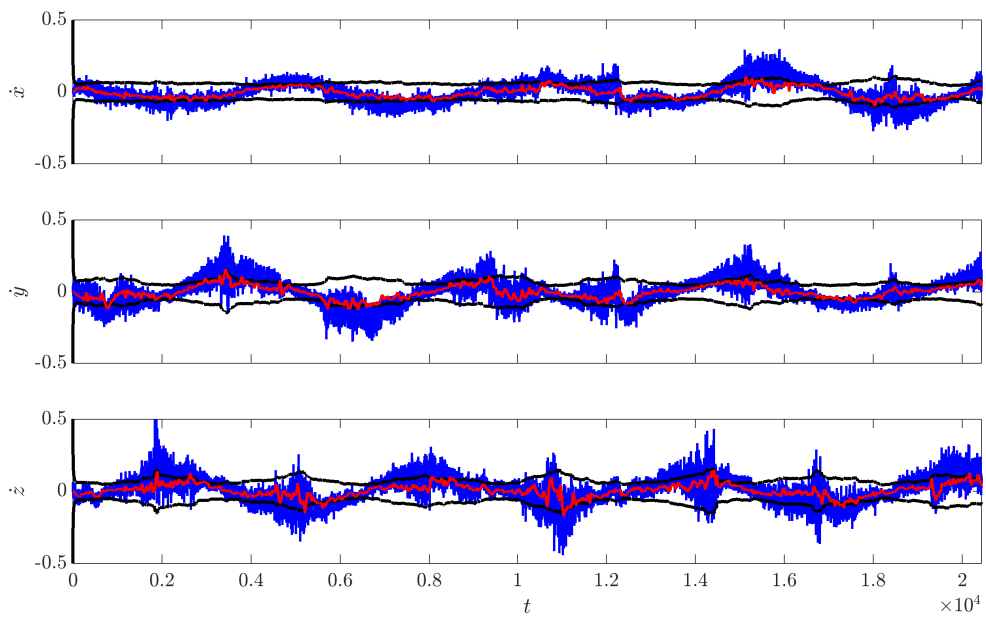


(b) Velocidad.

Figura 8.40: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, tomando $\sigma_{\vec{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$, con respecto a la solución tomada como referencia.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 8.41: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$, con respecto a la solución tomada como referencia.

8.6. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se realizó la comparación tanto de diferentes modelos como de dos estrategias de filtrado diferentes (EKF y EKF), utilizados para la navegación de vehículos aeroespaciales, en particular satélites LEO; utilizando mediciones de los sistemas GNSS. En ambos casos se recurrió al diseño de escenarios de simulación representativos, así como a la elección de diferentes métricas que permitieran comparar el desempeño de las distintas variantes, interpretando teóricamente los resultados obtenidos.

Para complementar este análisis basado puramente en simulación, se realizó el procesamiento de mediciones reales recabadas en la operación en órbita de un receptor de GPS, observando resultados satisfactorios.

CAPÍTULO 9

ANÁLISIS FRENTE A PERTURBACIONES

En este capítulo analizaremos el desempeño de las diferentes estrategias de filtrado presentadas en el capítulo 8 en situaciones que se apartan de la ideal, como las perturbaciones por fuerzas de *thrust* o la baja visibilidad de satélites (incluso la pérdida momentánea de varios de ellos).

La definición de los escenarios de simulación son similares a las descritas en la sección 8.1 con los agregados que correspondan a cada caso, que serán oportunamente señalados.

9.1. Perturbaciones de Thrust

Para modelar las fuerzas de *thrust* consideraremos actuadores de 10 N, en un satélite de 1000 kg, dando lugar a aceleraciones de $1 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$; ubicados en los tres ejes de coordenadas del cuerpo. Consideraremos que en diferentes instantes se aplican aceleraciones de esta magnitud en uno, en dos y en tres de dichos ejes; durante un intervalo de 60 segundos. En la figura 9.1a se muestran las aceleraciones modeladas en el marco de coordenadas del cuerpo, mientras que en la figura 9.1b se muestra cómo se traducen estas aceleraciones en el marco de coordenadas ECEF.

Al realizar las simulaciones con esta perturbación, no se observaron cambios significativos en el desempeño tanto de los modelos Cinemáticos I y II como del modelo Dinámico I, al utilizar las mismas sintonías que en el caso ideal. Esto resulta totalmente esperable, ya que las magnitudes de las aceleraciones de la perturbación se encuentran por debajo de los valores de desviación estándar de ruido de modelo para estos tres casos.

No obstante, al analizar el desempeño del modelo Dinámico II con los valores de sintonía óptimos en el caso ideal, se observa el comportamiento descrito en las figuras 9.2 y 9.4. Puede verse que en los instantes en los que existe aceleración, dado que la perturbación excede ampliamente la modelada, el filtro no es capaz de rechazarla y por ende aparecen

errores en las estimaciones tanto de posición y sesgo como de velocidad y deriva.

Sin contar con información adicional, la única forma de mitigar este efecto consiste en aumentar la desviación estándar del ruido de perturbación en el modelo. En las figuras 9.3 y 9.5 se puede observar que al tomar un valor de $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$ se logra un comportamiento aceptable del filtro. Volviendo a la figura 8.7 puede verse que con este valor de sintonía, esta opción de filtrado sigue mostrando un desempeño superior al de los modelos Cinemático I, Cinemático II y Dinámico I.

En las figuras 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10 y 9.11 se presenta el comportamiento de los modelos Dinámico III y Dinámico IV, cada uno con los valores óptimos de sintonía correspondientes. Se observa que mientras en el modelo Dinámico III la perturbación afecta casi únicamente a la estimación de aceleración y es filtrada casi completamente en los restantes estados, para el modelo Dinámico IV la situación es análoga a la observada en el modelo Dinámico II, es decir, en los instantes en los que existe aceleración, dado que la perturbación excede ampliamente la modelada, el filtro no es capaz de rechazarla y por ende aparecen errores en las estimaciones tanto de posición y sesgo, de velocidad y deriva como de aceleración.

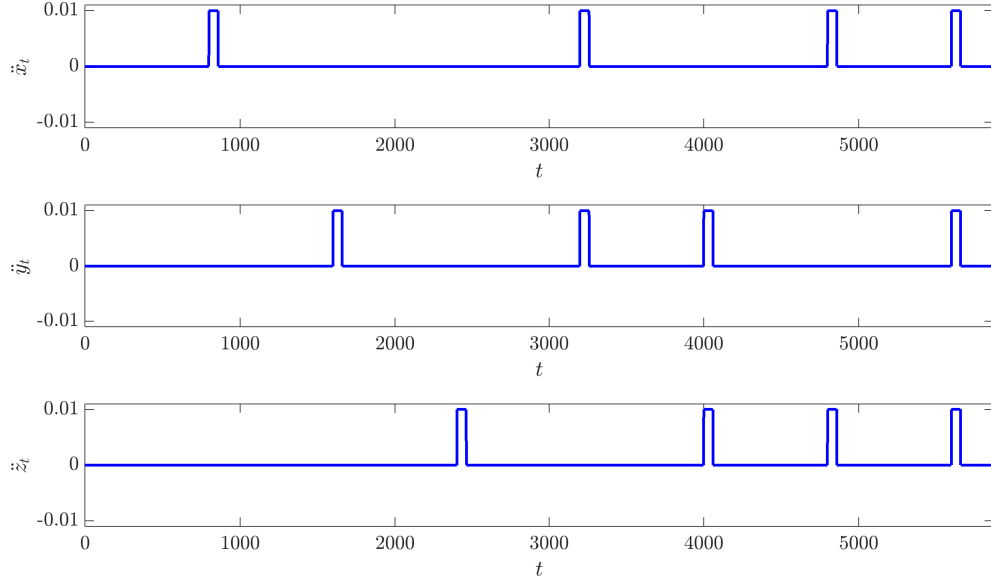
Nuevamente, sin contar con información adicional, la única forma de mitigar este efecto consiste en aumentar la desviación estándar del ruido de perturbación en el modelo. En las figuras 9.12, 9.13 y 9.14 se puede observar que al tomar un valor de $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$ se logra un comportamiento aceptable del filtro. Volviendo a la figura 8.7 puede verse que con este valor de sintonía, el desempeño del modelo Dinámico IV es prácticamente igual al que se obtiene con el modelo Dinámico III.

Si bien en la figura 8.7 no se observa en detalle, el desempeño de estos tres modelos (Dinámico II, III y IV) cada uno con los valores de sintonía que permiten mitigar el efecto de esta perturbación resulta prácticamente el mismo. Una comparación más rigurosa de este aspecto requiere un análisis más detallado que supere el puramente cualitativo hecho previamente¹, y que excede los objetivos de este capítulo.

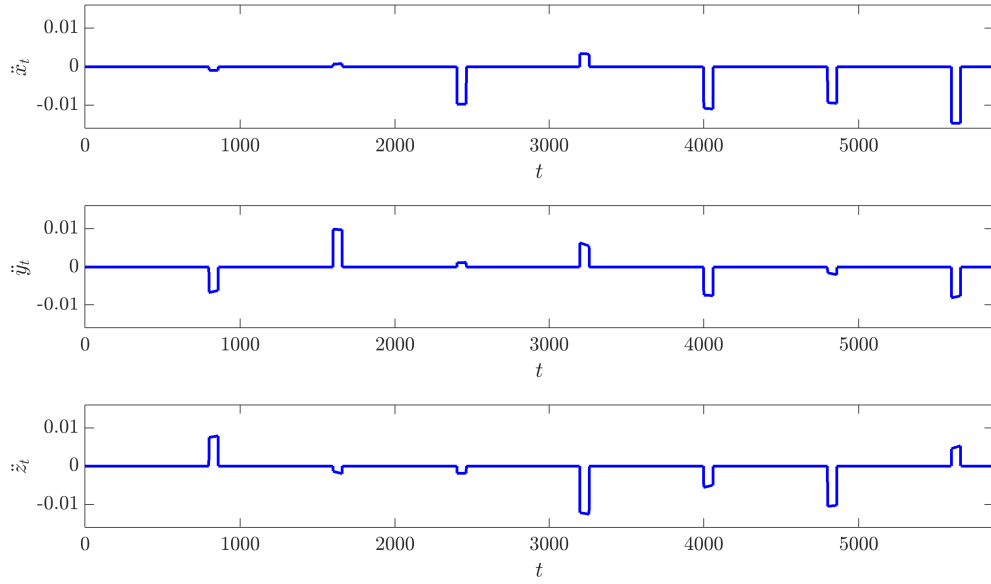
Por supuesto, en caso de contar con información adicional sobre los instantes de aplicación de las perturbaciones, se podría proponer una estrategia que aumente la desviación estándar del ruido de modelo en dichos instantes, lo cual lograría un desempeño global superior.

En caso de utilizar mediciones del sistema GLONASS, o mediciones combinadas de los sistemas GPS y GLONASS se observó un comportamiento similar. Las figuras para los modelos Dinámico II, Dinámico III y Dinámico IV se presentan en el apéndice D.

¹Es decir, establecer alguna métrica que permita cuantificar el desempeño de cada modelo ante perturbaciones.

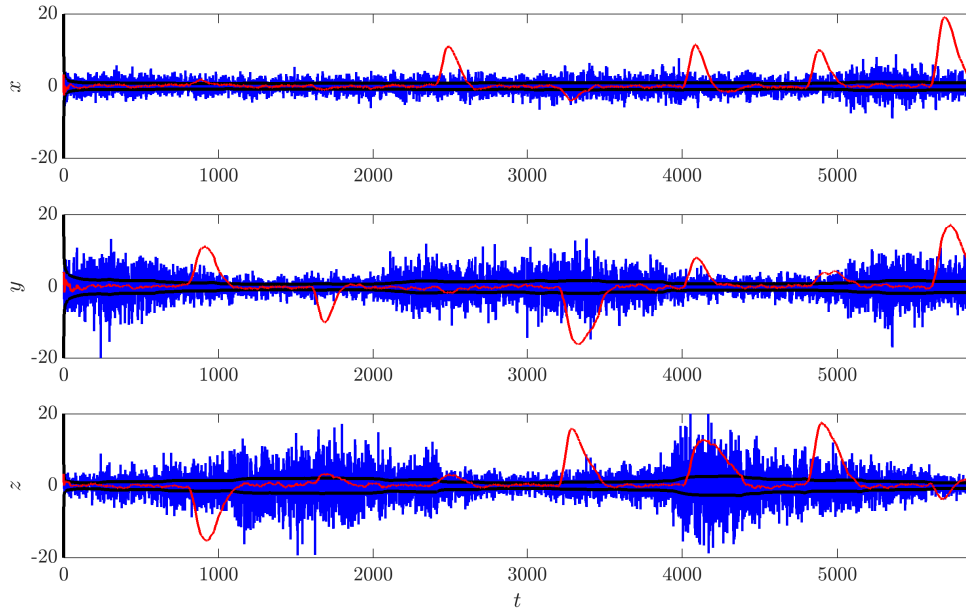


(a) Coordenadas del cuerpo.

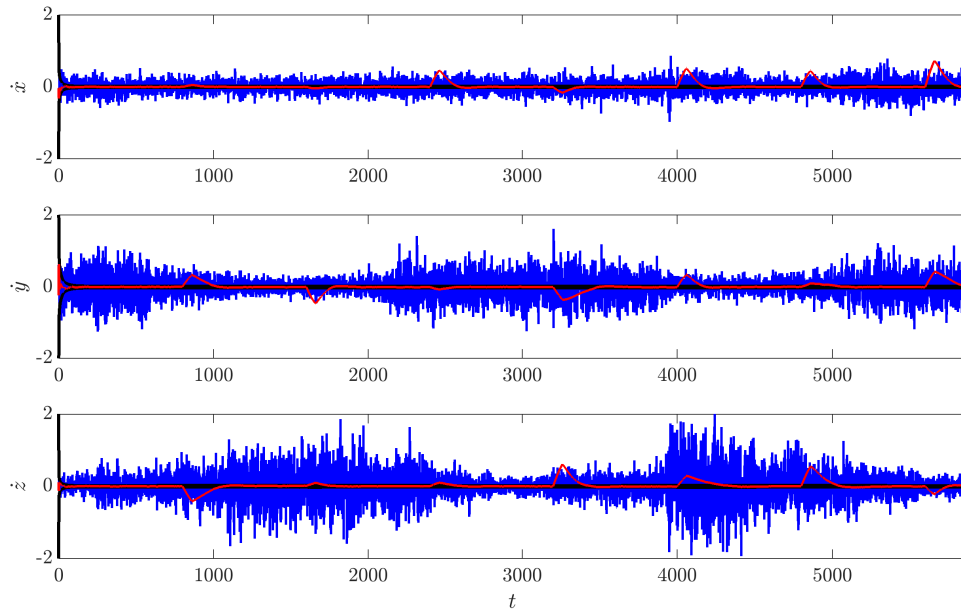


(b) Coordenadas ECEF.

Figura 9.1: Aceleraciones de Thrust aplicadas.

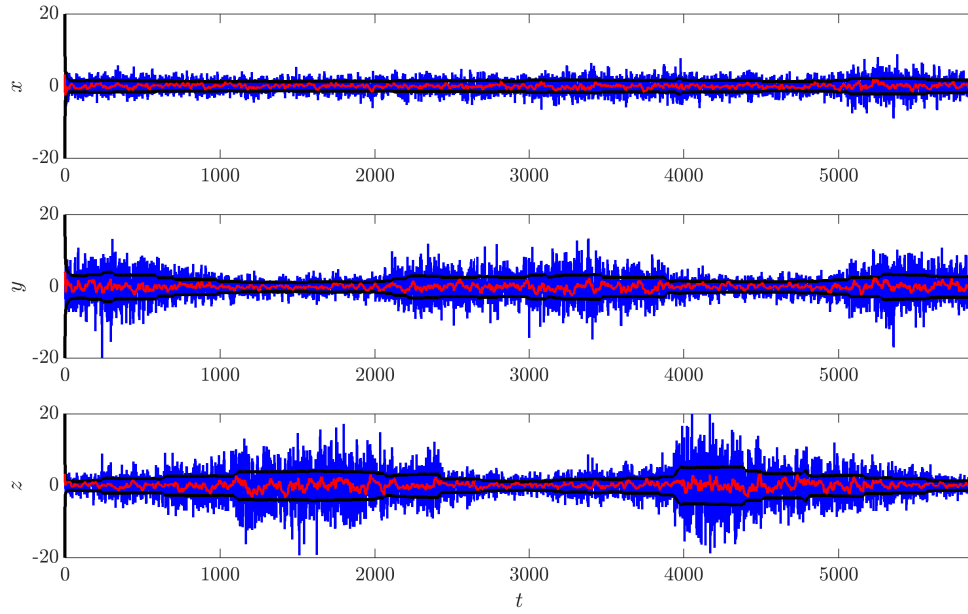


(a) Posición.

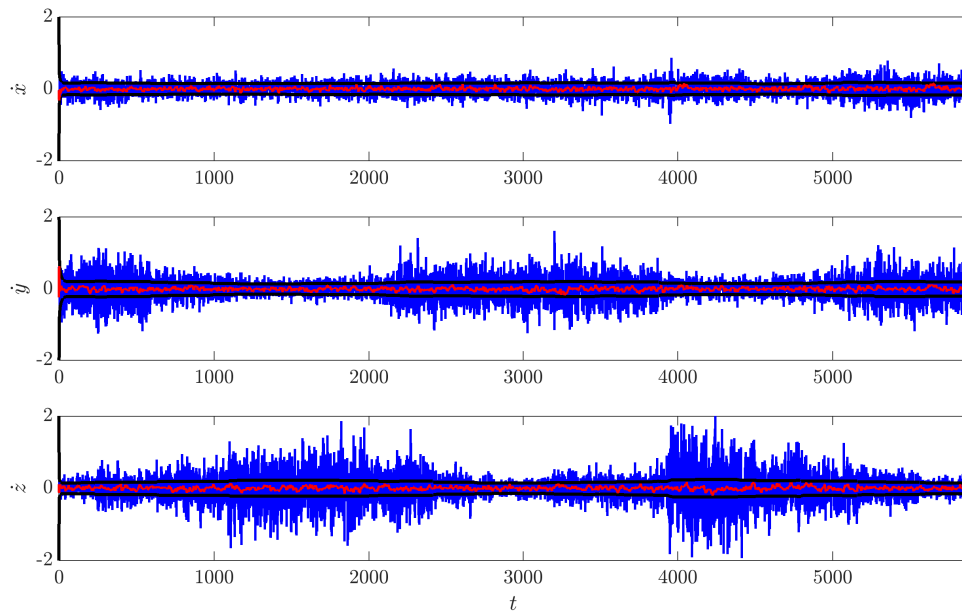


(b) Velocidad.

Figura 9.2: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.3: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (---), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\vec{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

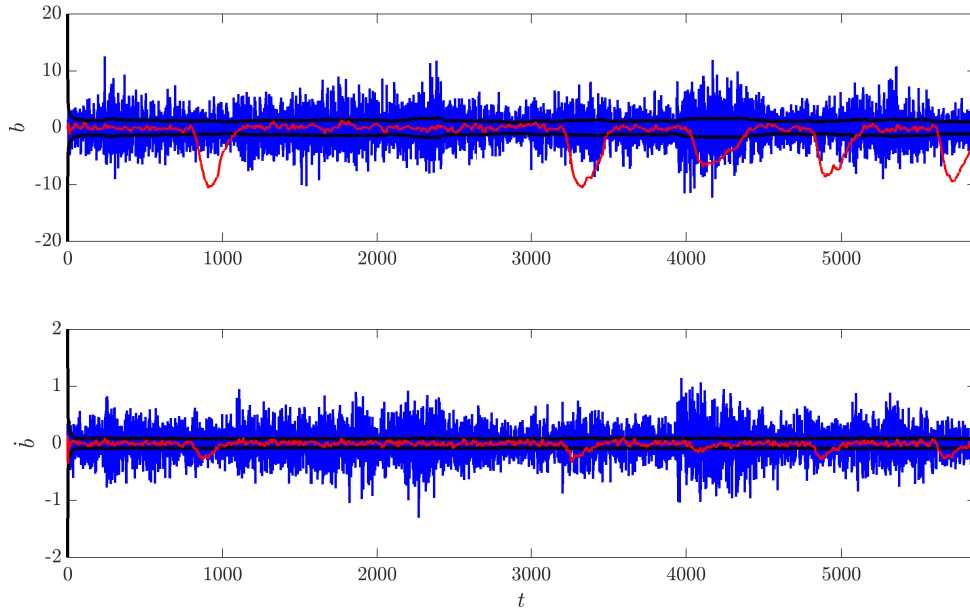


Figura 9.4: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

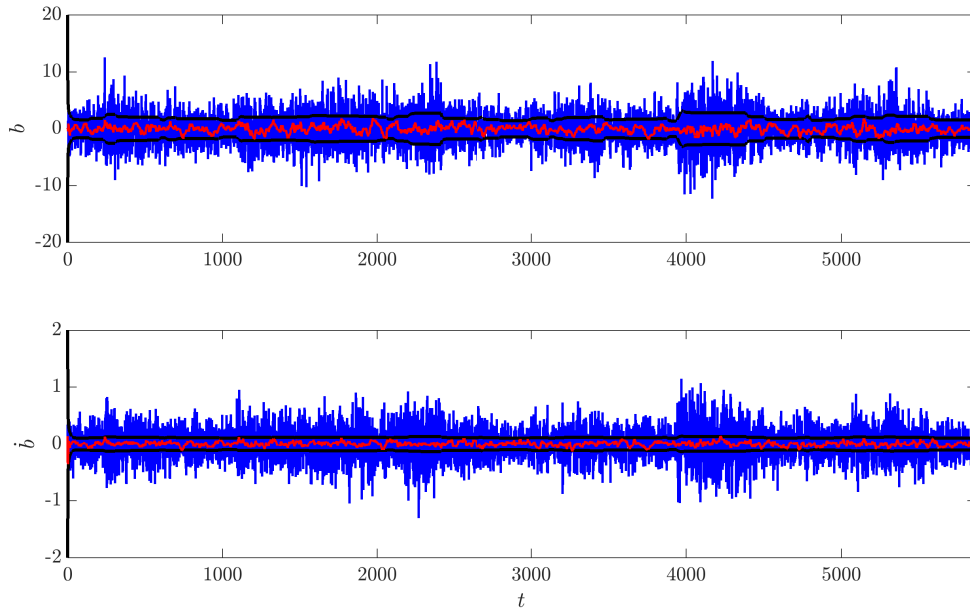
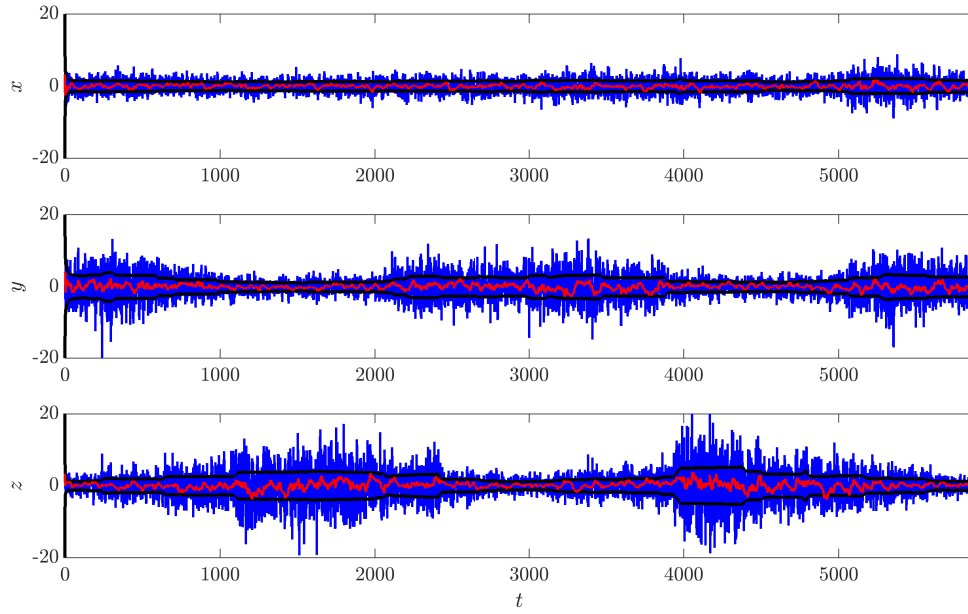
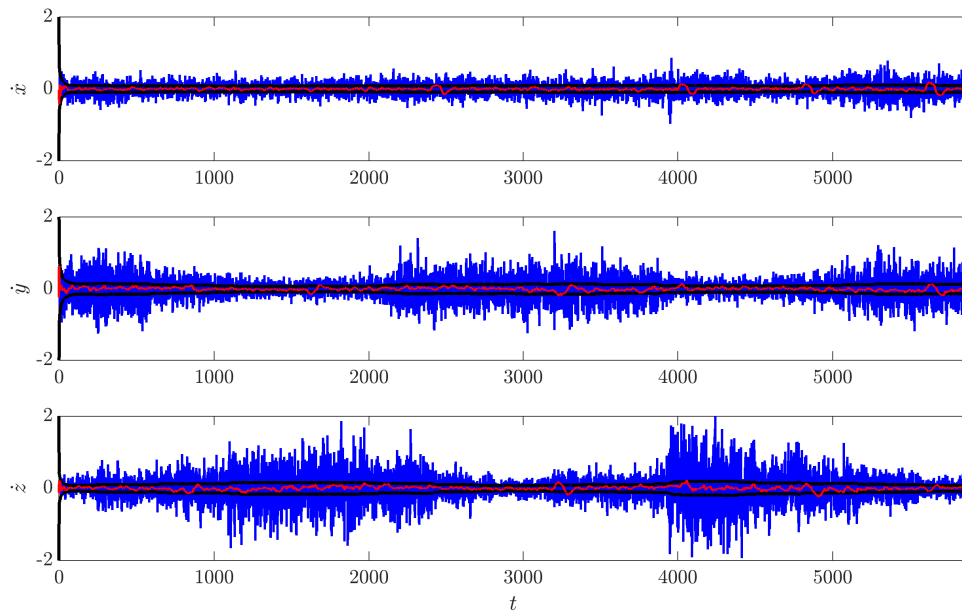


Figura 9.5: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.6: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

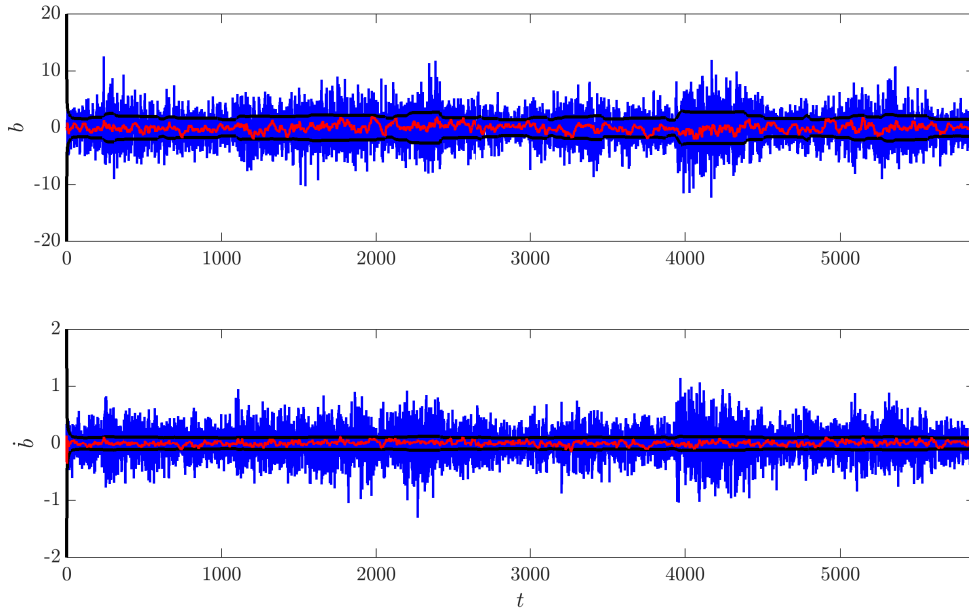


Figura 9.7: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

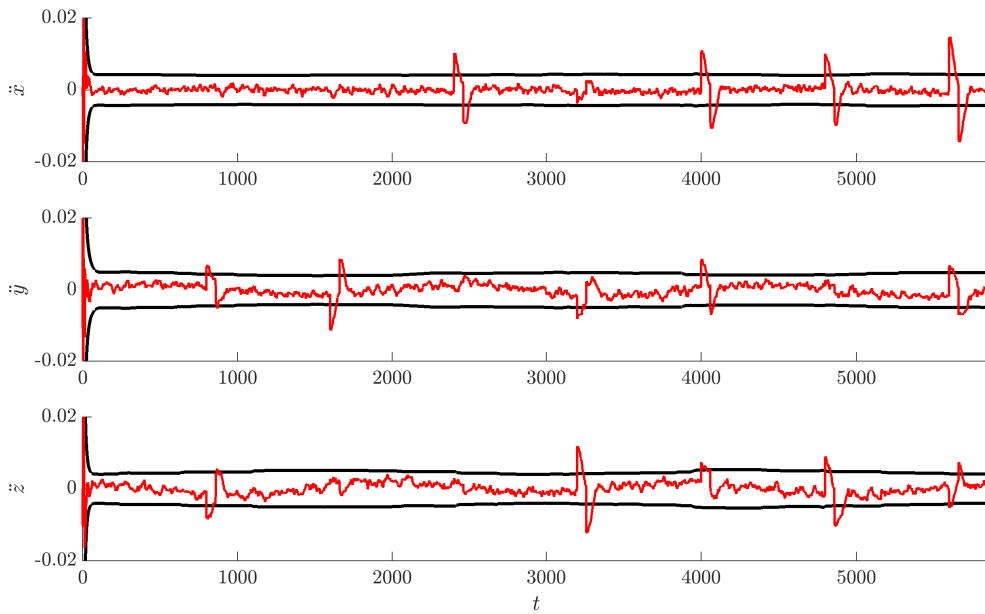
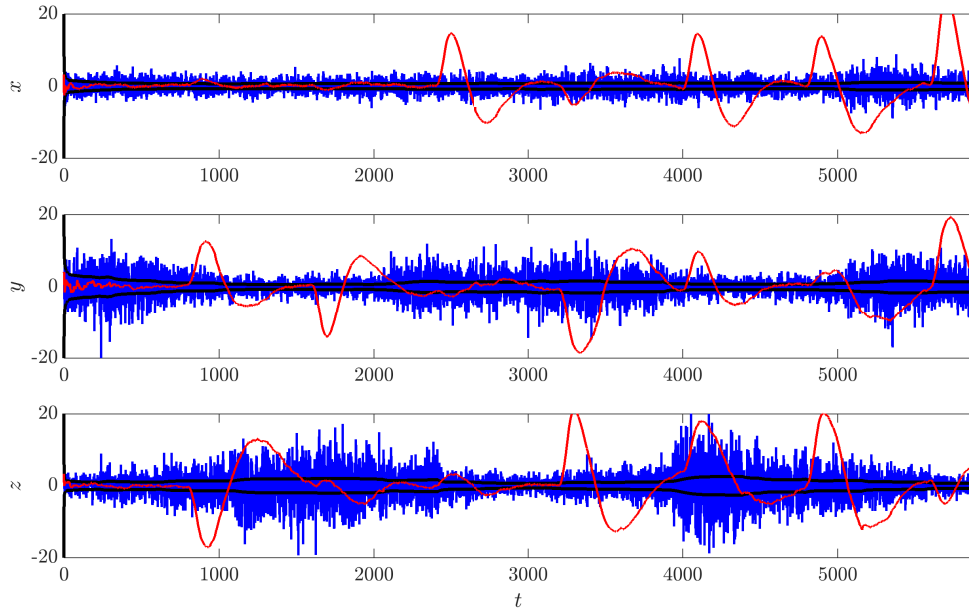
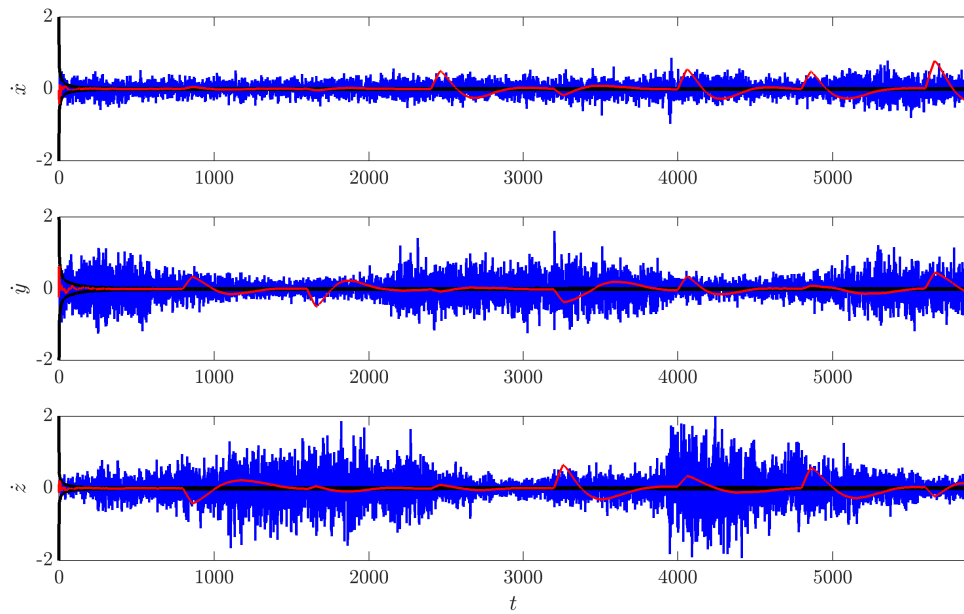


Figura 9.8: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.9: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

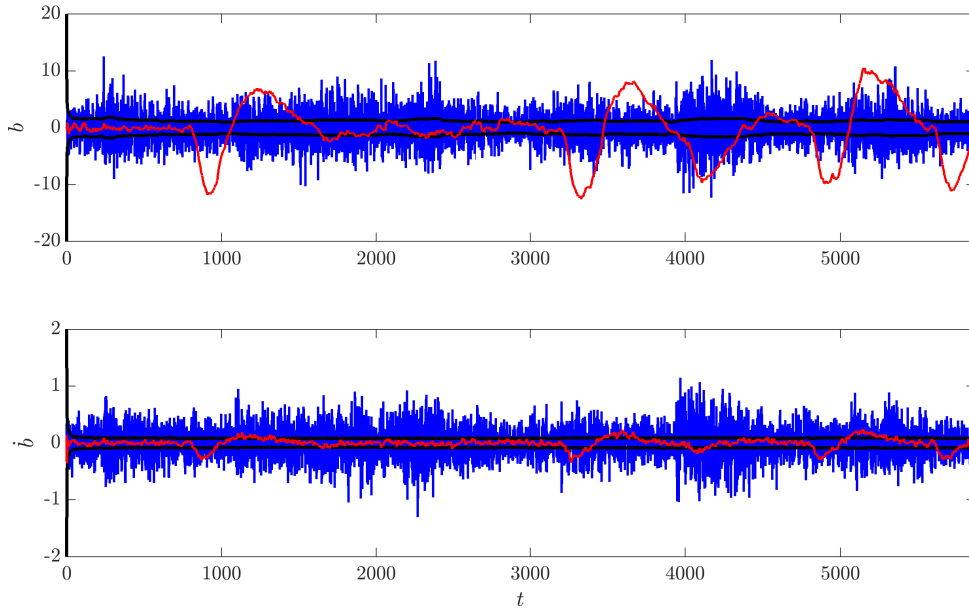


Figura 9.10: Error en las soluciones de sesgo y deriva y aceleración con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

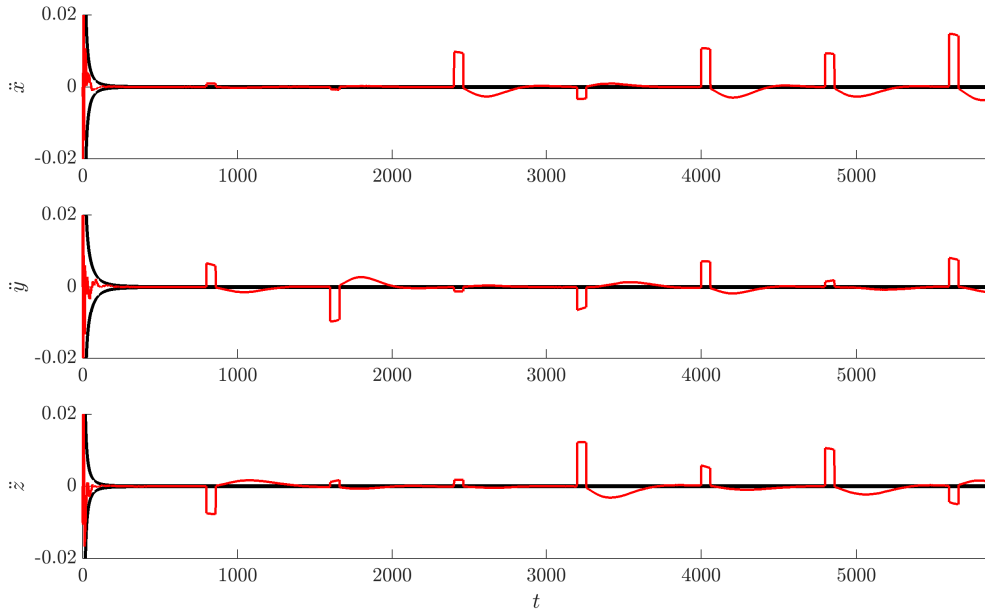
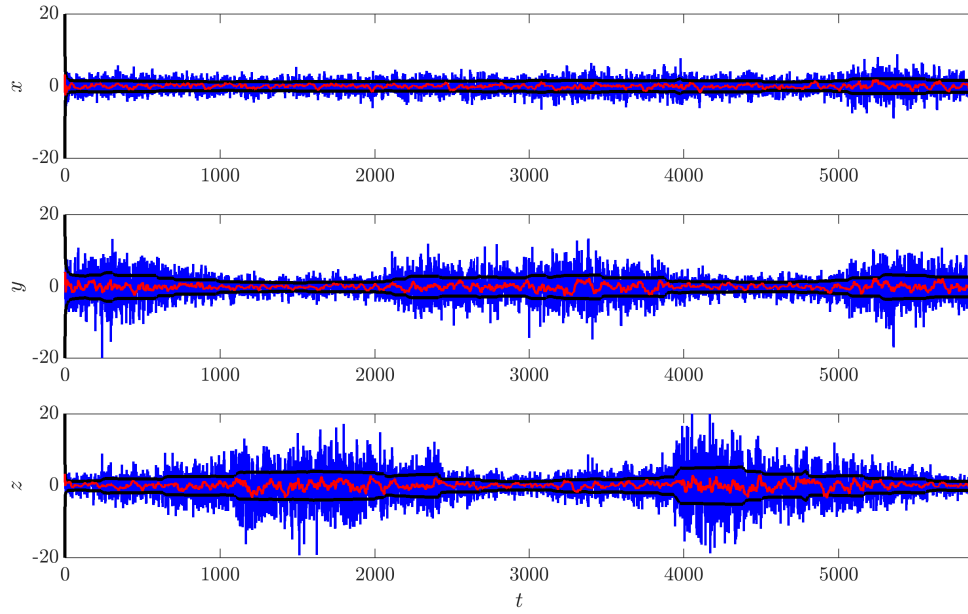
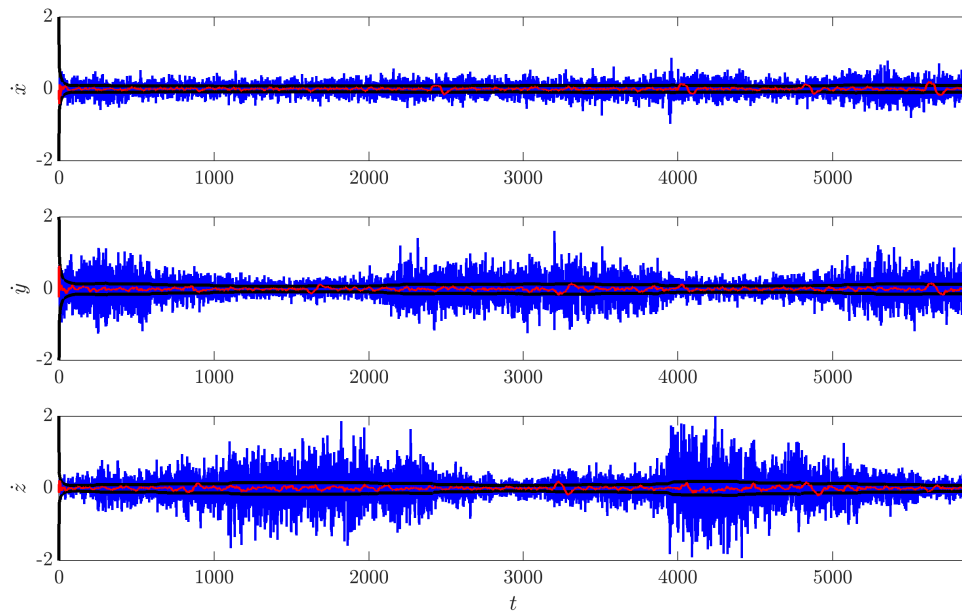


Figura 9.11: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.12: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (---); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

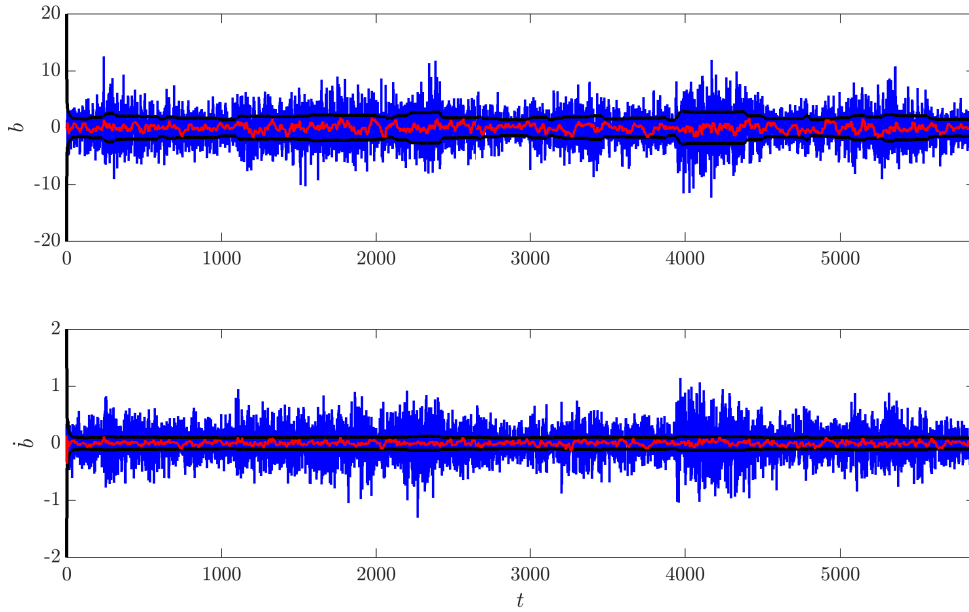


Figura 9.13: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

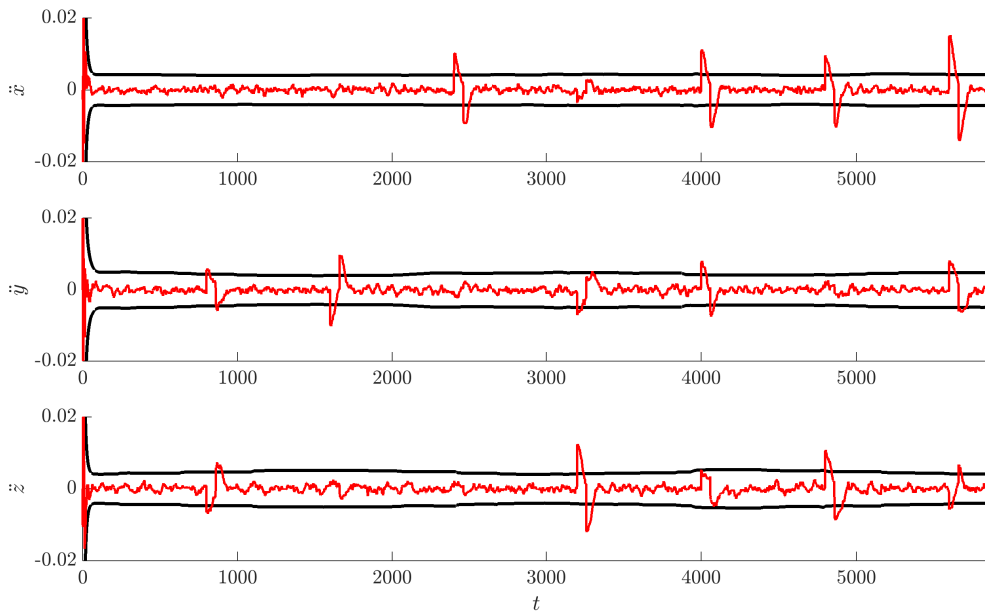


Figura 9.14: Error en las solución de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

9.2. Pérdida de satélites

En las simulaciones “ideales” formuladas en la sección 8.1 consideramos que todos los satélites físicamente visibles eran utilizados en la solución de navegación. En la práctica existen situaciones (como la analizada en el capítulo 7) que distan bastante del caso ideal. Para analizar el desempeño de las estrategias de filtrado propuestas en esta situación se plantea un escenario en el que se cuenta con un máximo de tan solo cuatro satélites disponibles en todo instante. Además, en determinados instantes se reduce la cantidad de satélites por debajo de este número, como se muestra en la figura 9.15.

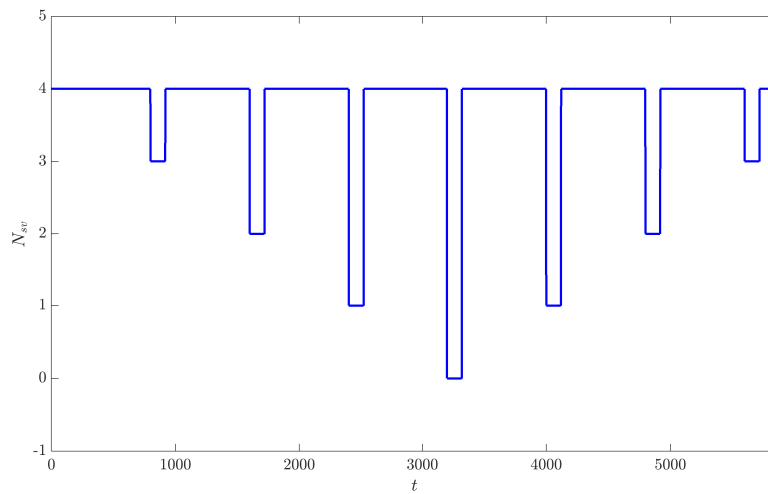


Figura 9.15: Cantidad de satélites visibles.

En las figuras 9.16 y 9.17 se presentan los resultados de error de estimación que se obtienen utilizando el modelo Cinemático I en esta situación. A modo de comparación, también se incluye el resultado de solución puntual, pero considerando en este caso que en todos los instantes se cuenta con cuatro satélites², ya que en caso contrario no sería posible obtener la solución puntual.

Se observa que en los intervalos en los que se tiene pérdida de satélites el error de estimación se incrementa notoriamente. Únicamente en los casos en los que se cuenta con 3 satélites podemos considerar que el error resulta aceptable (se prefiere no aumentar los límites de graficación para que se note en detalle este caso).

En las figuras 9.18 9.19 y 9.20 se presentan los resultados para el modelo Cinemático II. Se observa que si bien el error es menor que en el caso anterior, el comportamiento resulta poco aceptable.

En las figuras 9.21 y 9.22 se presentan los resultados para el modelo Dinámico I. Se observa que en este caso el desempeño es muy superior, manteniéndose el error de velocidad prácticamente por debajo del error en la solución puntual.

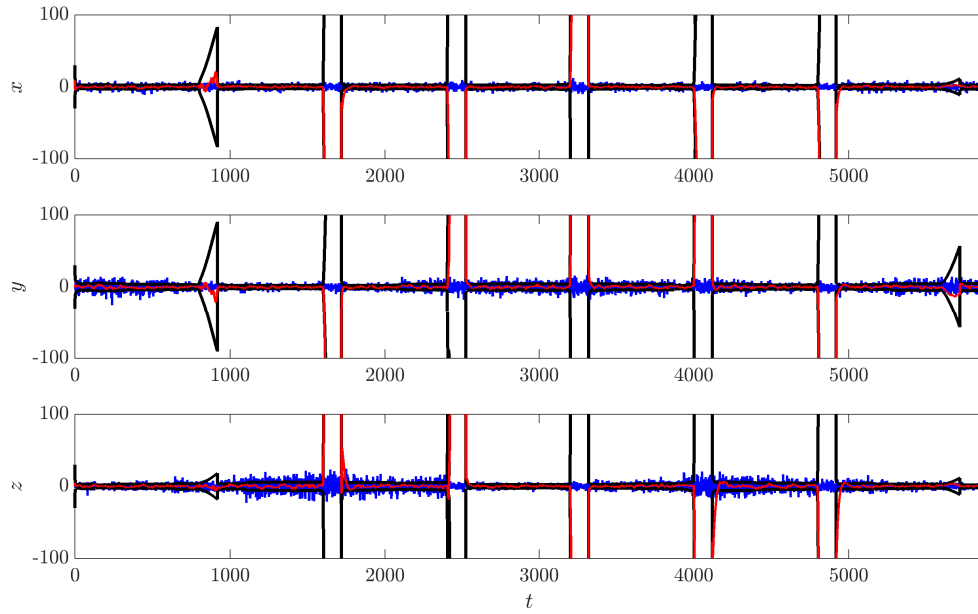
²En caso que para el EKF se utilicen cuatro satélites, son los mismos que los utilizados en la solución puntual. En caso que en el EKF se cuente con menos de cuatro satélites, estos son un subconjunto de los cuatro utilizados en la solución puntual.

Finalmente, en las figuras 9.23, 9.24, 9.25, 9.26, 9.27, 9.28, 9.29 y 9.30 se presentan los resultados para los modelos Dinámico II, Dinámico III y Dinámico IV. En primer lugar se puede observar que en los modelos Dinámico II y Dinámico IV prácticamente no se altera el comportamiento, quedando casi en todos los casos el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico por debajo del error en la solución puntual. El comportamiento observado se explica en función de la mayor exactitud del modelo implementado en el EKF, que permite confiar en el mismo aún en ausencia de mediciones.

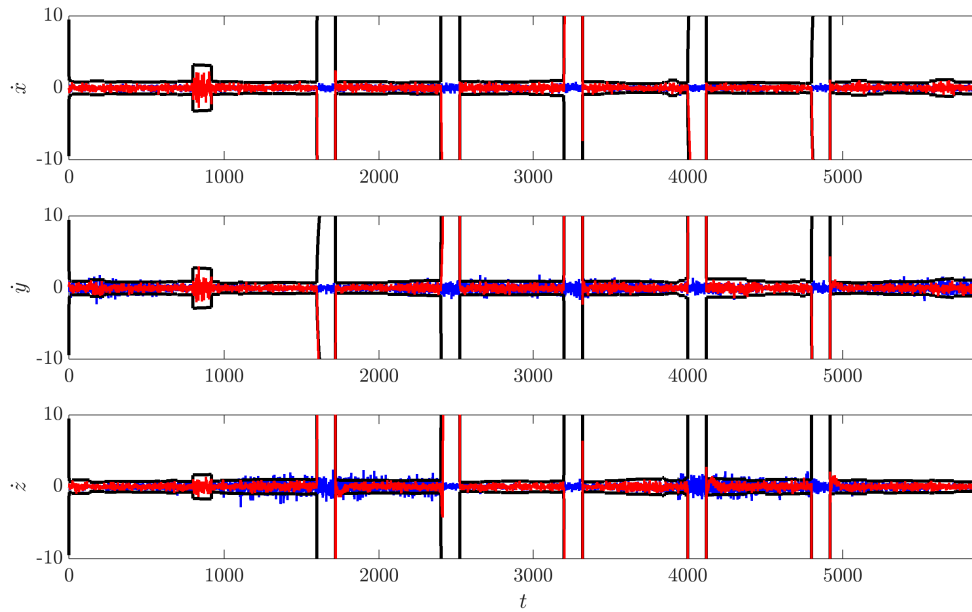
En segundo lugar se observa que si bien el modelo Dinámico III presenta un peor comportamiento que estos dos anteriores, su desempeño es mucho mejor que el logrado por el modelo Dinámico I. Si bien en este caso el modelo es de menor exactitud, contar con una estimación de la aceleración permite propagar los estados con un error menor (durante un intervalo corto de tiempo), aún en ausencia de mediciones.

Para apreciar mejor el comportamiento de la solución filtrada, en las figuras 9.31, 9.32, 9.33, 9.34 y 9.35 se muestra el error para los modelos Dinámico II y Dinámico IV con otros márgenes de graficación.

En el apéndice D se muestra el resultado del análisis para el caso de utilizar el sistema GLONASS y los sistemas combinados GPS/GLONASS; donde se evidencia un comportamiento similar al observado en el caso del sistema GPS.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.16: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 6$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

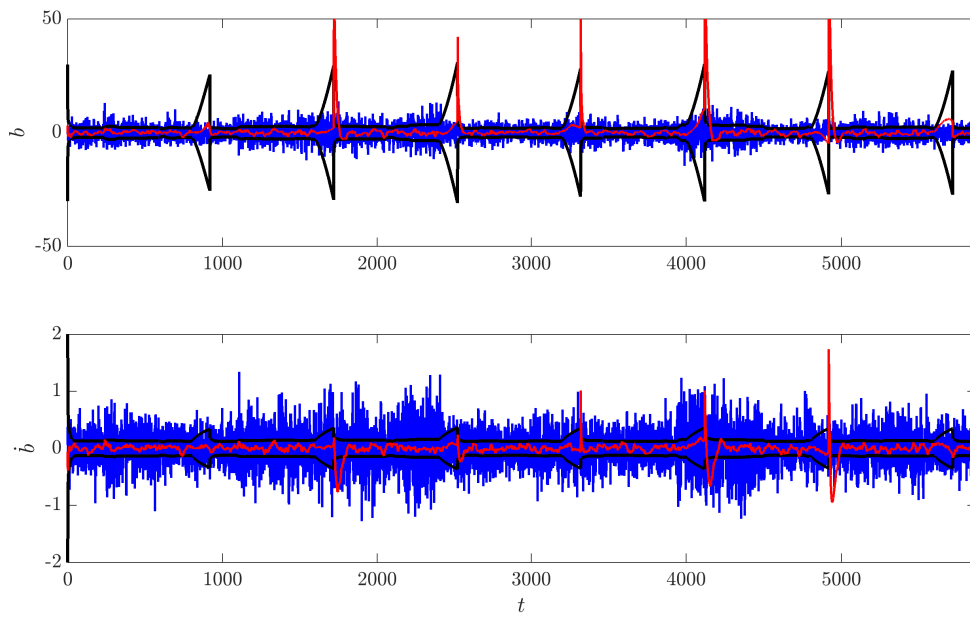
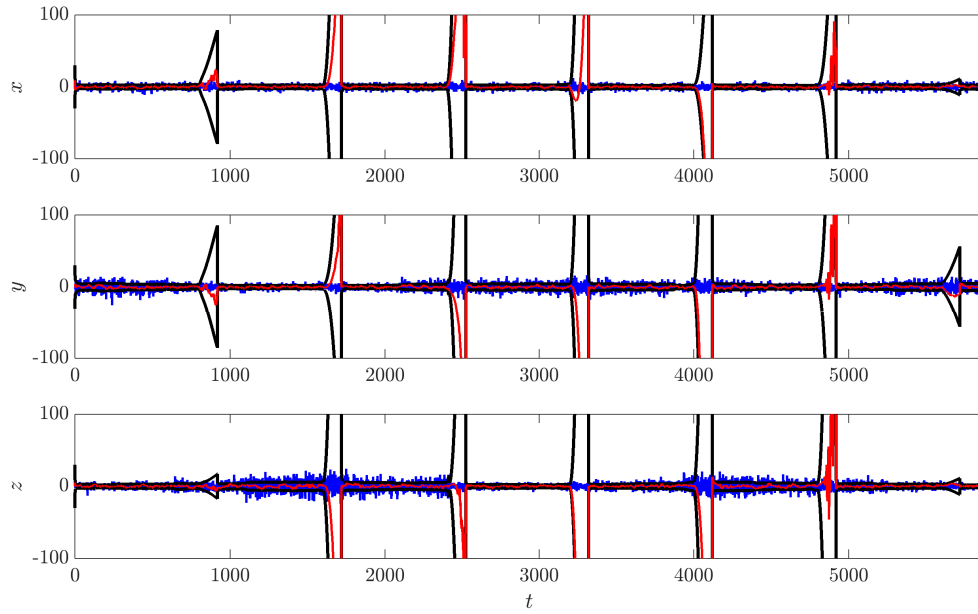
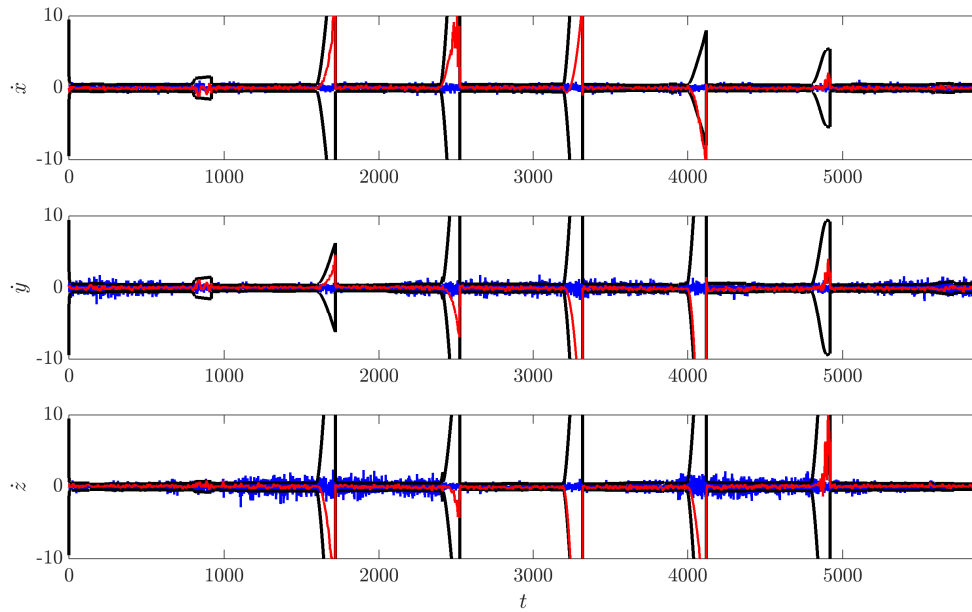


Figura 9.17: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.18: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{x}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

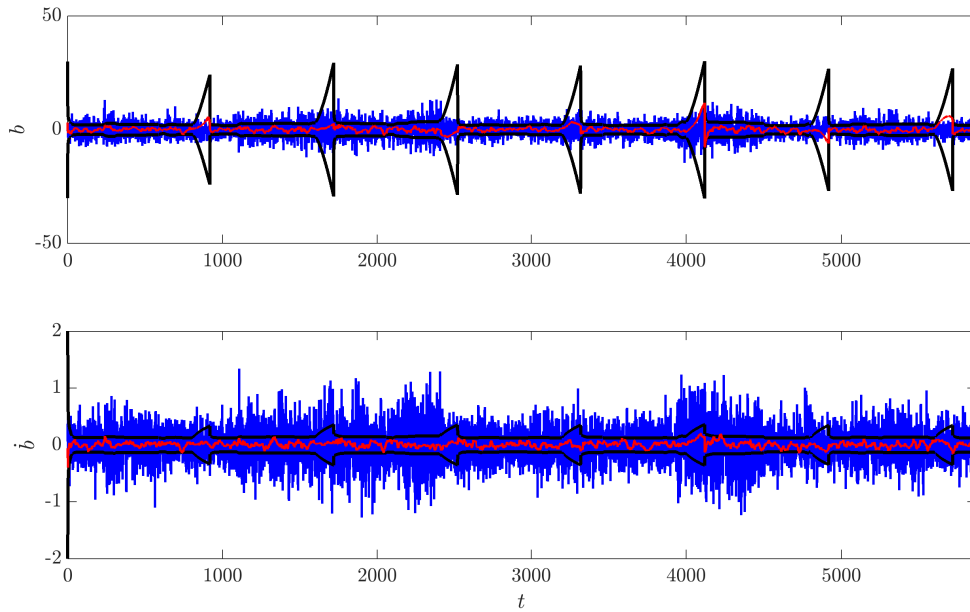


Figura 9.19: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

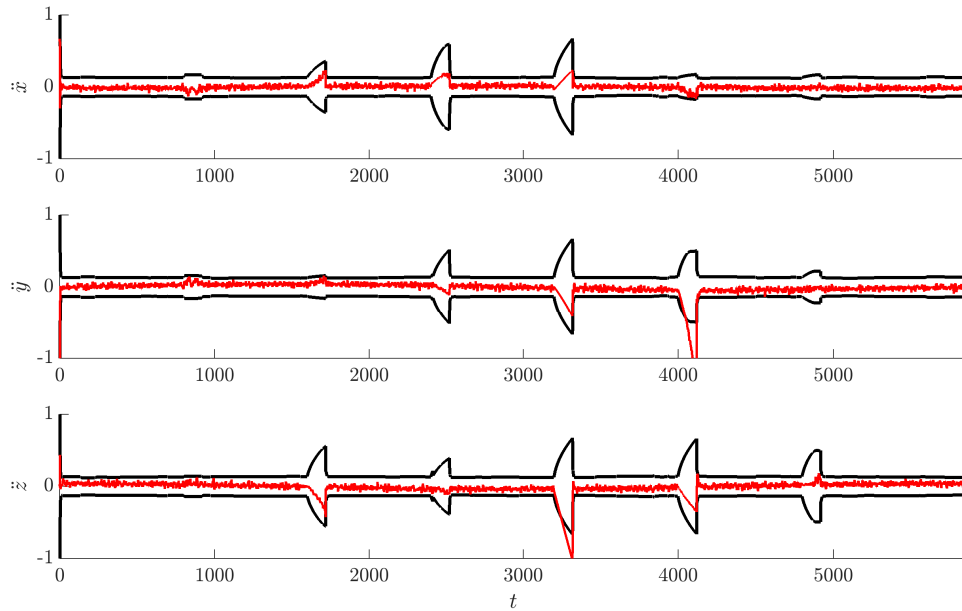
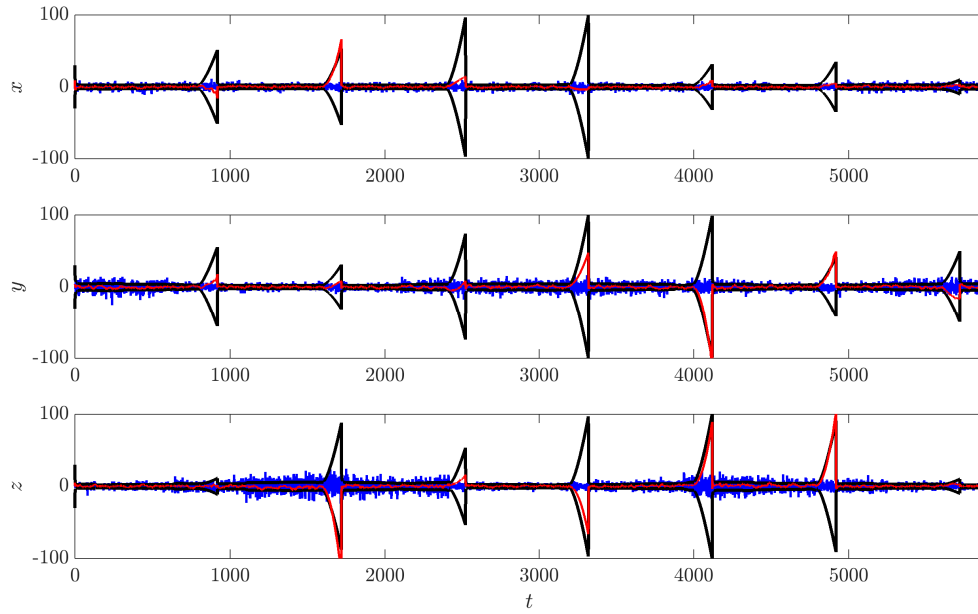
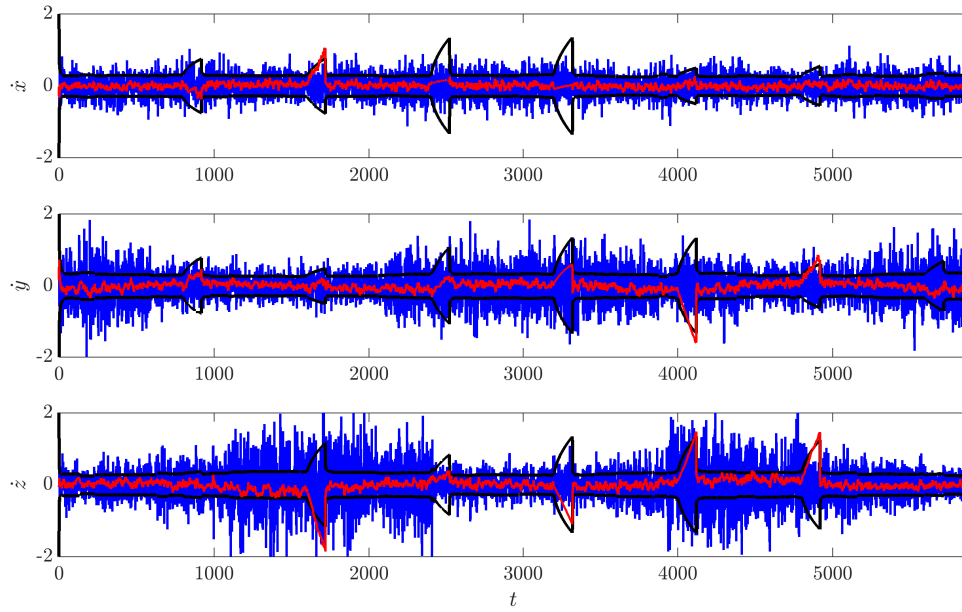


Figura 9.20: Error en las soluciones de aceleración (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.21: Error en las soluciones de posición y velocidad para el modelo Dinámico I con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

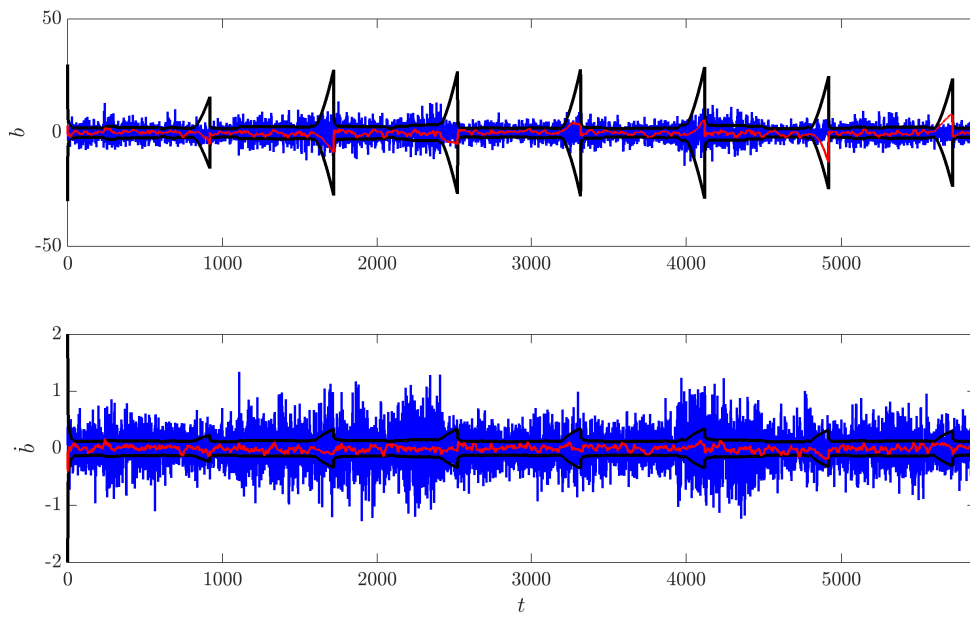
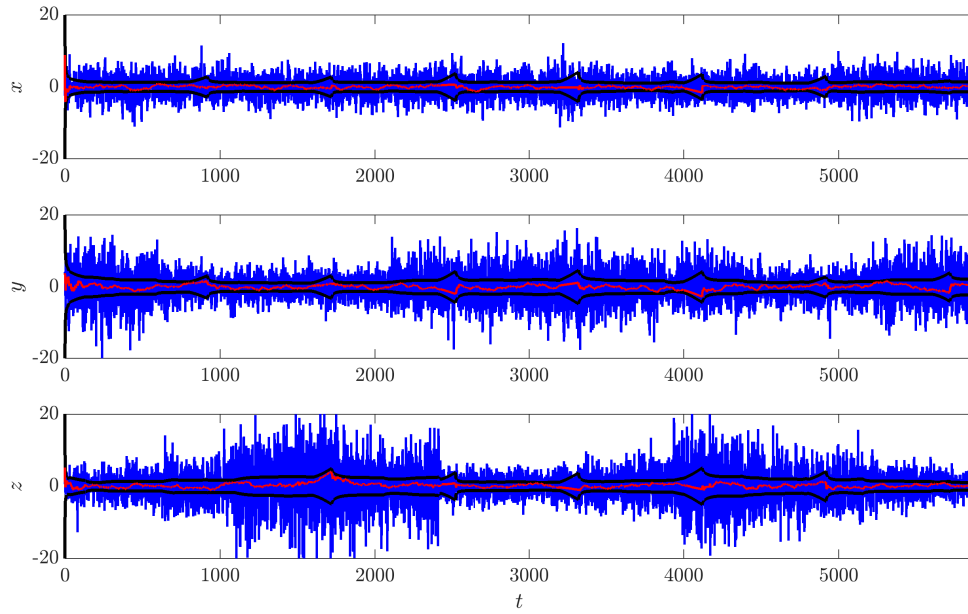
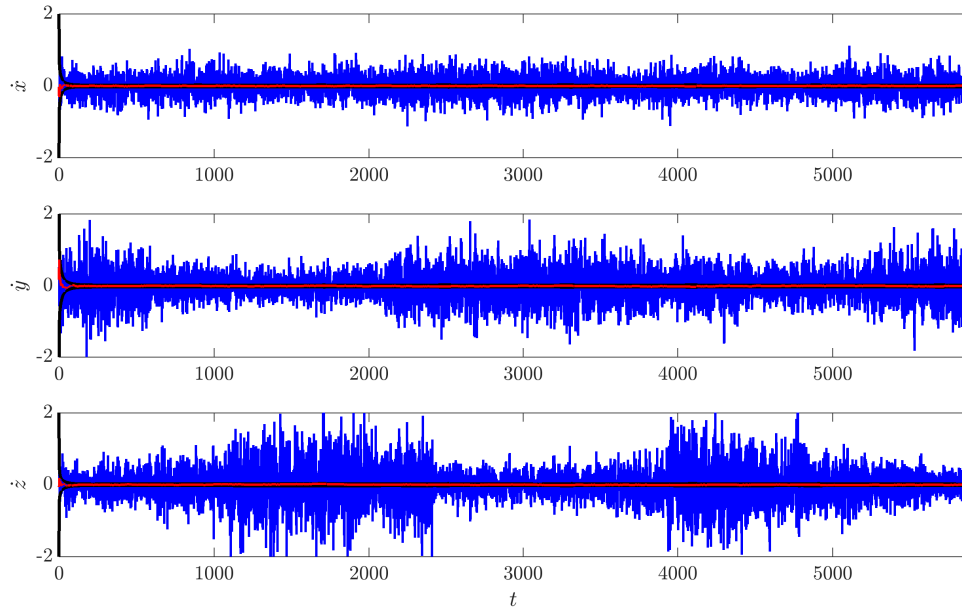


Figura 9.22: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.23: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{g}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

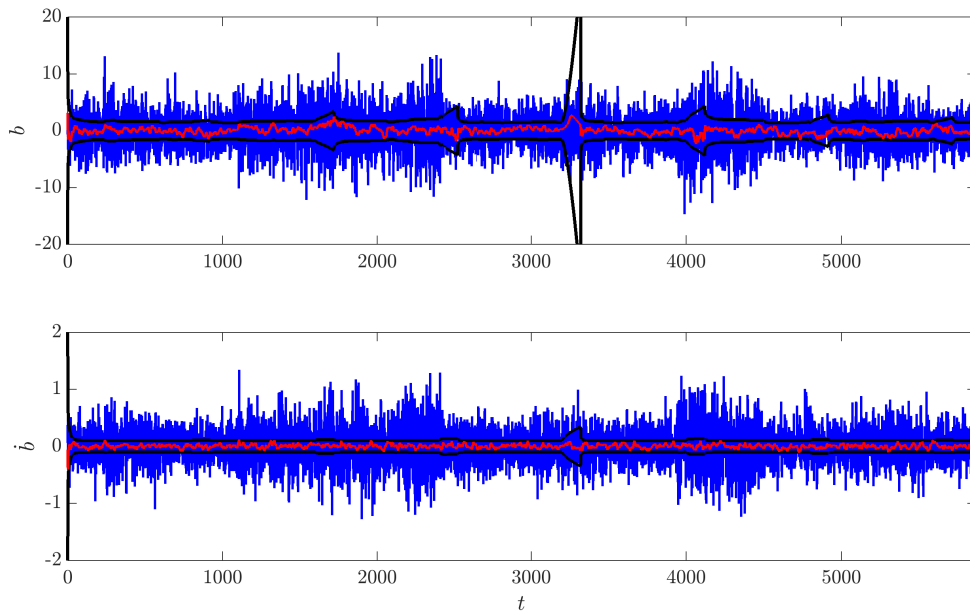
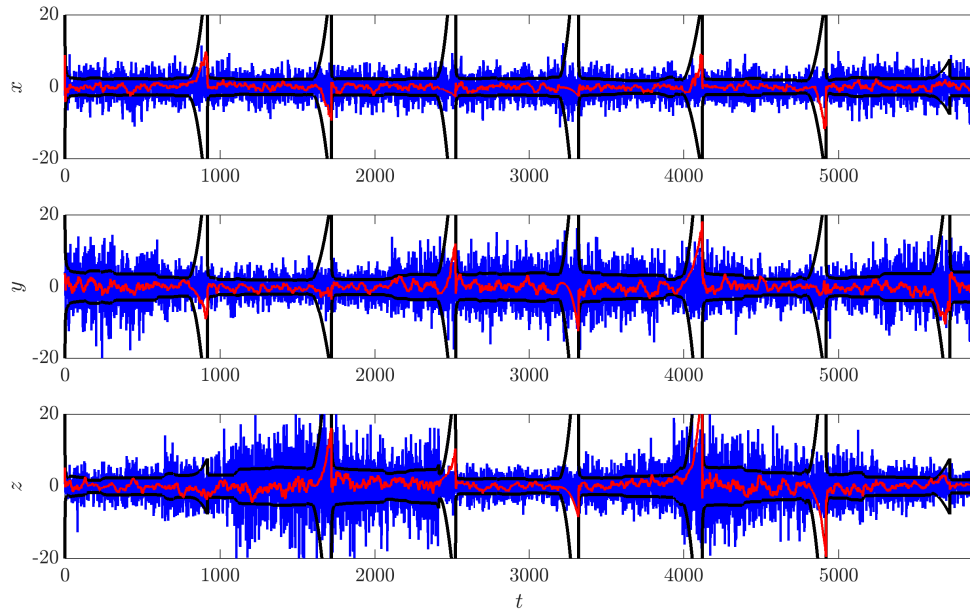
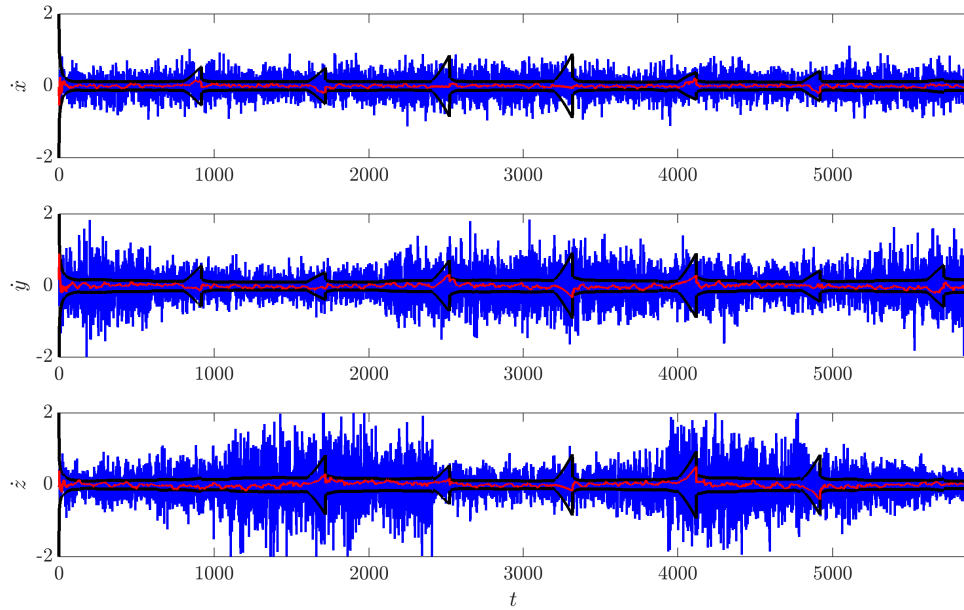


Figura 9.24: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.25: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

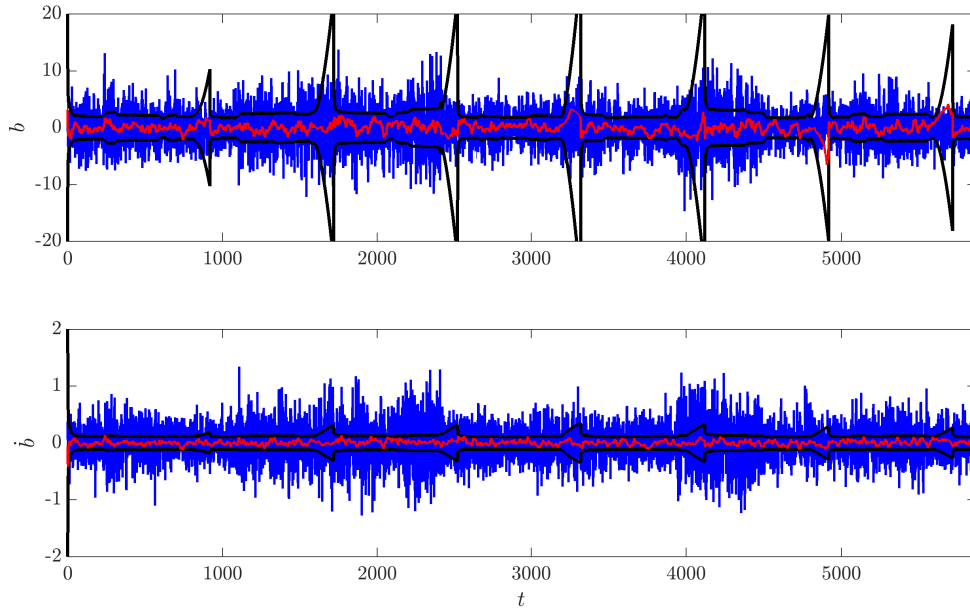


Figura 9.26: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

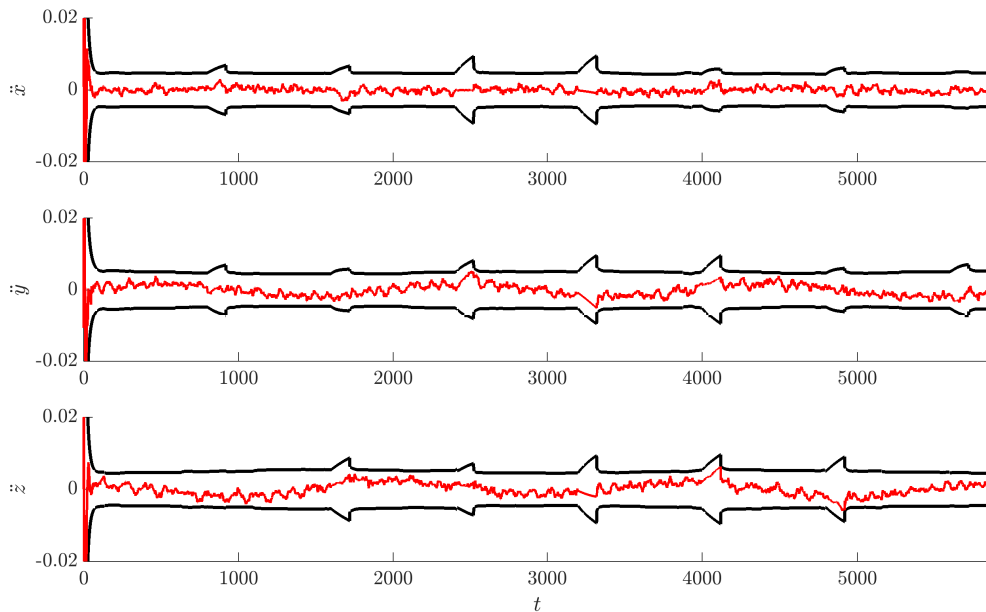
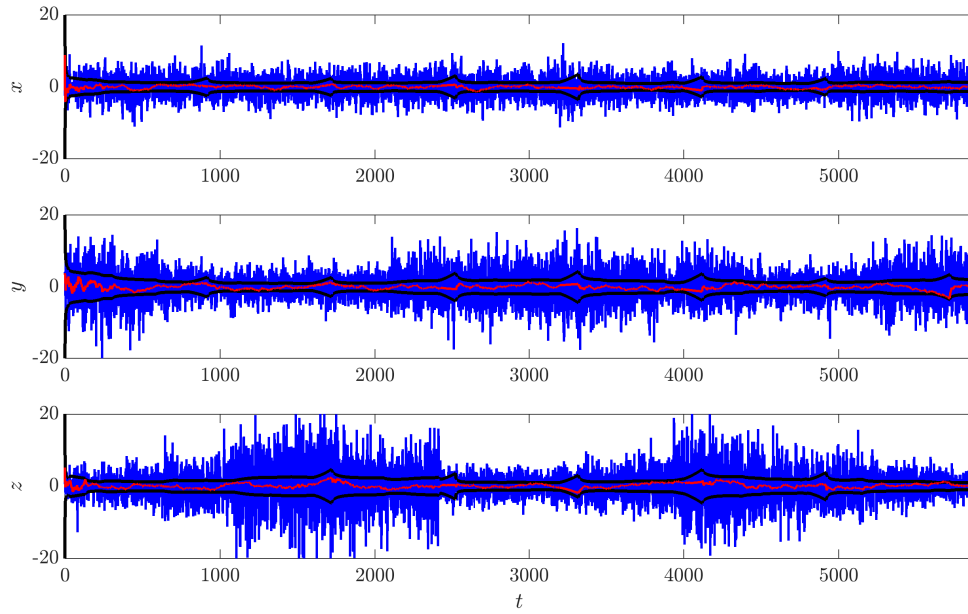
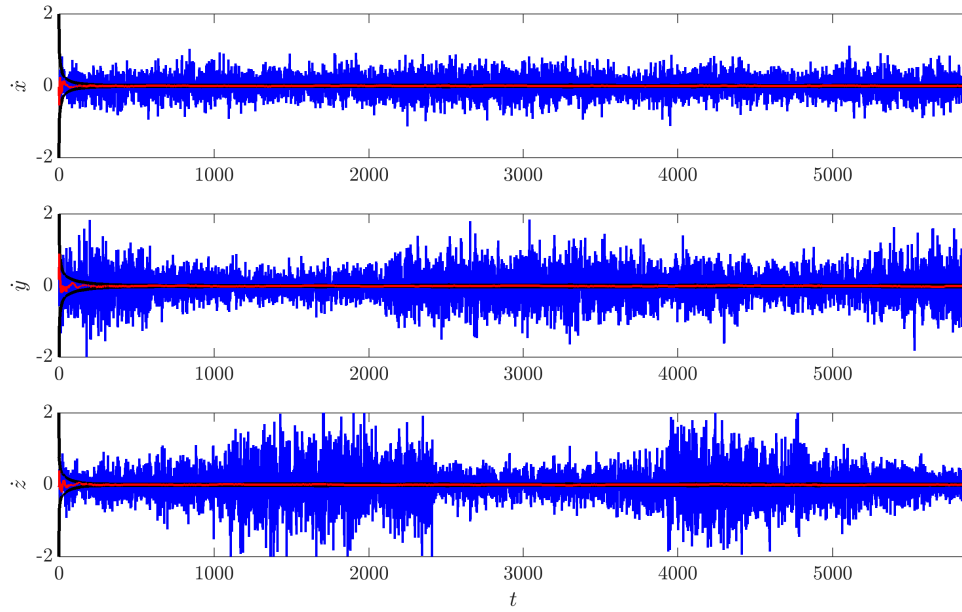


Figura 9.27: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.28: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

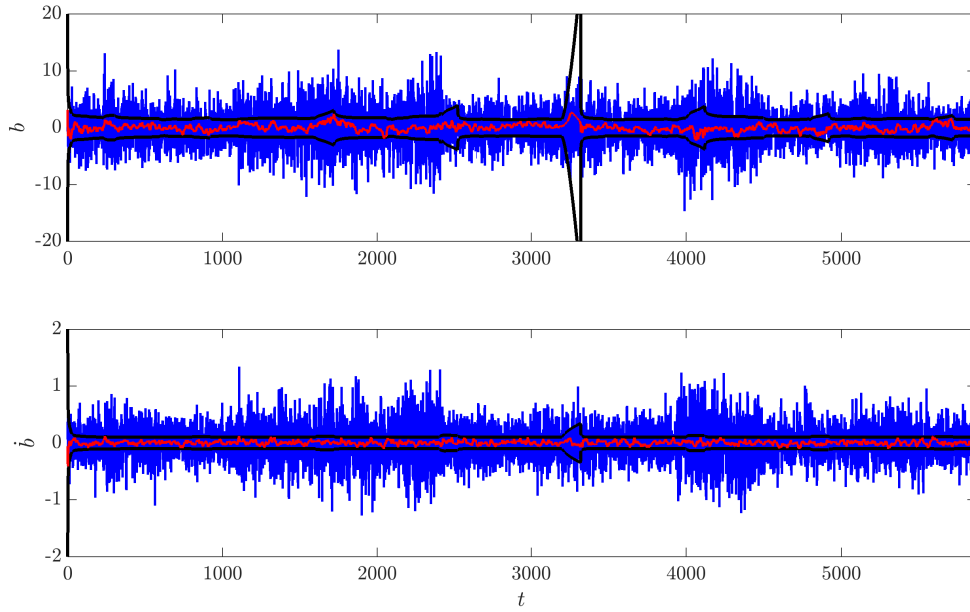


Figura 9.29: Error en las soluciones de sesgo y deriva y aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

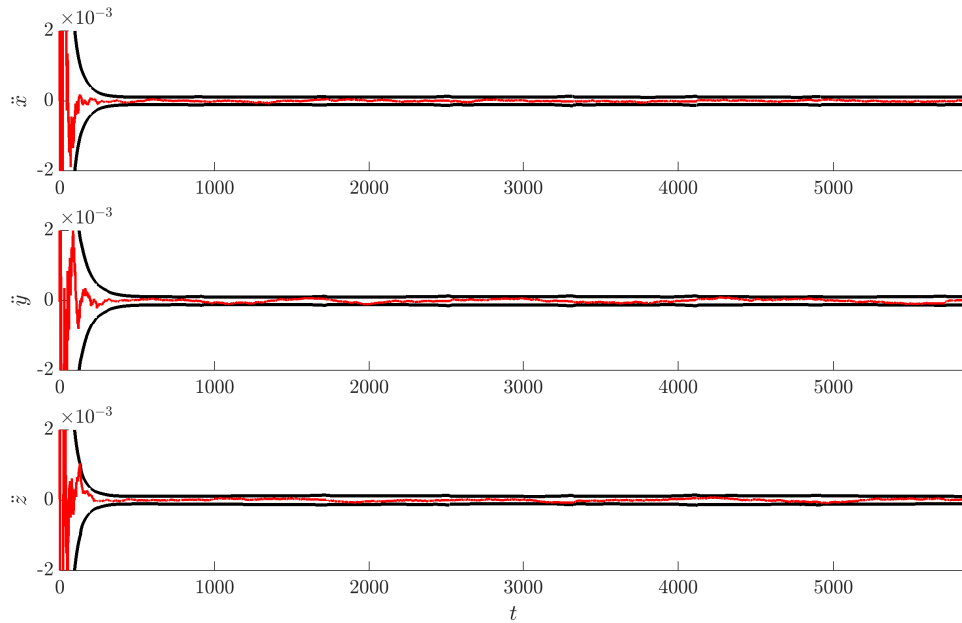
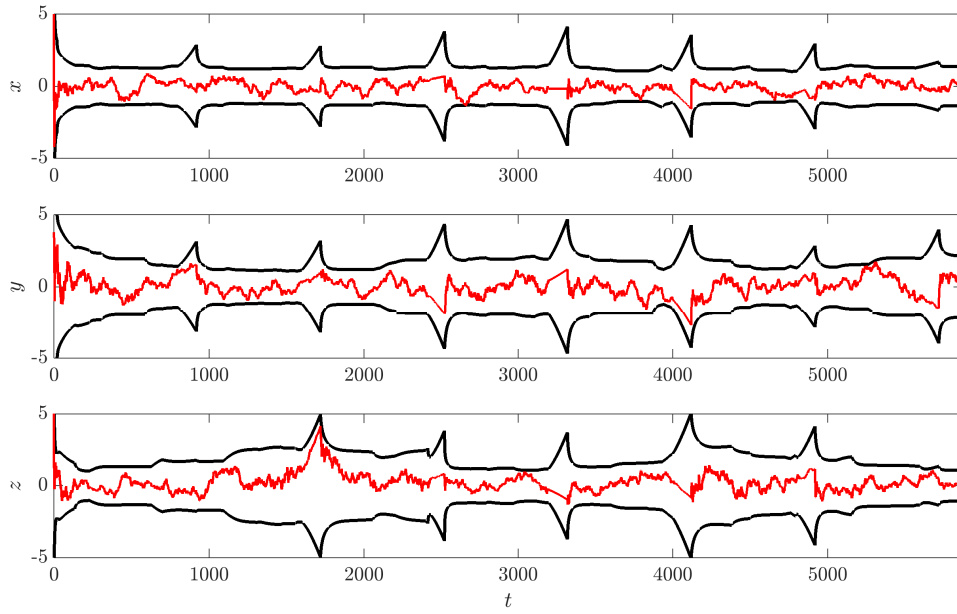
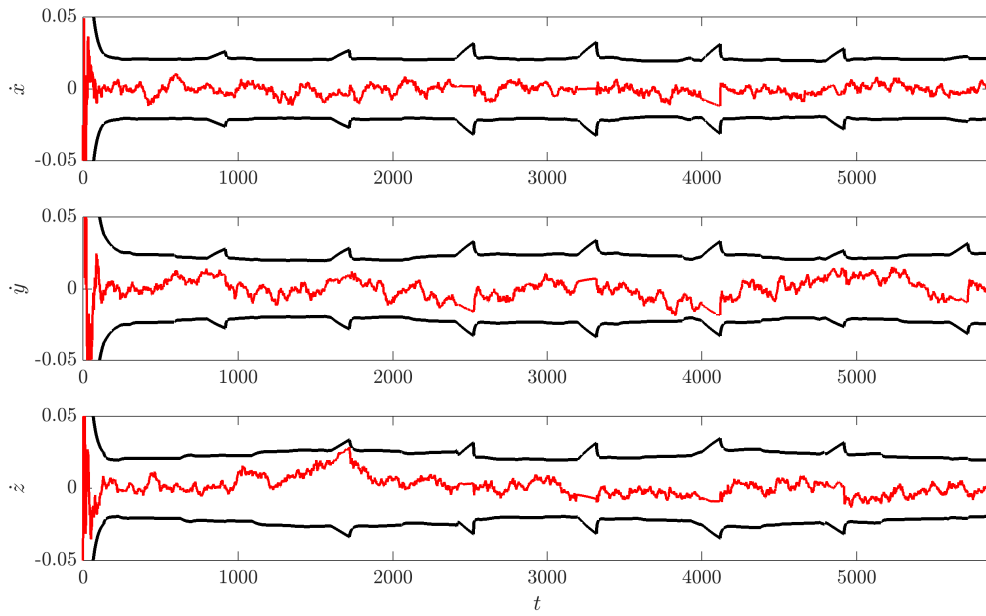


Figura 9.30: Error en las solución de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.31: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GPS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

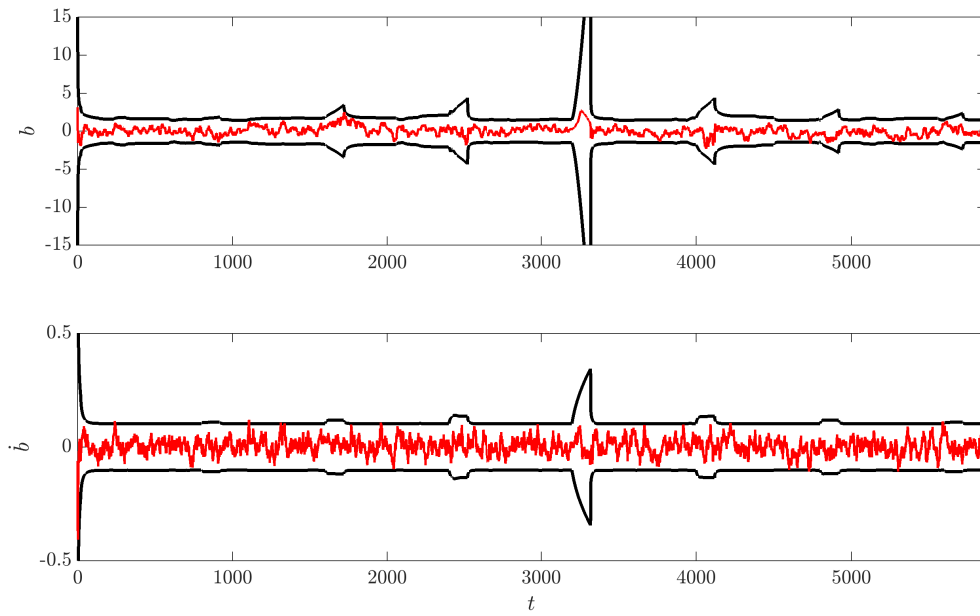
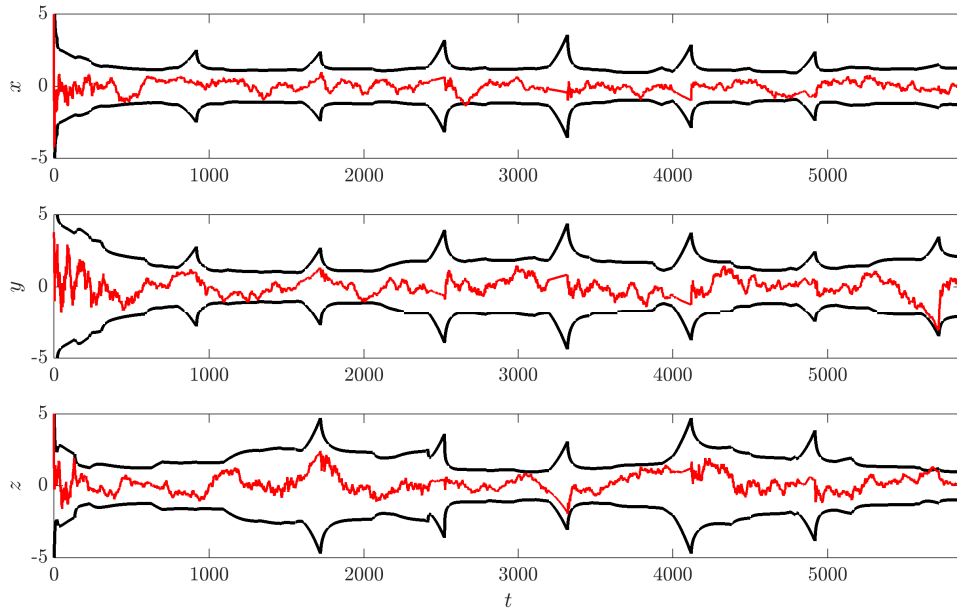
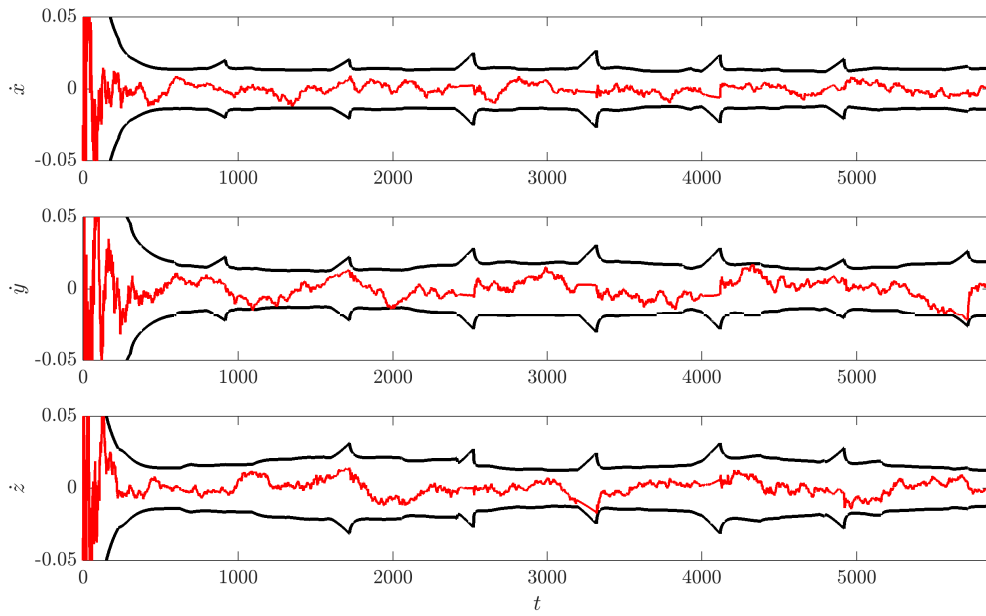


Figura 9.32: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura 9.33: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación).

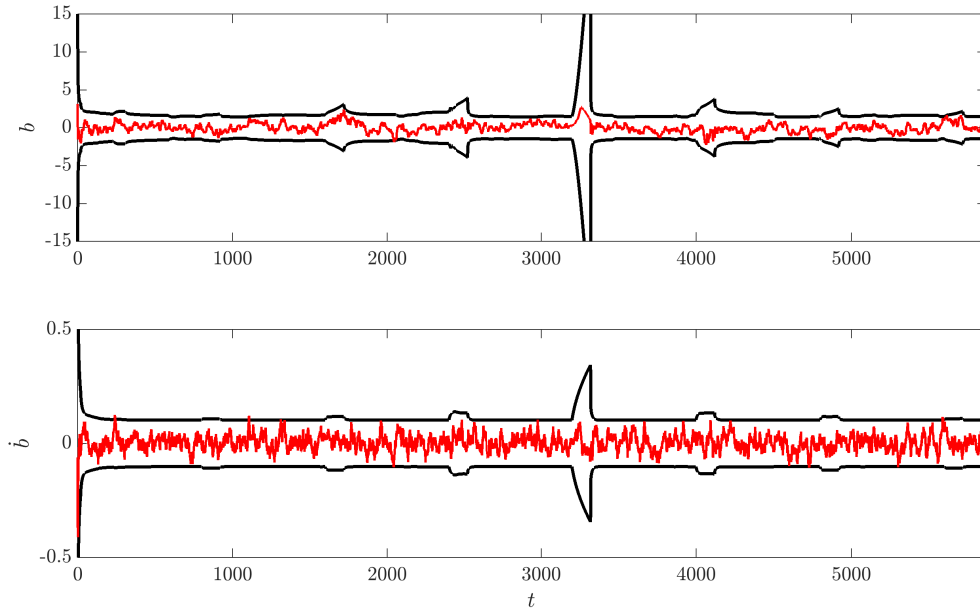


Figura 9.34: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

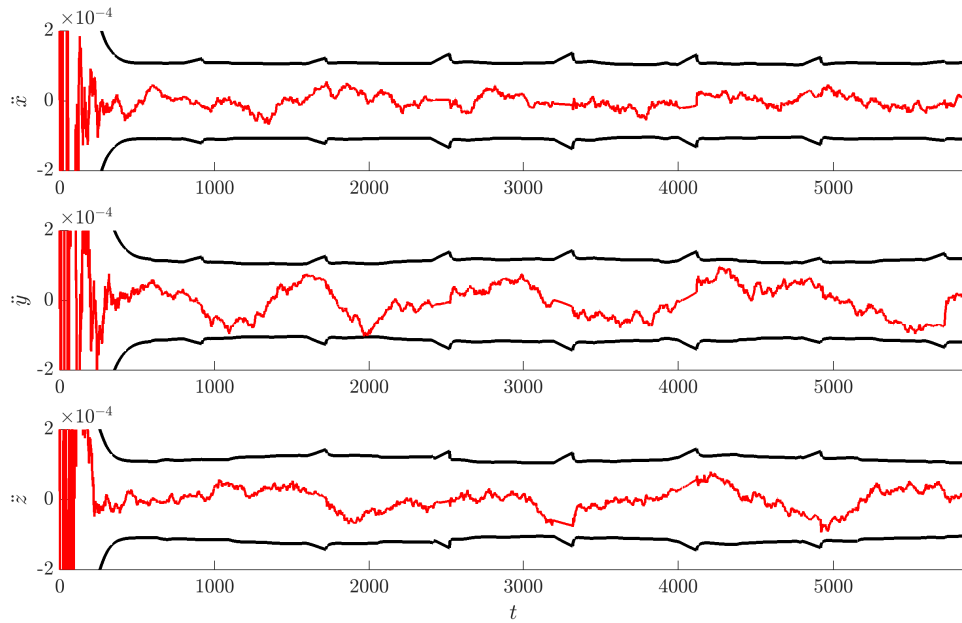


Figura 9.35: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GPS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

9.3. A Modo de Conclusión

En este Capítulo se analizó el comportamiento de los esquemas de filtrado propuestos, en escenarios que se apartan del ideal debido a perturbaciones tanto por fuerzas de *thrust* como debido a pérdida de visibilidad momentánea de satélites, para lo cual se configuraron escenarios de simulación representativos. El análisis expuesto pretende complementar el realizado en el capítulo previo; con la salvedad de que se basa en observaciones puramente cualitativas, y de interpretación teórica del comportamiento, sin establecer métricas de desempeño.

CAPÍTULO 10

CONCLUSIONES

Los Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS) han adquirido una gran relevancia en los últimos años en un sinnúmero de aplicaciones, entre las que se encuentra la navegación de vehículos aeroespaciales; campo que impone una serie de exigencias tanto en el hardware como en los algoritmos de procesamiento de los receptores utilizados. En este marco, en esta tesis nos enfocamos en el estudio y desarrollo de las técnicas y algoritmos de navegación para aplicaciones aeroespaciales, basadas en señales GNSS.

En primer lugar se realizó el estudio detallado de la operación de los sistemas GPS y GLONASS, en particular en lo que respecta a la operación de los receptores o segmento de usuario. Consideramos valioso haber complementado este estudio con la participación en proyectos de desarrollo tecnológico, lo que brindó un conocimiento de las problemáticas concretas que aparecen en la implementación de los receptores. Esperamos que parte de esto se haya logrado plasmar en los dos capítulos referidos a los sistemas GNSS.

En segundo lugar se profundizó en el estudio de los modelos de vehículos aeroespaciales a utilizar, con particular énfasis en los satélites LEO, dado que se trata de los vehículos más empleados en las aplicaciones científicas de observación terrestre, tanto por la periodicidad de revisita que ofrecen, como por el relativo bajo costo de lanzamiento. No obstante, parte de los resultados obtenidos pueden generalizarse a una gran variedad de vehículos aeroespaciales.

Completando lo que consideramos es el cruce o integración de saberes de diferentes especialidades, se estudiaron las técnicas y algoritmos de estimación de estados o navegación, en particular el ampliamente empleado Filtro de Kalman Extendido, EKF, y la variante PKF.

Se analizó también la problemática de obtención de solución puntual de posición y velocidad que integre mediciones de varios sistemas GNSS, con el objetivo de facilitar la utilización conjunta de los mismos, lo que se denomina solución *multi-constelación*. Para ello, se realizó la formulación del problema, el análisis de las ventajas potenciales que ofrece, y se propusieron diferentes alternativas de resolución numérica. Esta solución puntual resultó de utilidad como referencia de comparación y como insumo para los esquemas de filtrado: como estimado inicial para el EKF y como medición para el PKF.

Por otra parte, se presentó tanto el diseño del *hardware* y el *software*, como los resultados de operación en órbita y los resultados de post-procesamiento en base a las mediciones recabadas a bordo; de un receptor de GPS integrado a bordo del satélite argentino SAC-D. Este receptor fue desarrollado por el grupo de trabajo en la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Si bien se trató de un desarrollo realizado en un momento en el que no se contaba con una gran experiencia ni con el instrumental de medición adecuado, y con plazos de trabajo y entrega reducidos; el análisis de estos resultados permitió identificar fallas que no habían podido ser detectadas en las etapas de diseño y ensayo previas a la puesta en órbita, permitiendo la corrección de los errores de implementación con vistas a futuros desarrollos.

En base al estudio de los vehículos aeroespaciales se propusieron diferentes modelos a utilizar en esquemas de filtrado, más complejos que los implementados en este primer diseño, y que permitieran la incorporación de mediciones de más de un sistema GNSS. Los modelos más sencillos se basaron en un enfoque cinemático y pueden ser empleados en una gran variedad de vehículos. Los demás se basaron en un enfoque dinámico que considera las fuerzas más significativas que actúan sobre un satélite LEO. En todos los casos se priorizó la obtención de modelos relativamente sencillos, factibles de ser implementados en sistemas que operan en tiempo real, es decir, sin una elevada carga computacional asociada.

En base a modelos más detallados de los vehículos, y al conocimiento de los sistemas GNSS se diseñaron diferentes escenarios de simulación representativos que permitieron analizar el comportamiento de las estrategias de filtrado. En base a estos escenarios, y mediante la elección de métricas adecuadas, se analizó el desempeño de seis modelos diferentes propuestos para el filtrado utilizando la estrategia EKF con diferentes valores de “sintonía”; tanto en el caso de emplear mediciones de una única constelación (GPS ó GLONASS) como en el caso multiconstelación (GPS y GLONASS).

Con este análisis se obtuvieron por un lado los valores de sintonía óptimos para cada modelo. Se realizó además la comparación entre modelos, tanto en lo que respecta al valor óptimo como para diferentes valores de sintonía, interpretando teóricamente los resultados observados. Si bien un análisis estricto de carga computacional depende de la arquitectura particular utilizada, y excede el alcance de nuestro trabajo, podemos concluir que en general, el mejor desempeño se logra con la implementación más costosa en términos de carga computacional. Sin embargo, esta complejidad adicional no resulta prohibitiva para una implementación en tiempo real.

Se compararon además dos esquemas de filtrado propuestos, el EKF y el PKF, concluyendo mediante el análisis de distintas métricas que sus desempeños resultan equivalentes. Esta comparación estuvo motivada en la aparente ventaja del PKF que exponen los autores que propusieron el algoritmo. La única ventaja que podemos rescatar de la implementación del PKF es que permite contar con la solución puntual de posición y velocidad. En caso que la aplicación requiera esta información además de la solución filtrada, el PKF podría presentar ventajas en términos de carga computacional respecto al EKF. No obstante, esta conjetura debe ser verificada en la implementación concreta, lo cual resulta dependiente de la arquitectura utilizada.

A los efectos de complementar este análisis basado puramente en simulaciones, se realizó el procesamiento de las mediciones provistas por el receptor de GPS utilizado para la navegación del satélite argentino SAC-D, permitiendo corroborar la utilidad de los algoritmos propuestos para este tipo de aplicación.

Finalmente, se realizó un análisis puramente “cualitativo” del comportamiento de los esquemas de filtrado propuestos en situaciones que se aparten de la ideal, como son las fuerzas de *thrust* y la pérdida de satélites, permitiendo identificar algunas debilidades y fortalezas de los diferentes algoritmos propuestos.

Como conclusión final consideramos que el aprendizaje obtenido a partir del procesamiento de la información de la operación en órbita de *nuestro RGPS*, en conjunto con la profundización del estudio necesario para llevar a cabo este trabajo de tesis, y los algoritmos de filtrado propuestos, constituyen una base sólida sobre la que realizar futuros desarrollos para misiones orbitales.

Como mencionamos al comienzo de este apartado, la navegación de vehículos aeroespaciales impone una serie de exigencias tanto en el hardware como en los algoritmos de procesamiento de los receptores utilizados, lo que particulariza el desarrollo de los mismos. Este hecho, sumado a las características propias del mercado aeroespacial, genera que existan relativamente pocos proveedores de receptores para estas aplicaciones, y que se trate de instrumentos de un elevado costo y cuya adquisición muchas veces requiere acordar una serie de “certificados de usuario final”, o cuya compra está directamente vedada.

Tanto las particularidades y desafíos que presenta como consideraciones vinculadas a la independencia tecnológica y la soberanía determinan que resulte de gran interés, vinculado al desarrollo de vehículos aeroespaciales, dominar el *know-how* de los receptores GNSS.

10.1. Continuará...

La realización de este trabajo ha generado una serie de nuevas preguntas que pueden dar lugar a una serie de *líneas futuras*:

- Incorporar e integrar a la solución de navegación otros sistemas GNSS.
- Incorporar mediciones de fase de las señales GNSS
- Integrar otros sensores a la solución de navegación, problema conocido como fusión de datos.
- Proponer modelos que permitan tanto la simulación como el diseño de esquemas de filtrado para otros vehículos aeroespaciales.
- Explorar otros métodos de filtrado como UKF, Filtro de Partículas, etc. En particular, es de interés extender a esquemas robustos ante las incertidumbres de los modelos.
- Diversificar el escenario de perturbaciones. Analizar el desempeño en estos escenarios.
- Integrar estrategias de rechazo de mediciones anómalas.
- Codificar los algoritmos propuestos para una implementación eficiente en tiempo real.

APÉNDICE A

MECÁNICA ORBITAL

En este apéndice se describen las principales formulaciones de la mecánica orbital que son de utilidad tanto para el modelado de los vehículos objeto de la tesis como para la descripción de las órbitas de los satélites empleados por los sistemas GNSS que utilizamos. Esta descripción se basa principalmente en las referencias [Curtis \(2009\)](#), [Montenbruck y Gill \(2012\)](#) y [Vallado \(1997\)](#), unificando la notación con la utilizada en el resto de la tesis.

A.1. Problema de dos Cuerpos

Si se parte de considerar dos cuerpos¹ de masa m_1 y m_2 , ubicados en posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respectivamente, en relación a un marco de referencia inercial, como se muestra en la figura [A.1](#); y se define el vector de posición relativa

$$\mathbf{r} \triangleq \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (\text{A.1})$$

De acuerdo a la ley de Newton de gravitación universal, la fuerza que actúa sobre la masa m_1 , debido a la atracción gravitatoria de m_2 está dada por

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{A.2})$$

y la fuerza que actúa sobre la masa m_2 , debido a la atracción gravitatoria de m_1 está dada por

$$\mathbf{f}_{21} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{A.3})$$

¹En principio masas puntuales, o cuerpos esféricos con distribución de masa uniforme.

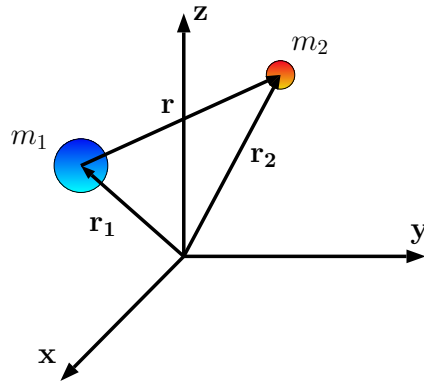


Figura A.1: Diagrama de dos masas puntuales en un marco de referencia inercial.

donde G es la constante de gravitación universal² y $r = \|\mathbf{r}\|$ es la norma euclídea del vector \mathbf{r} . Ambas fuerzas actúan en la dirección de la línea que une las masas m_1 y m_2 , con sentido contrario.

Si se considera que esta es la única fuerza que actúa sobre cada uno de los cuerpos, y se asume que la masa permanece constante, en base a la segunda ley de Newton se llega a

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{f}_{12}}{m_1} = \frac{G m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{A.4})$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{f}_{21}}{m_2} = -\frac{G m_1}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G (m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{A.6})$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}_1$ y $\ddot{\mathbf{r}}_2$ representan las aceleraciones de las masas m_1 y m_2 , referidas al marco de referencia inercial. Definiendo el parámetro gravitatorio

$$\mu \triangleq G (m_1 + m_2) \quad (\text{A.7})$$

se obtiene

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}} \quad (\text{A.8})$$

conocida como *ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos* (Curtis, 2009). La misma es una ecuación diferencial no-lineal de segundo orden, en el vector \mathbf{r} , para cuya resolución se requieren 6 constantes de integración, o condiciones iniciales.

En el planteo original, el marco de referencia inercial adoptado es arbitrario. Resulta sin embargo más conveniente medir las coordenadas de \mathbf{r} en un marco de referencia que esté unido y se mueva junto con la masa m_1 (como es el caso del marco ECI presentado en el capítulo 3), tal como el que se presenta en la figura A.2. Si denotamos con \mathbf{r}^* al vector de posición relativa, y con $\dot{\mathbf{r}}^*$ y $\ddot{\mathbf{r}}^*$ sus derivadas primera y segunda, todos ellos medidos en este nuevo marco de referencia, resulta

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}^* + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}^* \quad (\text{A.9})$$

²Siendo una de las constantes físicas conocidas con menor exactitud, su valor aproximado es $6,67384 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

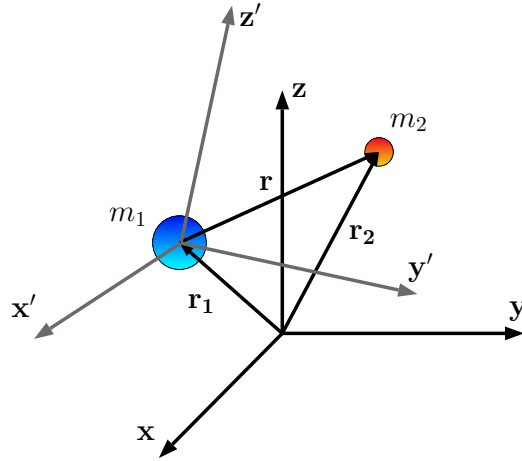


Figura A.2: Marco de referencia solidario al cuerpo m_1 .

donde $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}}$ representan la velocidad y aceleración angulares del marco de referencia moviente con respecto al marco de referencia inercial. En caso que $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}^*$. Es decir, la ecuación (A.8) puede plantearse en términos de vectores medidos en este nuevo marco de referencia, siempre y cuando el mismo no presente rotaciones con respecto al marco de referencia inercial. En lo que sigue, analizaremos las ecuaciones del movimiento orbital en este nuevo marco de referencia inercial, que resulta más conveniente para describir el movimiento de un satélite en torno a La Tierra; sin usar una notación especial para el mismo³.

Además, cuando la masa $m_1 = m_e$ corresponde a La Tierra, y la masa $m_2 = m_s$ a un satélite, $G(m_e + m_s) \simeq G m_e$ resulta una buena aproximación, y el parámetro gravitatorio μ se puede redefinir como

$$\mu \triangleq G m_e \quad (\text{A.10})$$

A.2. Momento Angular

El momento angular por unidad de masa, o *momento angular específico* del cuerpo m_s relativo a m_e se define como

$$\mathbf{h} \triangleq \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.11})$$

Cuya derivada con respecto al tiempo resulta (Montenbruck y Gill, 2012)

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (\text{A.12})$$

$$\therefore \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \quad (\text{A.13})$$

donde se ha utilizado el hecho de que el producto vectorial de un vector consigo mismo es igual a cero.

³Utilizaremos la misma notación con la que veníamos trabajando, pero ahora para hacer referencia a magnitudes en este nuevo marco.

Que $\dot{\mathbf{h}} = 0$ indica la *conservación del momento angular*, que resulta evidente en base a que la única fuerza interviniente actúa en la línea que une los dos cuerpos. En el caso particular que \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ sean paralelos, el momento angular será nulo, y en vista de lo anterior, permanecerá nulo en toda la trayectoria; que por ende será una trayectoria rectilínea. En cualquier otro caso, tomando un punto cualesquiera de la trayectoria, los vectores \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ pertenecerán a un mismo plano; y su producto vectorial será perpendicular a dicho plano. Luego, dado que \mathbf{h} es constante, los vectores \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ permanecerán en el plano mencionado para cualquier punto de la trayectoria que se considere. En consecuencia, la trayectoria de m_s en torno a m_e está contenida en un único plano. Finalmente, dado que \mathbf{r} parte del origen del sistema ECI, el plano resultante contendrá dicho origen.

Por otra parte, el diferencial de área, dA , barrido por el vector \mathbf{r} en un intervalo dt es igual al área encerrada por el triángulo que tiene como lados los vectores \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}} dt$, lo cual en base a la ecuación (A.11) puede escribirse como

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dt| = \frac{h}{2} dt \quad (\text{A.14})$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad (\text{A.15})$$

Este resultado es conocido como la **Segunda Ley de Kepler**: *el segmento de línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales durante intervalos de tiempo iguales*. Es decir, la tasa de cambio del área en función del tiempo es constante.

A.3. Ecuación de Órbita

Realizando el producto cruz de ambos miembros de la ecuación (A.8) con el vector de momento angular \mathbf{h} se tiene

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} \quad (\text{A.16})$$

A partir de lo siguiente, recordando que el momento angular es constante

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, en base a que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\dot{\mathbf{r}} r - \mathbf{r} \dot{r}}{r^2} = -\frac{\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2}{r^3} = -\frac{\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \quad (\text{A.18})$$

donde se ha utilizado el hecho de que⁴ $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$, y la relación del triple producto vectorial⁵. Dado que $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}$, se llega a

$$-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (\text{A.19})$$

⁴ $\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} r^2 = 2 r \dot{r}$

⁵ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

y reemplazando (A.17) y (A.19) en (A.16) se llega a

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{d}{dt}\left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}\right) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\therefore \boxed{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \mu \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{c}} \quad (\text{A.22})$$

donde \mathbf{c} es un vector constante⁶. La ecuación (A.22) es la primera integral de la ecuación fundamental del movimiento relativo, (A.8), ya que relaciona $\dot{\mathbf{r}}$ con \mathbf{r} . Puede verse que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{h} = 0$ ⁷, lo cual implica que el vector \mathbf{c} es perpendicular a \mathbf{h} y por ende pertenece al plano orbital.

La ecuación (A.22) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} \quad (\text{A.23})$$

donde $\mathbf{e} = \mathbf{c}/\mu$, se conoce como *vector de excentricidad*. La línea definida por este vector se denomina comúnmente *línea de ápsides*. Si se toma el producto escalar de la ecuación (A.23) con el vector \mathbf{r} , se tiene que

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})}{\mu} \quad (\text{A.24})$$

$$r + r e \cos \nu = \frac{h^2}{\mu} \quad (\text{A.25})$$

donde se ha usado el hecho de que

$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2 \quad (\text{A.26})$$

La ecuación (A.25) puede reescribirse

$$\boxed{r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \nu}} \quad (\text{A.27})$$

Esta ecuación describe la curva que realiza el cuerpo m_s en torno a m_e , y se conoce como *ecuación de órbita*. Los parámetros e y ν se denominan *excentricidad* y *anomalía verdadera*, respectivamente.

Este resultado puede verse como una formulación matemática de la **Primera ley de Kepler**: *la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos*; ya que las curvas descriptas por esta ecuación son secciones cónicas, entre las cuales se incluyen las elipses.

⁶Llamado generalmente *vector de Laplace*.

⁷Tomando el producto escalar de (A.22) con \mathbf{h} , y utilizando el hecho de que tanto $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}$ como \mathbf{r} son perpendiculares a \mathbf{h} .

A.4. Órbitas elípticas

Para el caso en que $0 < e < 1$, la ecuación (A.27) corresponde a una elipse. En este caso, el denominador de dicha ecuación, $1 + e \cos \nu$ permanece siempre positivo y distinto de cero, con lo cual r permanecerá limitado en toda la trayectoria, siendo mínimo en caso $\nu = 0$ y máximo en caso $\nu = \pi$

$$r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e} \quad (\text{A.28})$$

$$r_a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e} \quad (\text{A.29})$$

Los puntos de la trayectoria en los cuales r toma los valores r_p y r_a se denominan *periápside* y *apoápside*, respectivamente⁸, y la línea que los contiene se denomina línea de ápsides, y se corresponde con el eje mayor de la elipse. De aquí

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2} \quad (\text{A.30})$$

donde a es el semi-eje mayor de la elipse. En base a (A.30), la ecuación (A.27) puede reescribirse

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{A.31})$$

La gráfica de esta elipse se presenta en la figura A.3, en la cual el foco F coincide con la ubicación del cuerpo m_e . Los puntos A y P corresponden al apoápside y al periápside, respectivamente. A partir de las relaciones de la elipse puede verse que

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad (\text{A.32})$$

En el tiempo que toma recorrer una órbita completa, o período orbital T , el área barrida es igual al área de la elipse, πab . En base a la segunda ley de Kepler, ecuación (A.15), sabemos que estas dos magnitudes están relacionadas. Por tanto

$$\pi ab = \frac{h}{2} T \quad (\text{A.33})$$

$$T = \frac{2\pi ab}{h} \quad (\text{A.34})$$

Sustituyendo por las expresiones de a , b y la ecuación (A.30), se tiene

$$T = \frac{2\pi}{h} a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1 - e^2}} \right)^3 \quad (\text{A.35})$$

Reemplazando nuevamente por (A.30)

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.36})$$

⁸Cuando se hace referencia a una órbita alrededor de un cuerpo en particular se emplean términos que aluden a dicho cuerpo; por ejemplo: *perihelio* y *afelio* en el caso del Sol, *perigeo* y *apogeo* en el caso de la Tierra.

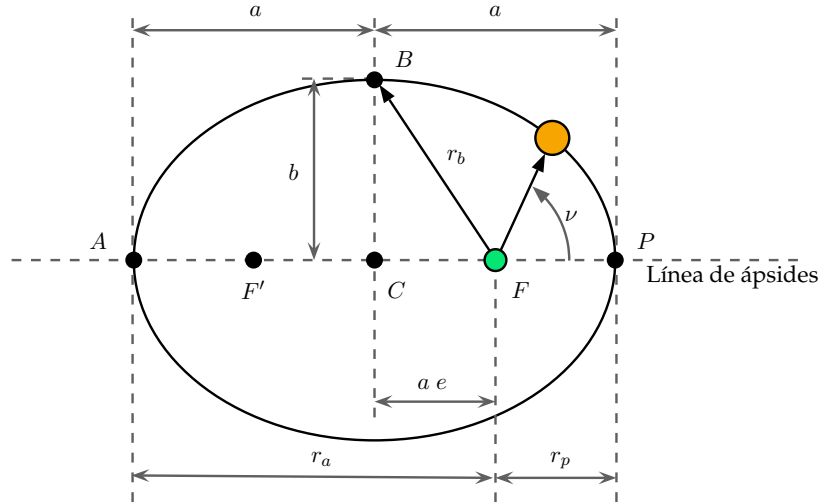


Figura A.3: Órbita elíptica.

Lo cual indica que el período de una órbita elíptica es independiente de la excentricidad, y depende únicamente de la longitud del semi-eje mayor. Este resultado es la formulación matemática de la **Tercera Ley de Kepler**: *para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita.*

A.5. Velocidad

El vector velocidad relativa $\dot{\mathbf{r}}$ puede descomponerse en dos componentes: $\mathbf{v}_r = v_r \mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}_\perp = v_\perp \mathbf{u}_\perp$, donde \mathbf{u}_r es el vector normal que apunta en la dirección de \mathbf{r} , mientras que \mathbf{u}_\perp es el vector unitario que apunta en la dirección normal a \mathbf{r} sobre el plano de la trayectoria, en la dirección del movimiento de m_s , denominada dirección azimutal. Reemplazando esta definición en (A.11)

$$\dot{\mathbf{r}} = v_r \mathbf{u}_r + v_\perp \mathbf{u}_\perp \quad (\text{A.37})$$

En base a la definición de \mathbf{h} , (A.11)

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r \mathbf{u}_r \times (v_r \mathbf{u}_r + v_\perp \mathbf{u}_\perp) = r v_\perp \frac{\mathbf{h}}{h} \quad (\text{A.38})$$

y por tanto

$$v_\perp = \frac{r}{h} \quad (\text{A.39})$$

Por otra parte, puede verse que las componentes radial y azimutal de la velocidad, v_r y v_\perp están dadas por

$$v_r = \dot{r} \quad (\text{A.40})$$

$$v_\perp = r \dot{\nu} \quad (\text{A.41})$$

A partir de (A.39) y (A.27), se puede llegar a

$$v_{\perp} = \frac{h}{r} = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \nu) \quad (\text{A.42})$$

$$\therefore \boxed{v_{\perp} = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \nu)} \quad (\text{A.43})$$

Por otra parte, derivando la ecuación (A.27) se llega a

$$v_r = \dot{r} = \frac{h^2}{\mu} \frac{e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \dot{\nu} \quad (\text{A.44})$$

y en base a (A.41), se llega a que

$$\dot{r} = \frac{h^2}{\mu} \frac{e \sin \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} \frac{h}{r^2} \quad (\text{A.45})$$

Reemplazando nuevamente por (A.27), se llega a

$$\boxed{v_r = \frac{\mu}{h} e \sin \nu} \quad (\text{A.46})$$

A.6. Dependencia con el tiempo

En las ecuaciones analizadas hasta el momento se describe la trayectoria del movimiento orbital, (A.27), sin que aparezca una relación explícita con el tiempo; es decir, una relación que permita obtener los estados de posición y velocidad del satélite (en principio, con respecto a la trayectoria o plano orbital) en función del tiempo.

En base a (A.39) y (A.41), puede verse que

$$\dot{\nu} = \frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (\text{A.47})$$

reemplazando por la ecuación (A.27), se llega a

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\mu^2}{h^3} (1 + e \cos \nu)^2 \quad (\text{A.48})$$

la cual es una ecuación diferencial de variables separables. Llamando t_0 al tiempo en el que el vehículo se encuentra en el punto de anomalía verdadera $\nu = \nu_0$, puede plantearse

$$\frac{\mu^2}{h^3} (t - t_0) = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\xi}{(1 + e \cos \xi)^2} = \quad (\text{A.49})$$

$$= \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \left(\frac{\xi}{2} \right) \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \xi}{1 + e \cos \xi} \right] \Bigg|_{\nu_0}^{\nu} \quad (\text{A.50})$$

Definiendo

$$M \triangleq 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \nu}{1+e \cos \nu} \quad (\text{A.51})$$

$$M_0 = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{\nu_0}{2} \right) \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \nu_0}{1+e \cos \nu_0} \quad (\text{A.52})$$

donde M se conoce como *anomalía media*, y M_0 es la anomalía media al instante t_0 , se llega a

$$M - M_0 = \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} (t - t_0) \quad (\text{A.53})$$

Utilizando la ecuación (A.30), la ecuación (A.53) puede reescribirse como

$$M - M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0) \quad (\text{A.54})$$

y en base a (A.36)

$$M - M_0 = \frac{2\pi}{T} (t - t_0) \quad (\text{A.55})$$

y definiendo el *movimiento medio*

$$n \triangleq \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A.56})$$

también puede escribirse como

$$M - M_0 = n (t - t_0) \quad (\text{A.57})$$

En las ecuaciones (A.53), (A.54), (A.55) y (A.57) puede verse que la anomalía media varía linealmente en el tiempo. Se corresponde a un cuerpo ficticio que se estuviera moviendo en la trayectoria elíptica a una velocidad angular constante n .

En general resulta conveniente tomar $t_0 = t_p$, tiempo de pasaje por el perigeo. En este caso: $\nu_0 = M_0 = 0$.

En base a (A.51) puede intuirse que la anomalía verdadera no varía linealmente en función del tiempo, y que resultaría trabajoso obtener ν en función de M . Resulta más conveniente definir el ángulo auxiliar *anomalía excéntrica*, E , como el ángulo con respecto a la línea de periápsides formado por un objeto que se mueva en una órbita circular de radio igual al semi-eje mayor de la elipse, a una velocidad tal que su coordenada x coincida con la del cuerpo en la órbita elíptica, tal como se muestra en la figura A.4⁹.

A partir de esta figura, puede verse que esta coordenada x está dada por la distancia entre los puntos O y V

$$\text{dist}\{O, V\} = a \cos E = \text{dist}\{O, F\} + r \cos \nu = a e + r \cos \nu \quad (\text{A.58})$$

$$\therefore a \cos E = a e + r \cos \nu \quad (\text{A.59})$$

⁹Debe tenerse en cuenta que el marco de referencia utilizado no es el correspondiente a la órbita elíptica (que tendría como origen el punto F), sino que es el correspondiente a la ficticia órbita circular.

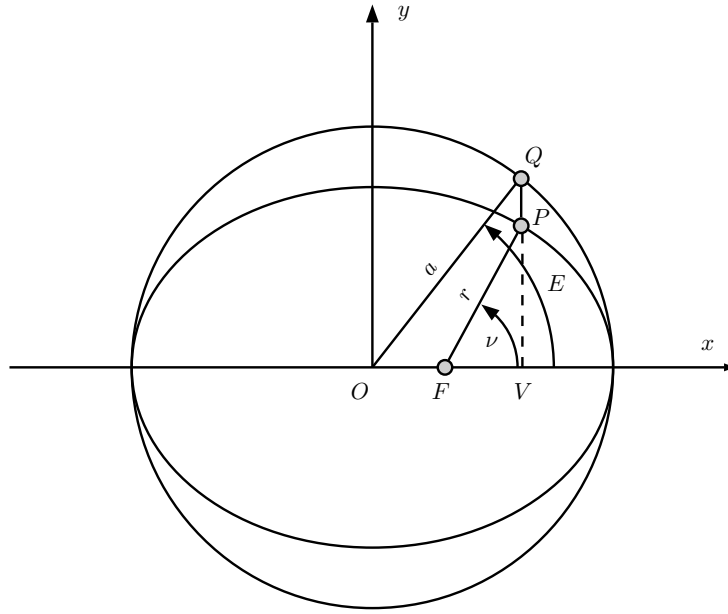


Figura A.4: Vinculación entre la anomalía verdadera, ν , y la anomalía excéntrica, E .

Utilizando (A.31) se llega a

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{A.60})$$

A partir de (A.60) puede obtenerse

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (\text{A.61})$$

Puede verse que¹⁰

$$\tan \left(\frac{E}{2} \right) = \frac{\sin E}{1 + \cos E} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{1 + e \cos \nu + e + \cos \nu} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \nu}{(1 + e)(1 + \cos \nu)} \quad (\text{A.62})$$

$$\therefore \tan \left(\frac{E}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \left(\frac{\nu}{2} \right) \quad (\text{A.63})$$

De donde se obtiene que

$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) \quad (\text{A.64})$$

Finalmente, reemplazando (A.64) y (A.60) en (A.51), se obtiene

$$\boxed{M = E - e \sin E} \quad (\text{A.65})$$

¹⁰Utilizando la identidad trigonométrica $\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

que se conoce como *Ecuación de Kepler*. Esta es una ecuación trascendental, que debe resolverse por algún método numérico como por ejemplo el método de Newton-Raphson (Burden y Faires, 2002). En general, para órbitas con baja excentricidad, conviene tomar $E_0 = M$ como valor inicial para este método iterativo.

Si se definen los vectores unitarios \mathbf{p} y \mathbf{q} que apuntan en la dirección del perigeo y al punto de $\nu = \frac{\pi}{2}$ (coordenadas x e y del plano orbital), la posición del satélite queda definida por

$$\mathbf{r} = r \cos \nu \mathbf{p} + r \sin \nu \mathbf{q} \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{r} = a(\cos E - e) \mathbf{p} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E \mathbf{q} \quad (\text{A.67})$$

y la velocidad por

$$\dot{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\mu a}{r}} \left(\sin E \mathbf{p} + \sqrt{1 - e^2} \cos E \mathbf{q} \right) \quad (\text{A.68})$$

Por tanto, en función de por ejemplo los parámetros (a, e, M_0, t_0) , mediante la ecuación (A.36) se obtiene el valor de T , y mediante la ecuación (A.56) se obtiene n . Luego, para un determinado instante t , mediante la ecuación (A.57) se obtiene M y mediante (A.65) se obtiene E para dicho instante. Luego, utilizando (A.67) y (A.68) se obtiene la posición y velocidad del satélite con respecto al plano orbital, en dicho instante.

A.7. Órbitas en 3 dimensiones

Las ecuaciones orbitales anteriores permiten describir el comportamiento del satélite con respecto al plano orbital. Para describir este comportamiento en un marco de referencia de tres dimensiones, como el ECI, simplemente se define la orientación de este plano orbital con respecto a dicho marco. Esta orientación se describe mediante tres rotaciones sucesivas en los ángulos i , Ω y ω , denominados inclinación, ascensión recta del nodo ascendente y argumento de perigeo, respectivamente, que se esquematizan en la figura A.5.

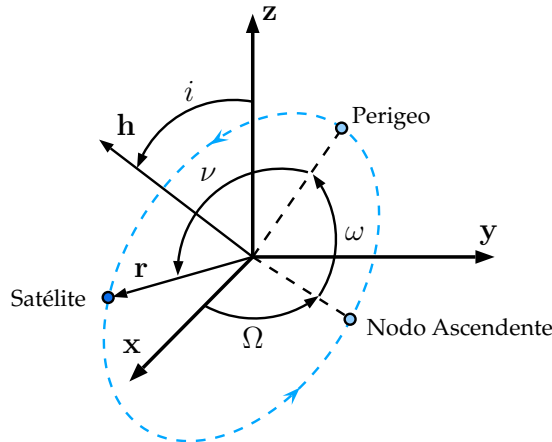


Figura A.5: Orientación del plano orbital con respecto al marco ECI (ángulos Ω , ω e i).

La inclinación, i describe el ángulo entre el plano orbital y el plano ecuatorial (o, de manera equivalente, entre el vector \mathbf{h} y el eje z); la ascensión recta del nodo ascendente, Ω , indica el ángulo entre el equinoccio vernal y el punto de la órbita en el que el satélite cruza el ecuador de sur a norte, conocido como nodo ascendente; y el argumento de perigeo, ω , indica el ángulo entre la dirección del nodo ascendente y la dirección del perigeo, medida en el plano orbital. De esta manera, la matriz de rotación que lleva del plano orbital al sistema ECI, resulta¹¹

$$\mathbf{C}_p^i = \mathbf{C}_z(-\Omega)\mathbf{C}_x(-i)\mathbf{C}_z(-\omega) = \quad (\text{A.69})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (\text{A.70})$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \cos i \sin \omega & \cos i \cos \omega & -\sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix} = \quad (\text{A.71})$$

$$= \begin{bmatrix} c\Omega c\omega - s\Omega c i s\omega & -c\Omega s\omega - s\Omega c i c\omega & s\Omega s i \\ s\Omega c\omega + c\Omega c i s\omega & -s\Omega s\omega + c\Omega c i c\omega & -c\Omega s i \\ s i s\omega & s i c\omega & c i \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

La posición y velocidad, expresadas en el marco ECI, \mathbf{r}^i y $\dot{\mathbf{r}}^i$, resultan

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{C}_p^i \mathbf{r}^p \quad (\text{A.73})$$

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{C}_p^i \dot{\mathbf{r}}^p \quad (\text{A.74})$$

donde \mathbf{r}^p y $\dot{\mathbf{r}}^p$ representan la posición y velocidad del satélite medidas en el marco del plano orbital, ecuaciones (A.67) y (A.68).

¹¹Donde se utiliza la notación: $\mathbf{C}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

APÉNDICE B

DESEMPEÑO DE EKF CON GLONASS Y GPS-GLONASS

En este apéndice se compara el desempeño de los diferentes modelos utilizados para la implementación del EKF, en caso de utilizar mediciones del sistema GLONASS, y en caso de utilizar mediciones de los sistemas GPS y GLONASS de manera conjunta; complementando el análisis realizado en el capítulo 8.

B.2. Sistema GLONASS

En las figuras B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 y B.6 se presentan los resultados de los errores medios cuadráticos y los residuos de pseudo-rango y delta-rango para los distintos modelos utilizados; en cada caso con diferentes valores de “sintonía” del filtro, considerando sólo mediciones del sistema GLONASS. En cada caso se indica el valor óptimo, tanto en $\sqrt{\epsilon_p^2}$ (error de posición-sesgo) como en $\sqrt{\epsilon_v^2}$ (error de velocidad-deriva). Para complementar, también se indica en la gráfica de residuos el punto correspondiente a dicho óptimo. En las tablas B.1 y B.2 se presentan estos valores óptimos. En la figura B.7, se toma el valor de $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01^1$, y se comparan los errores obtenidos con los seis modelos presentados en función del valor de $\sigma_{\ddot{x}}$ (ó $\sigma_{\ddot{y}}$).

En la figura B.8 se presentan, en trazo color rojo, los errores en las soluciones de posición y velocidad con EKF para el caso Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$ (valor óptimo). En la misma figura también se presenta, en trazo color azul, los errores en la solución puntual de posición y velocidad; notándose el efecto de filtrado en la solución con EKF frente a la solución puntual. También se presenta, en trazo color negro, el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento

¹Que corresponde al óptimo, o es muy cercano al óptimo en todos los casos

Enfoque	Óptimo	$\sigma_{\ddot{b}}$	$\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_p^2}$	$\sigma_{\ddot{p}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	10,0	$9,5579 \times 10^{-1}$	2,9350
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	5,5	$9,5648 \times 10^{-1}$	2,9350
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-2}$	$9,5316 \times 10^{-1}$	2,9351
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$9,5325 \times 10^{-1}$	2,9351
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$6,00 \times 10^{-2}$	$9,4380 \times 10^{-1}$	2,9361
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$4,00 \times 10^{-2}$	$9,5982 \times 10^{-1}$	2,9410
Din. II	Pos	$1,25 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$4,8867 \times 10^{-1}$	2,9706
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$4,8872 \times 10^{-1}$	2,9713
Din. III	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$8,7778 \times 10^{-1}$	2,9452
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$8,8149 \times 10^{-1}$	2,9473
Din. IV	Pos	$1,50 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$4,7647 \times 10^{-1}$	2,9733
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$4,7707 \times 10^{-1}$	2,9744

Tabla B.1: Resultados de comparación de los diferentes modelos. Caso GLONASS.

correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ . Puede observarse que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

En la figura B.9a se presentan los errores en las soluciones de sesgo y deriva. Además, en la figura B.9b se muestra el resultado de la correlación normalizada (al valor de varianza) de los residuos de post-filtrado. Se observa que los mismos son fuertemente no-correlacionados, lo cual es esperable: si el filtrado es bueno, en los residuos de post-filtrado debe observarse el efecto del ruido.

En las figuras B.10 y B.11 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Cinemático II, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$ (valor óptimo, en el error de velocidad).

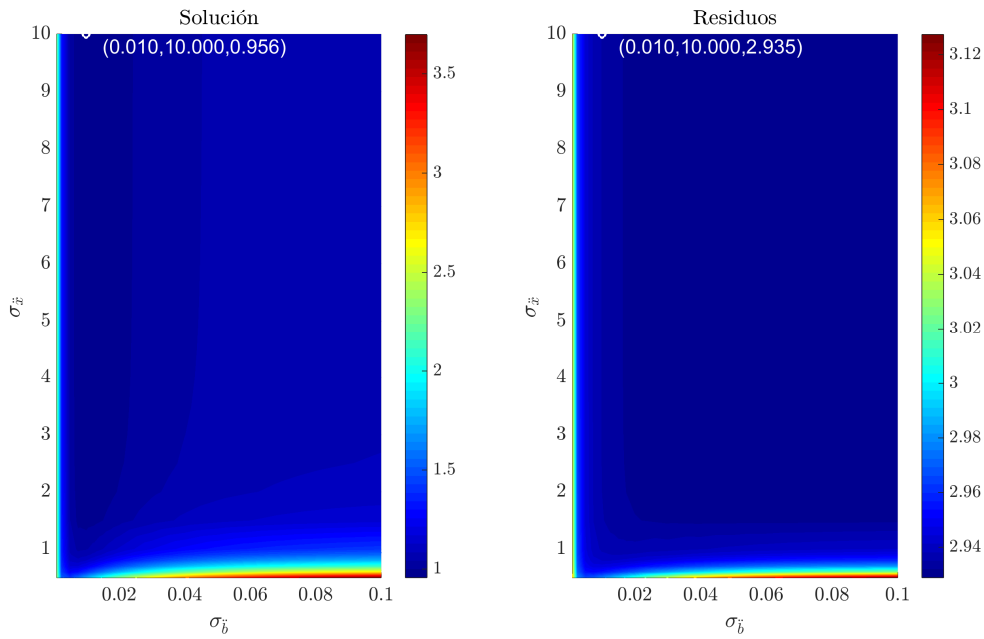
De igual manera, en las figuras B.12 y B.13 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico I, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 4,0 \times 10^{-2}$ (valor óptimo, en el error de velocidad); en las las figuras B.14 y B.15 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico II, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en las figuras B.16 y B.17 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico III, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; y en las figuras B.18 y B.19 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico IV, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. En todos los casos la sintonía seleccionada corresponde al valor óptimo en el error de velocidad.

Puede observarse como se reduce el error al seleccionar diferentes modelos, en concordancia con lo observado en la figura B.7.

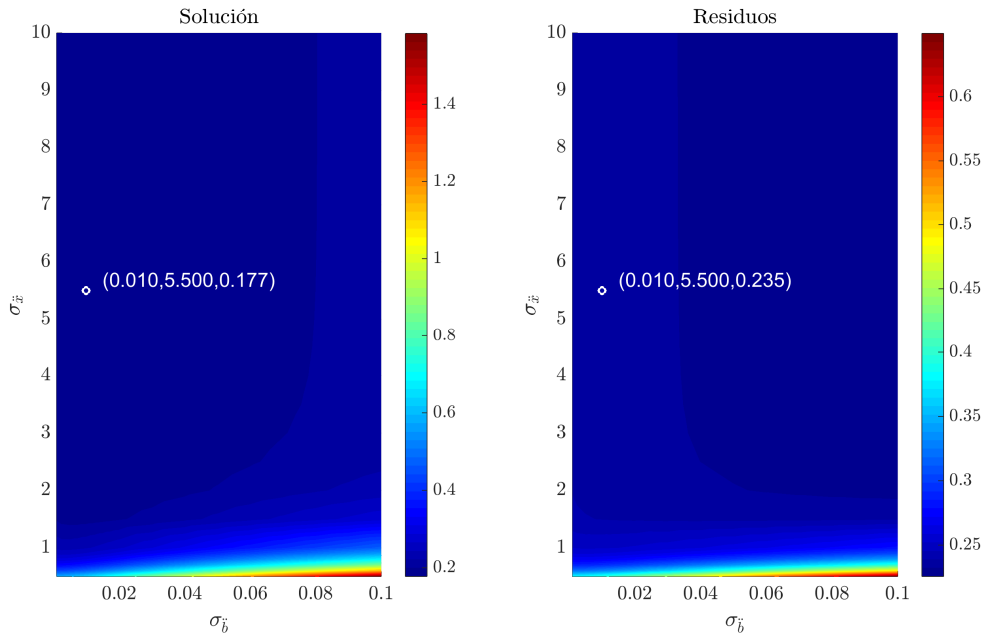
Los resultados del análisis son similares a los expuestos en el caso GPS (sección 8.3).

Enfoque	Óptimo	$\sigma_{\ddot{b}}$	$\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_v^2}$	$\sigma_{\ddot{\rho}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	10,0	$1,7739 \times 10^{-1}$	$2,3508 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	5,5	$1,7733 \times 10^{-1}$	$2,3511 \times 10^{-1}$
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-2}$	$1,0806 \times 10^{-1}$	$2,7219 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,00 \times 10^{-2}$	$1,0616 \times 10^{-1}$	$2,7558 \times 10^{-1}$
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$6,00 \times 10^{-2}$	$7,7129 \times 10^{-2}$	$2,7703 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$4,00 \times 10^{-2}$	$7,1561 \times 10^{-2}$	$2,8511 \times 10^{-1}$
Din. II	Pos	$1,25 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,8323 \times 10^{-2}$	$2,9683 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,8102 \times 10^{-2}$	$2,9757 \times 10^{-1}$
Din. III	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$4,0499 \times 10^{-2}$	$2,9606 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$4,0452 \times 10^{-2}$	$2,9686 \times 10^{-1}$
Din. IV	Pos	$1,50 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$2,0280 \times 10^{-2}$	$2,9615 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$1,9647 \times 10^{-2}$	$2,9756 \times 10^{-1}$

Tabla B.2: Resultados de comparación de los diferentes modelos. Caso GLONASS.

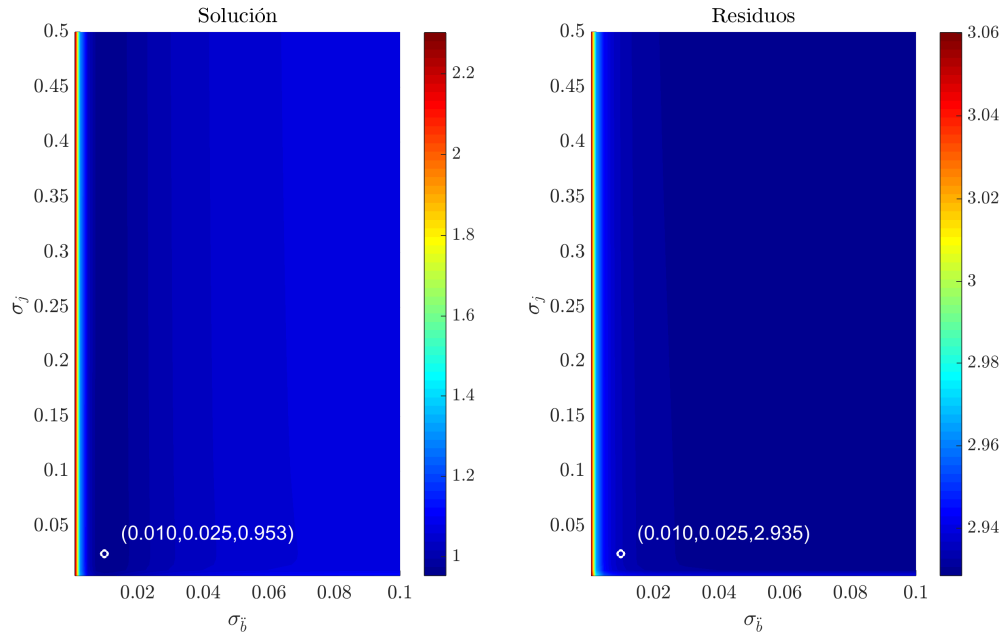


(a) Posición-Sesgo

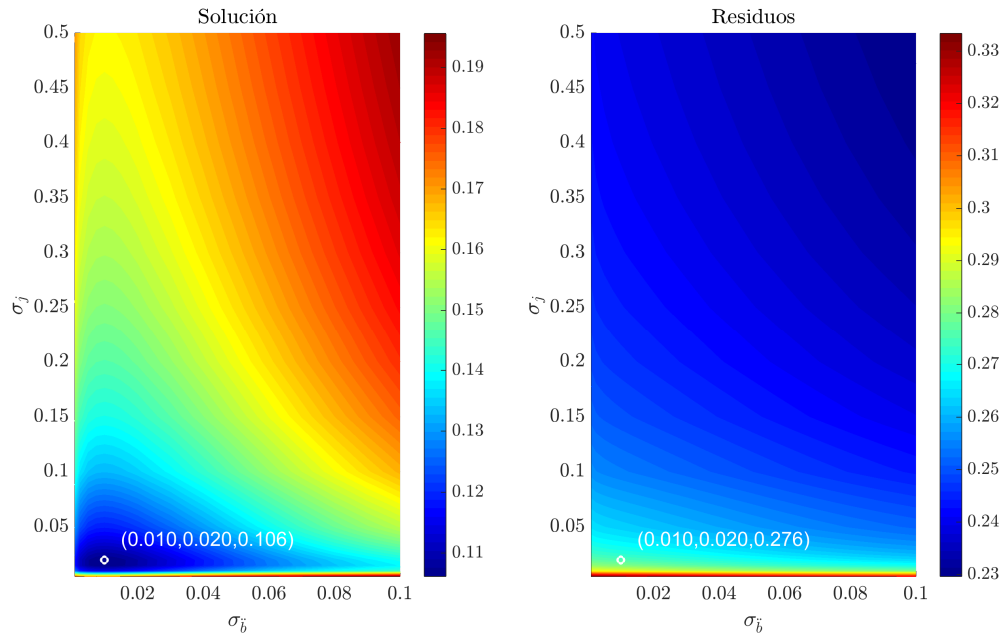


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.1: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS.

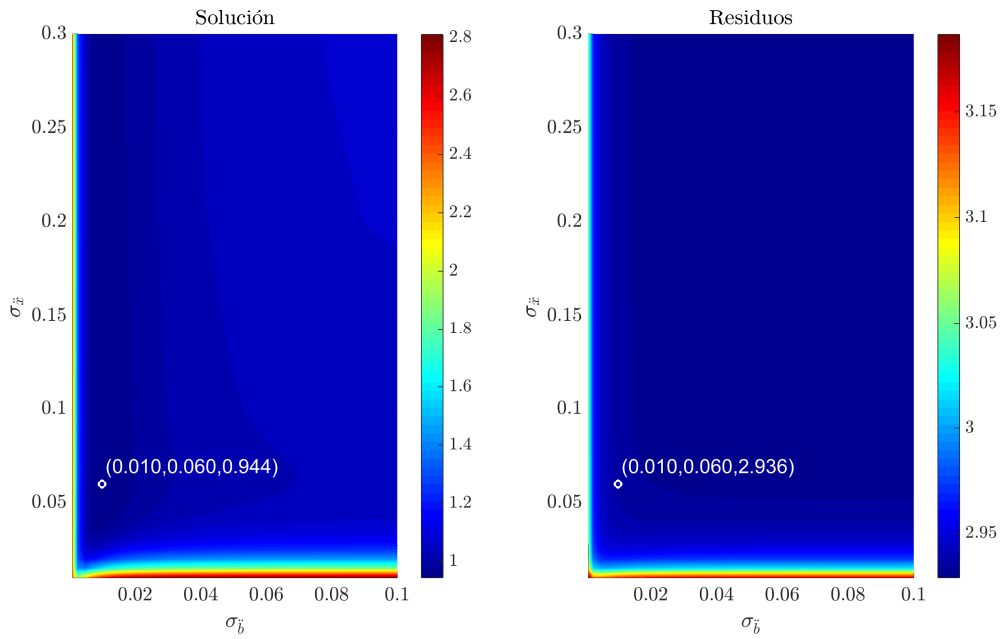


(a) Posición-Sesgo

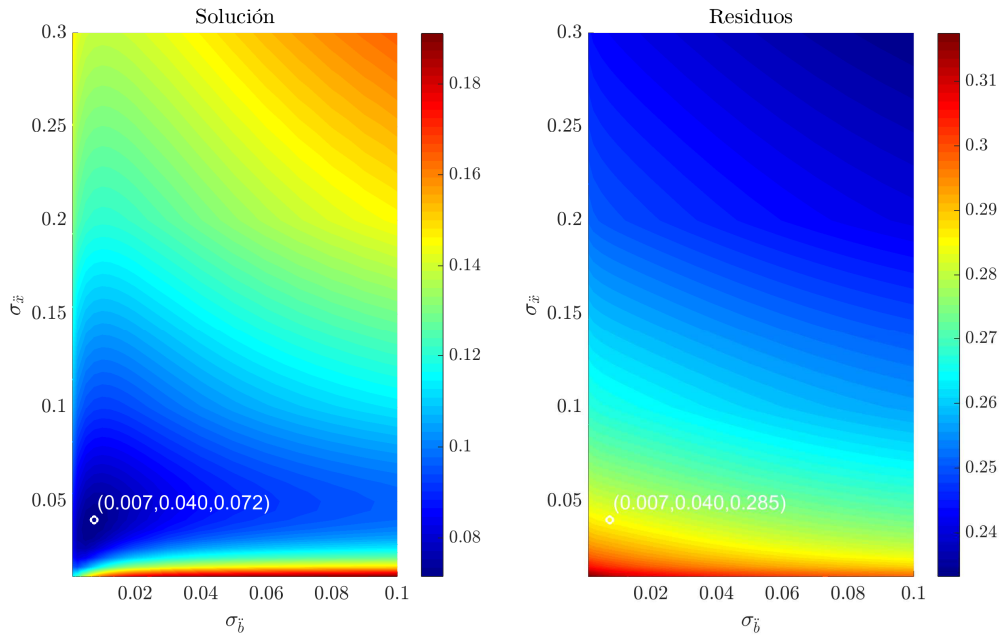


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.2: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS.

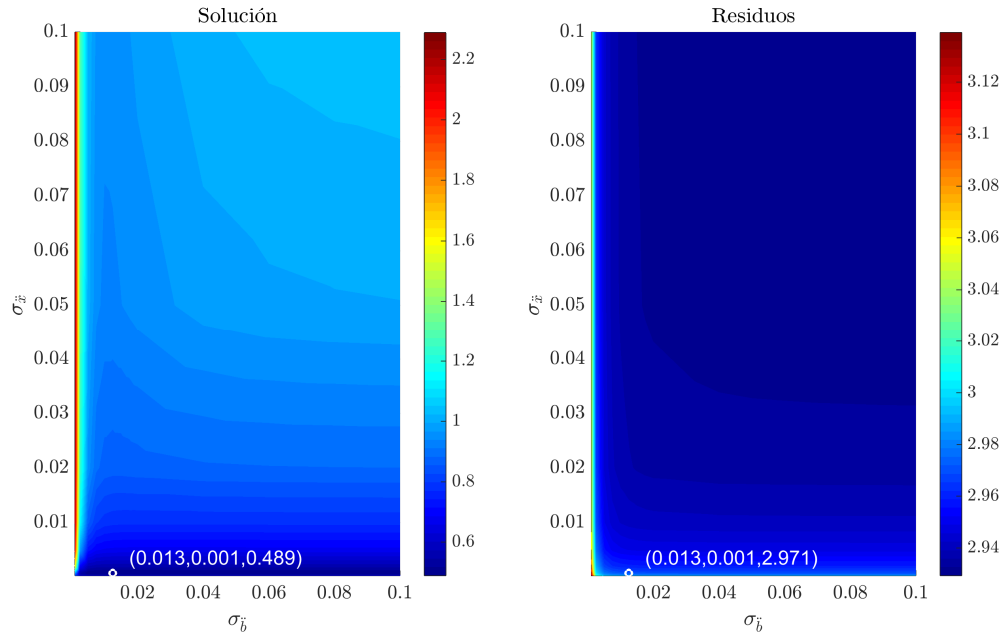


(a) Posición-Sesgo

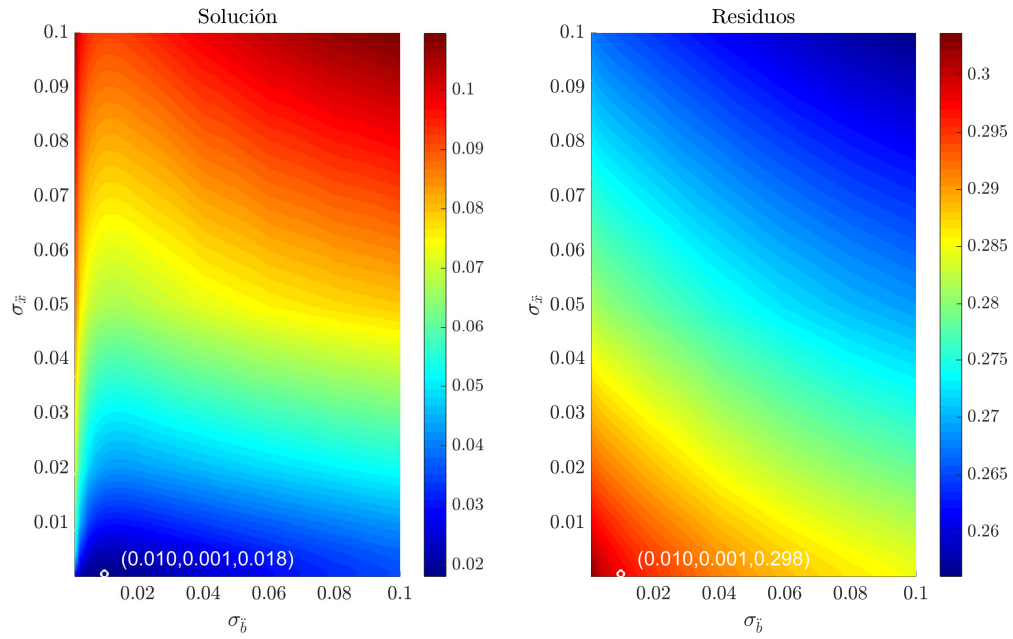


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.3: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS.

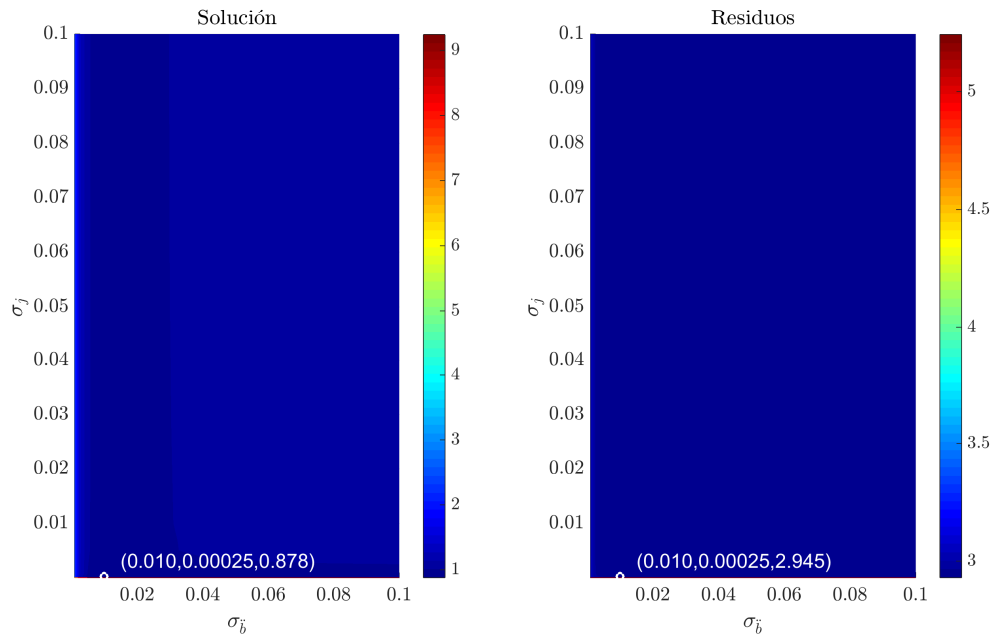


(a) Posición-Sesgo

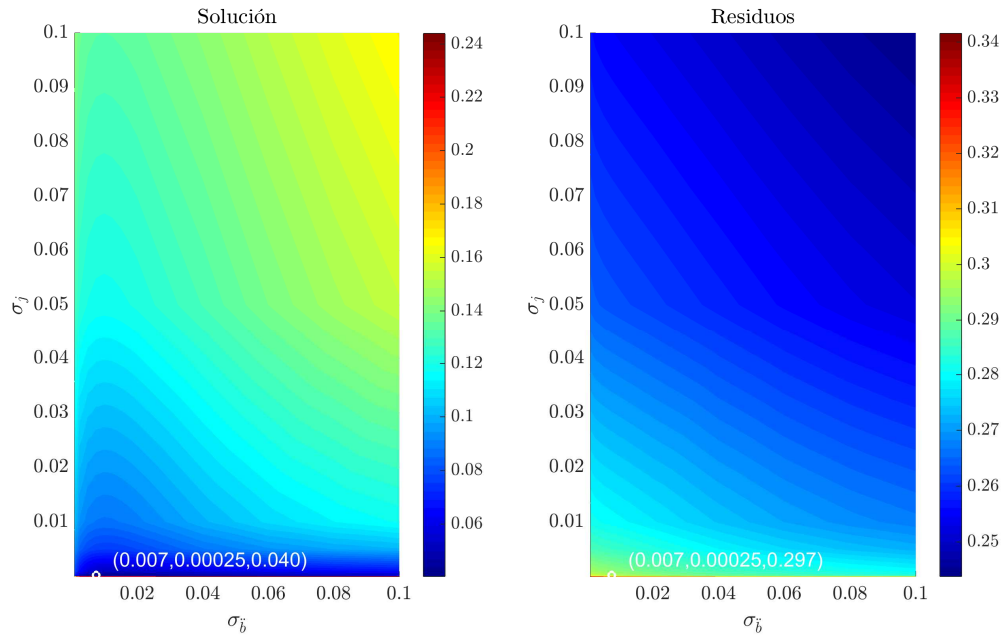


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.4: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS.

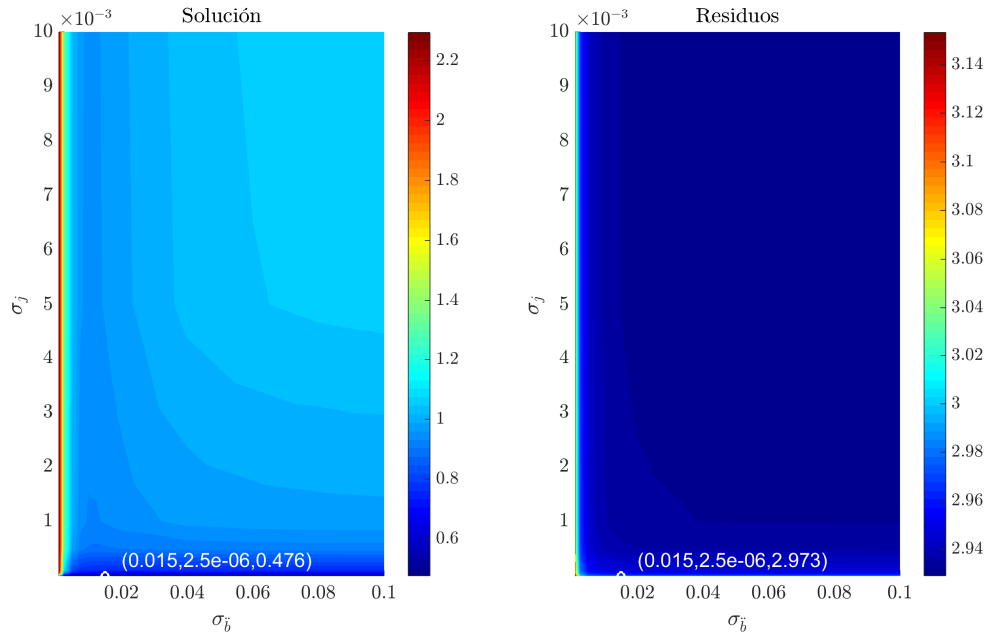


(a) Posición-Sesgo

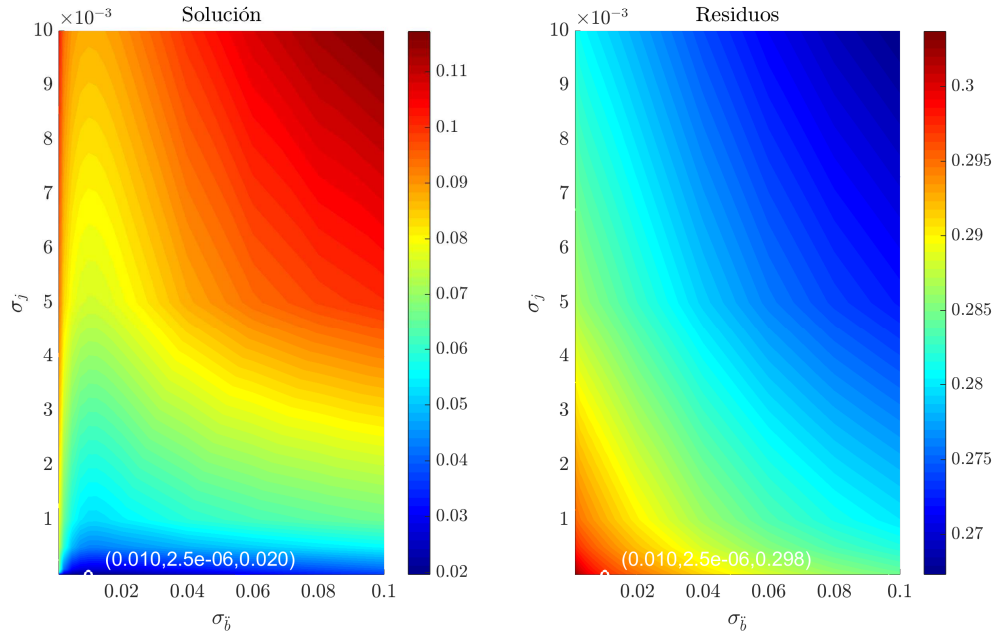


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.5: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS.

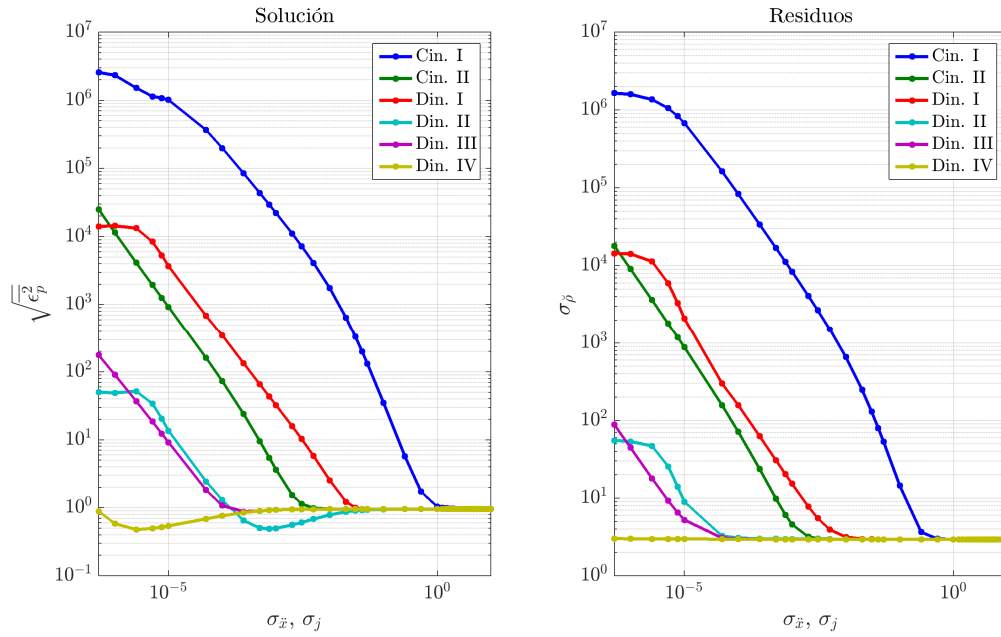


(a) Posición-Sesgo

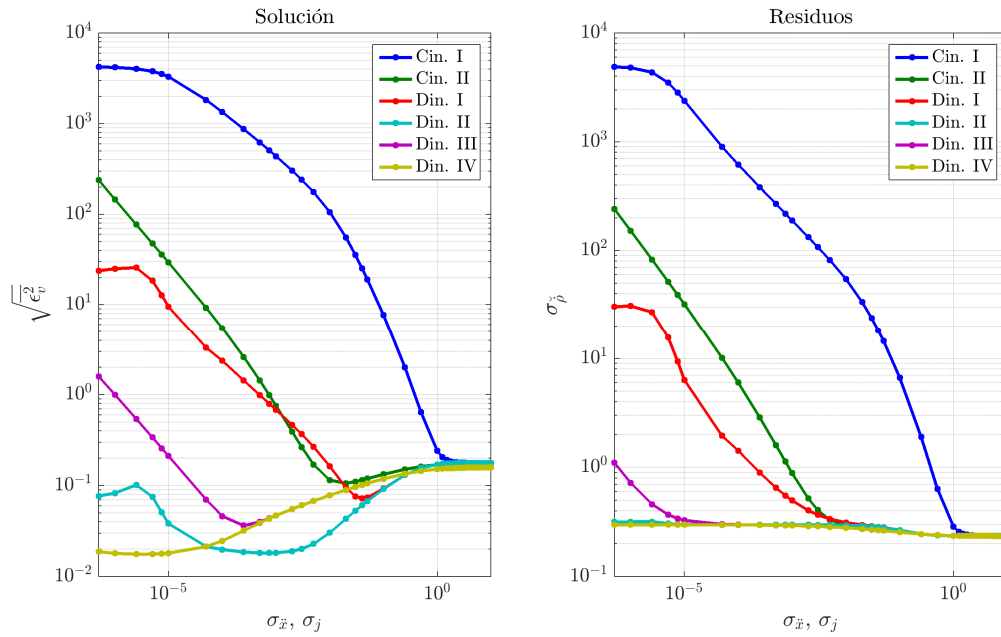


(b) Velocidad-Deriva

Figura B.6: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS.

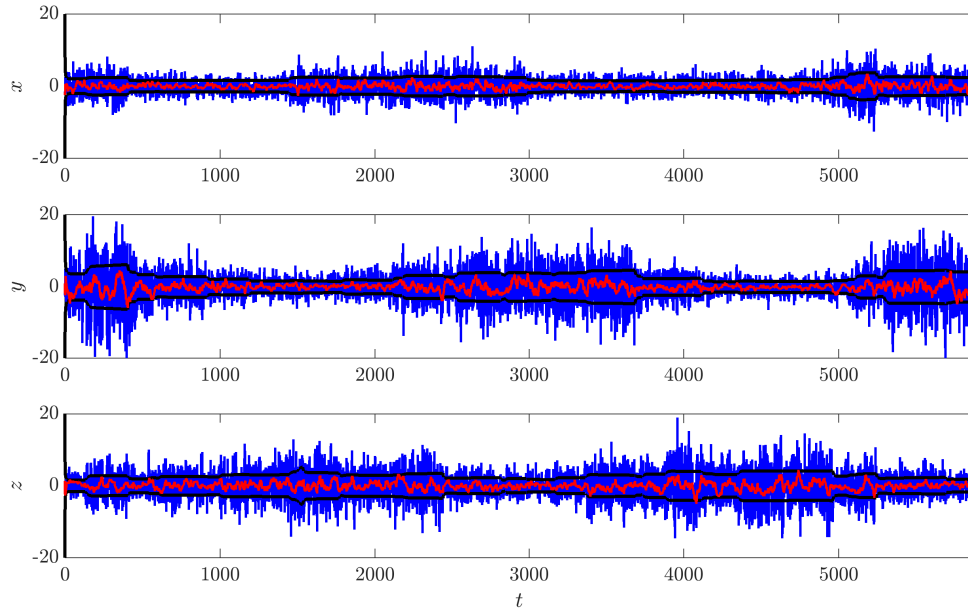


(a) Posición-Sesgo.

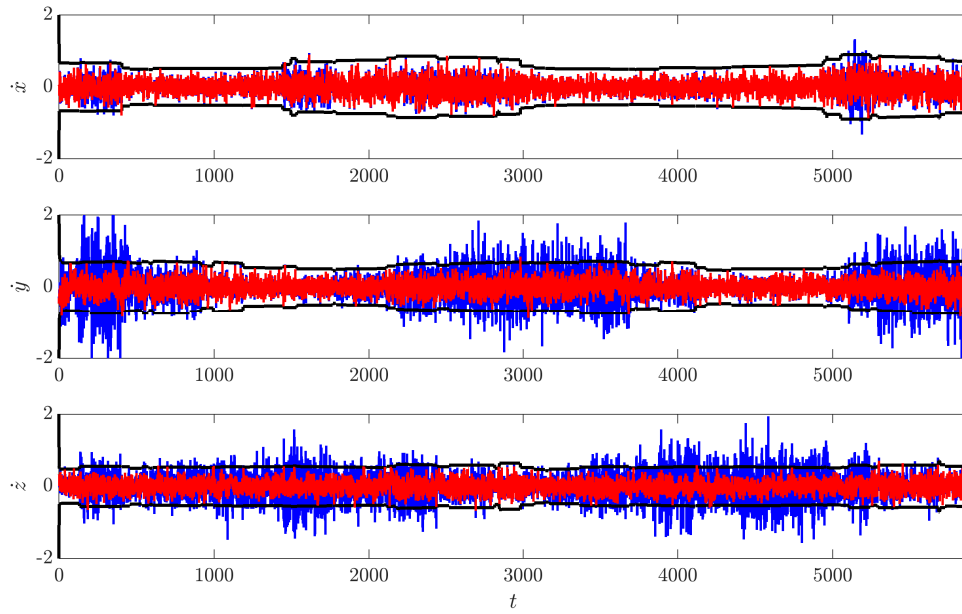


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.7: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\hat{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistema GLONASS. En todos los casos se toma $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$.

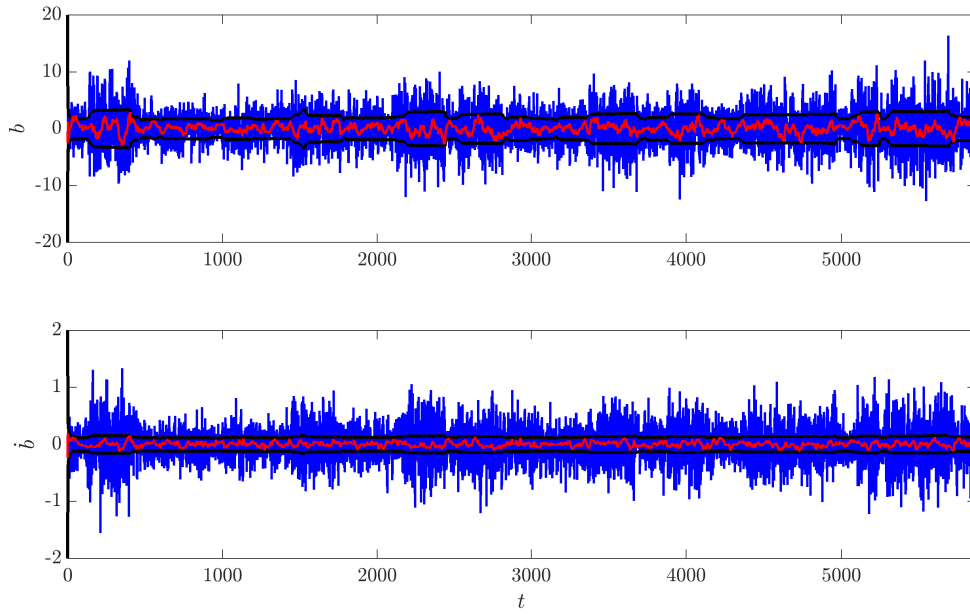


(a) Posición.

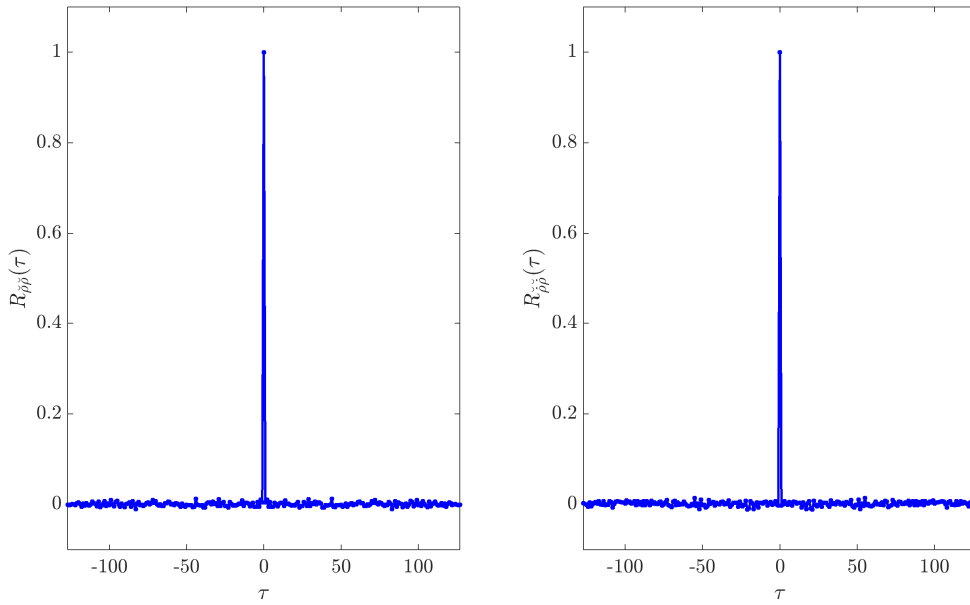


(b) Velocidad.

Figura B.8: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$.

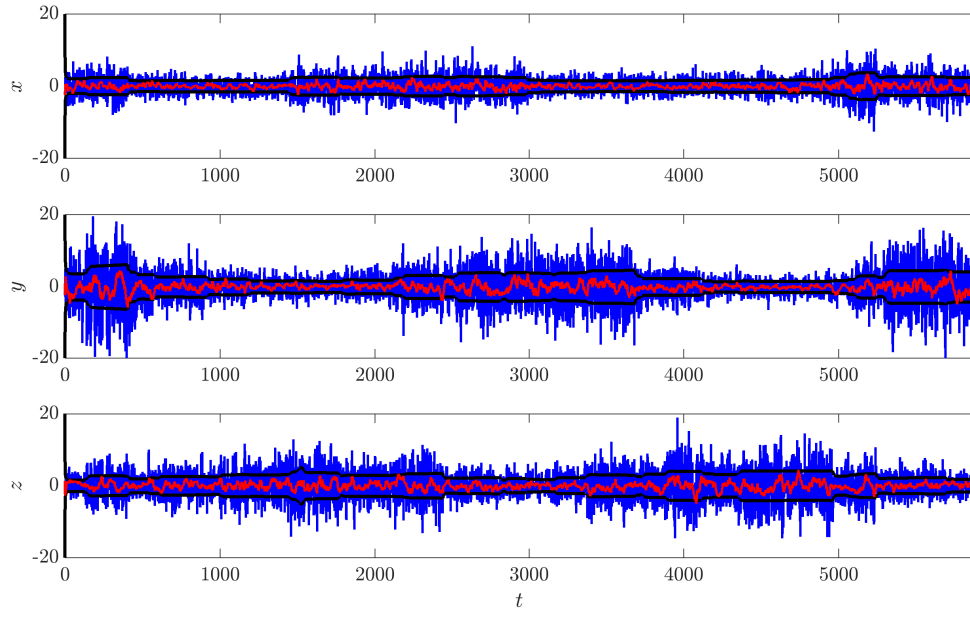


(a) Sesgo-Deriva.

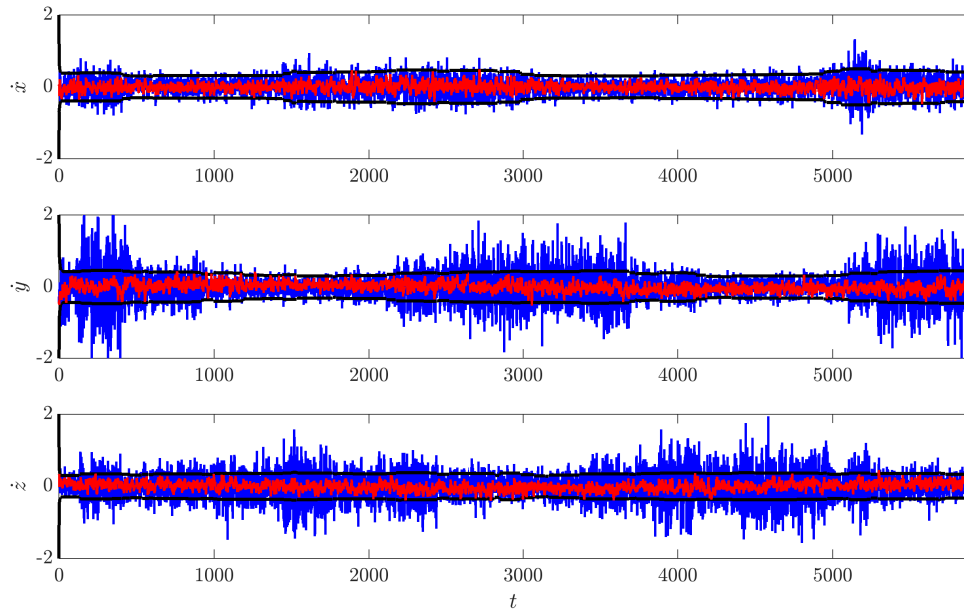


(b) Correlación normalizada.

Figura B.9: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

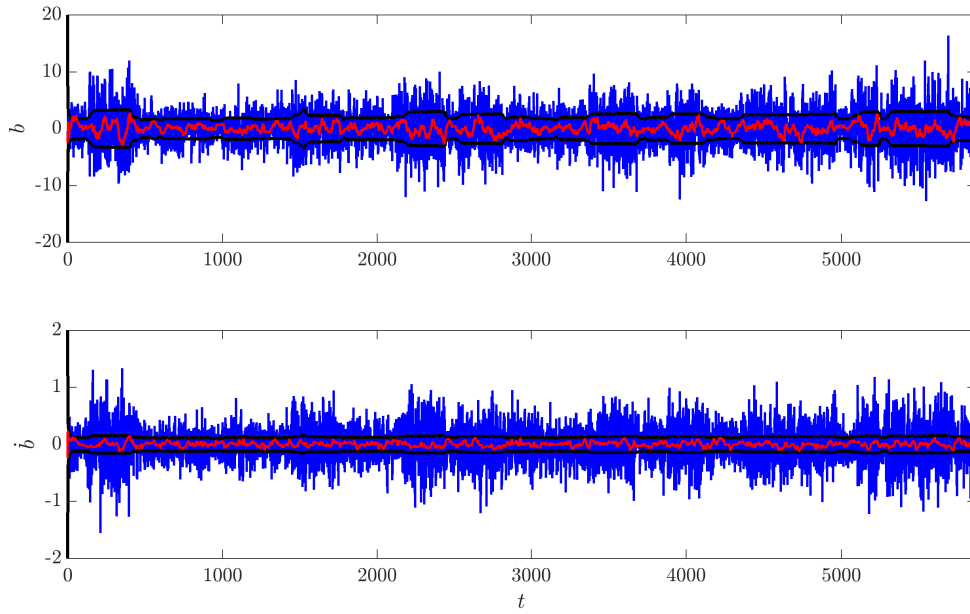


(a) Posición.

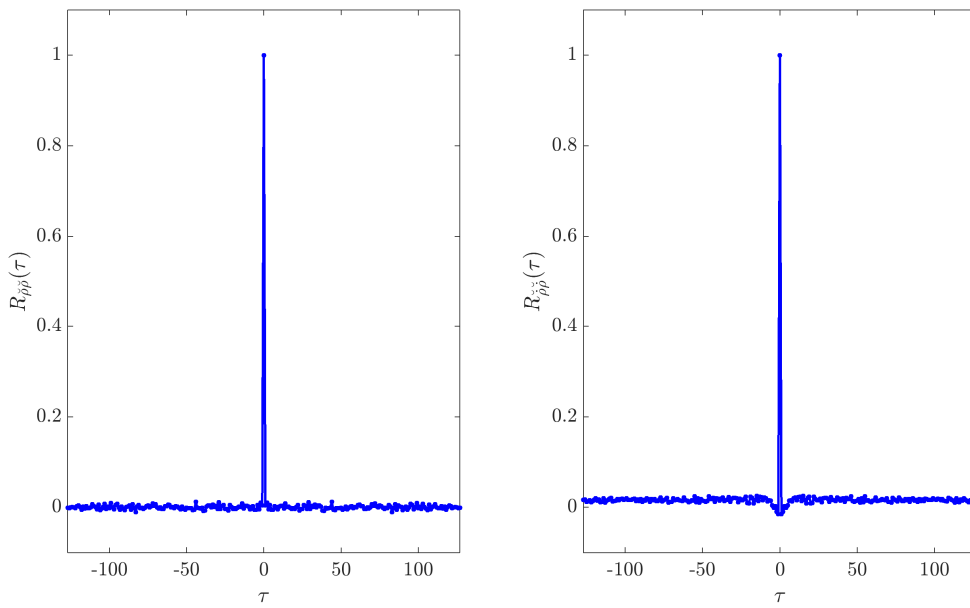


(b) Velocidad.

Figura B.10: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02$.

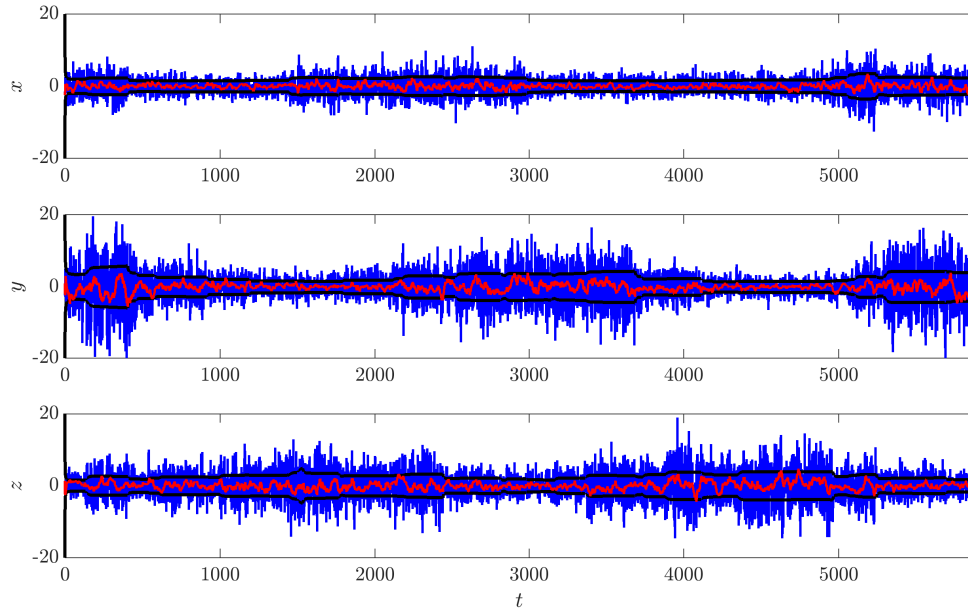


(a) Sesgo-Deriva.

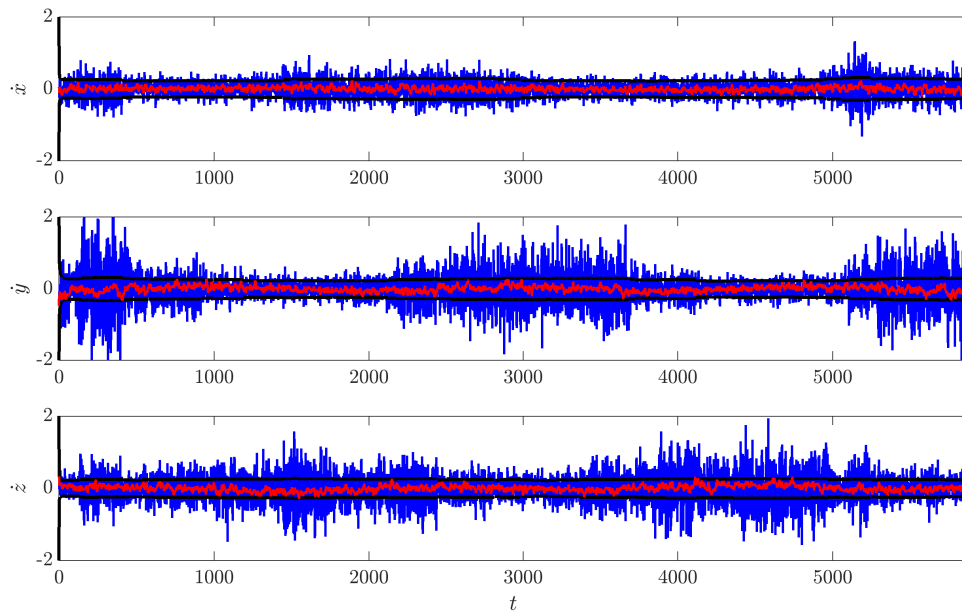


(b) Correlación normalizada.

Figura B.11: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

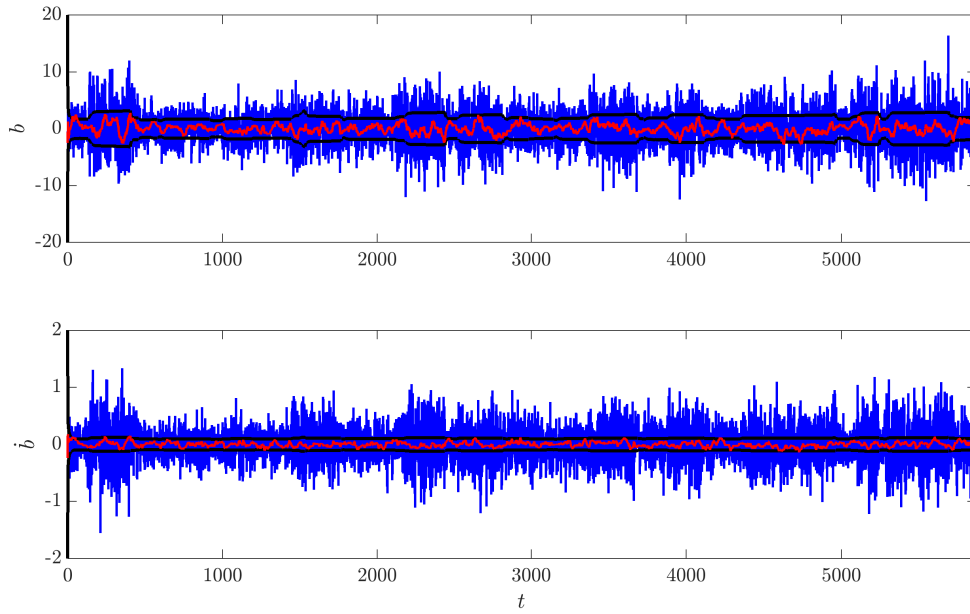


(a) Posición.

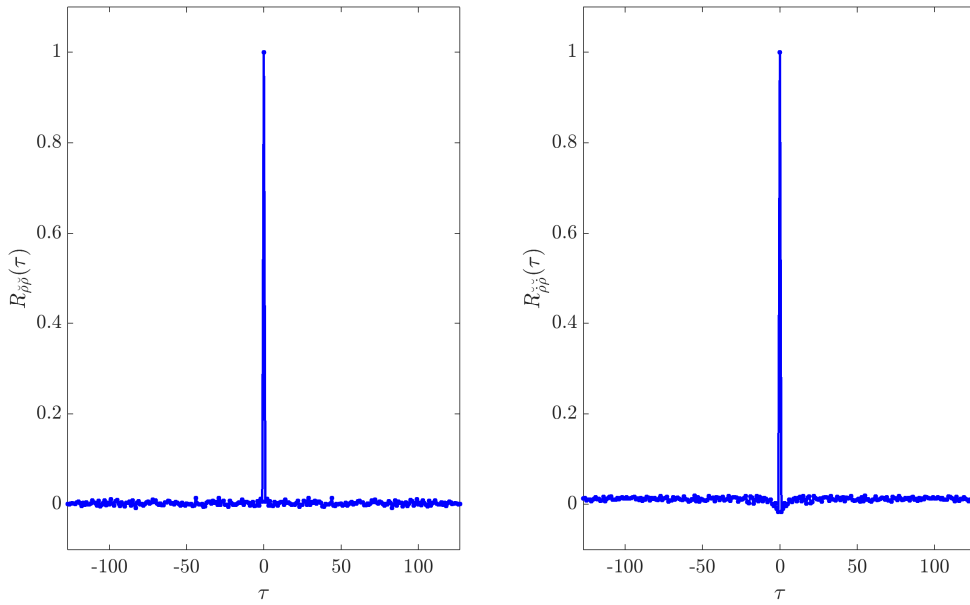


(b) Velocidad.

Figura B.12: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,04$.

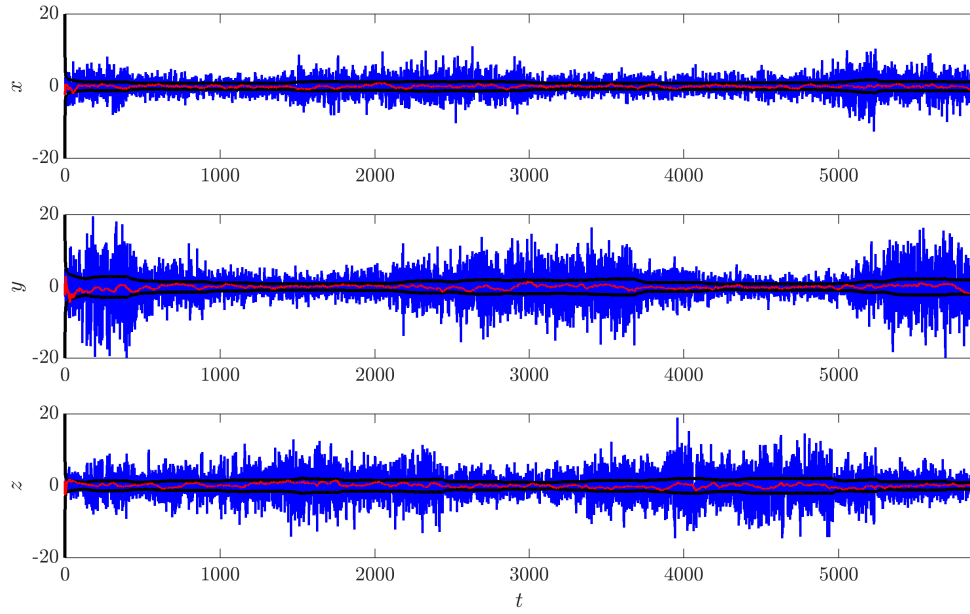


(a) Sesgo-Deriva.

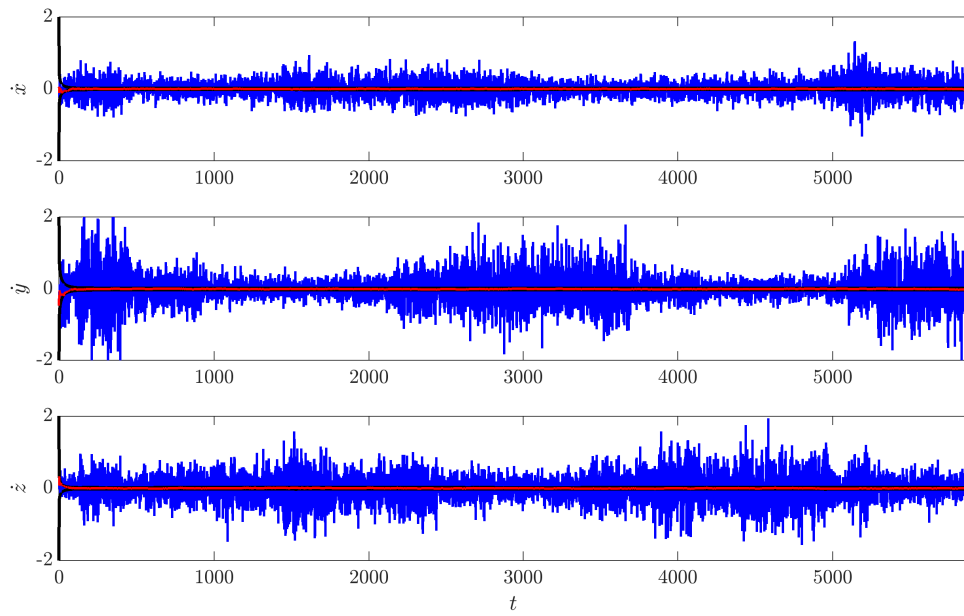


(b) Correlación normalizada.

Figura B.13: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 0,04$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

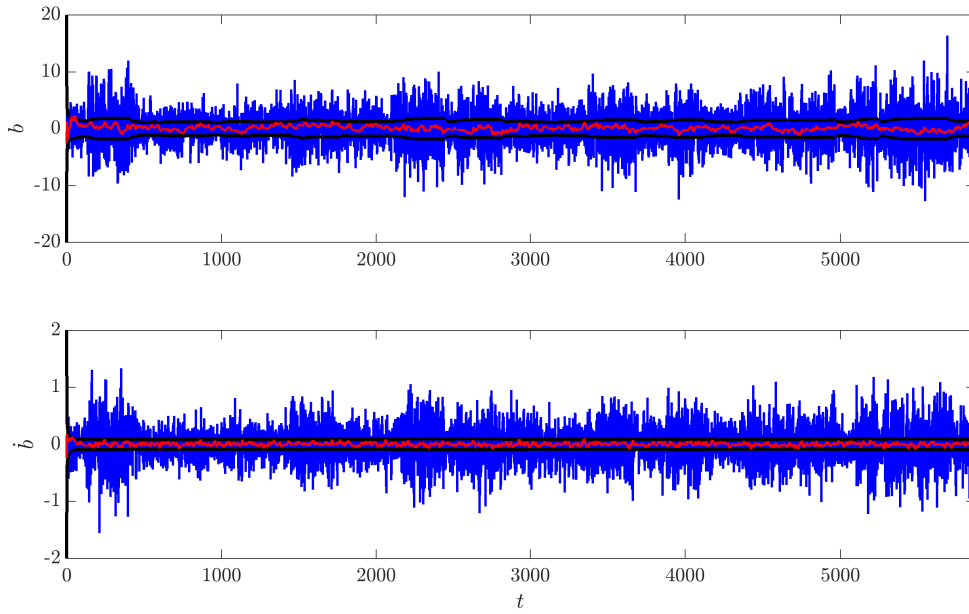


(a) Posición.

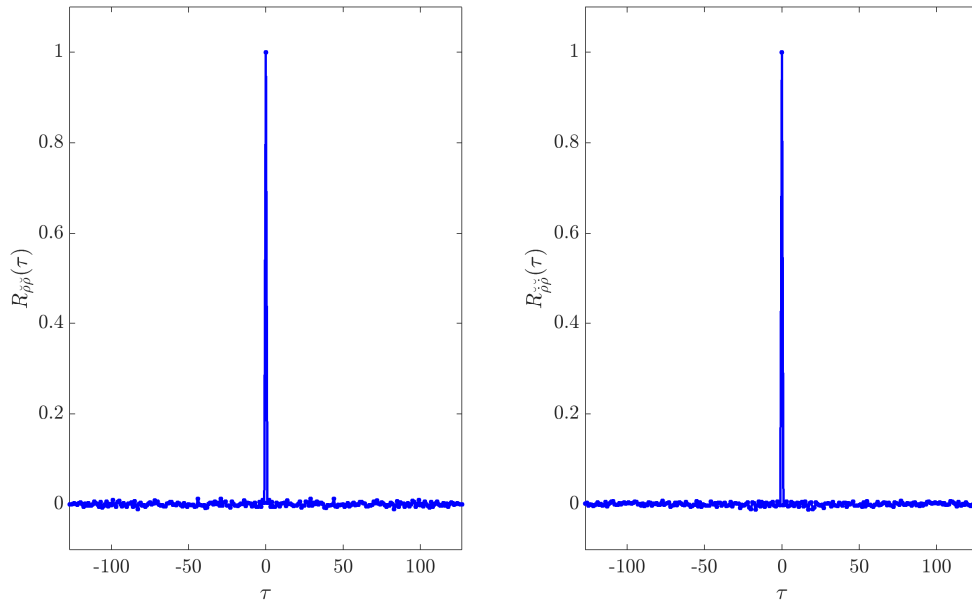


(b) Velocidad.

Figura B.14: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$.

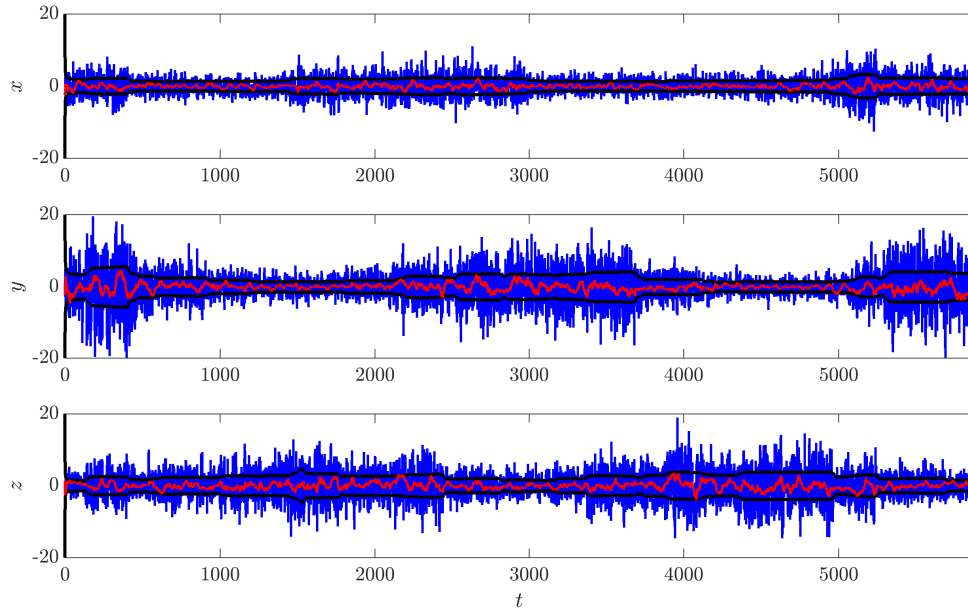


(a) Sesgo-Deriva.

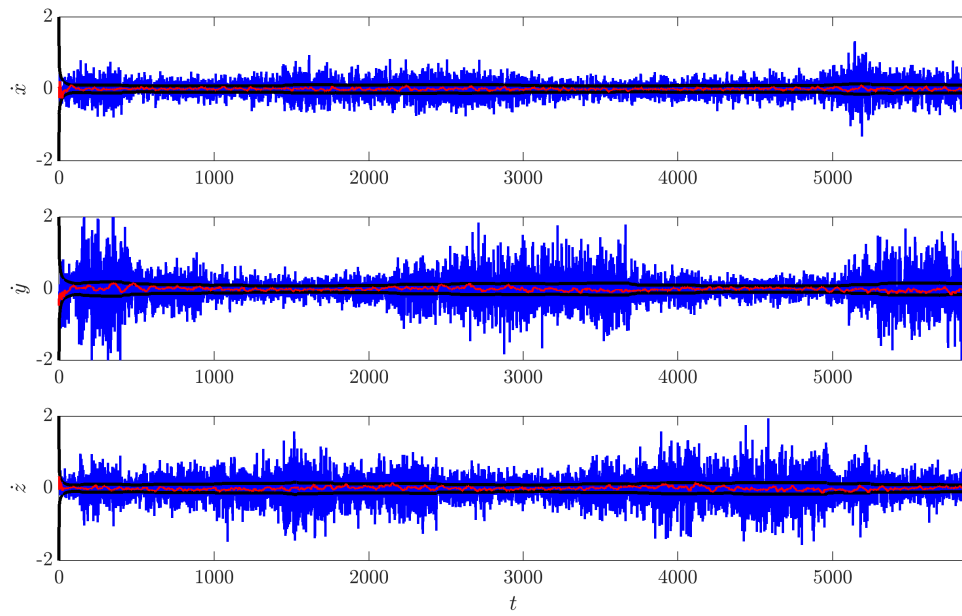


(b) Correlación normalizada.

Figura B.15: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

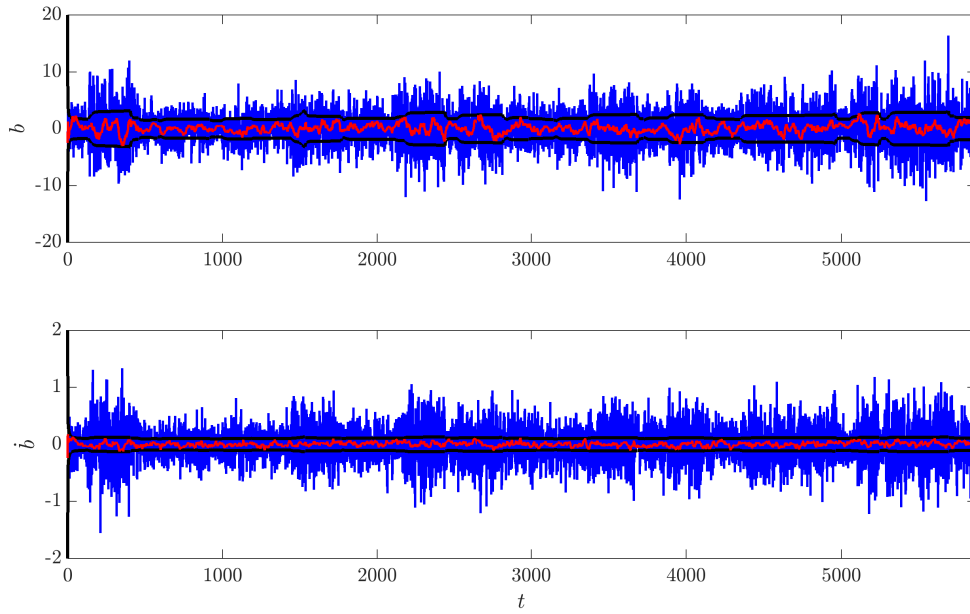


(a) Posición.

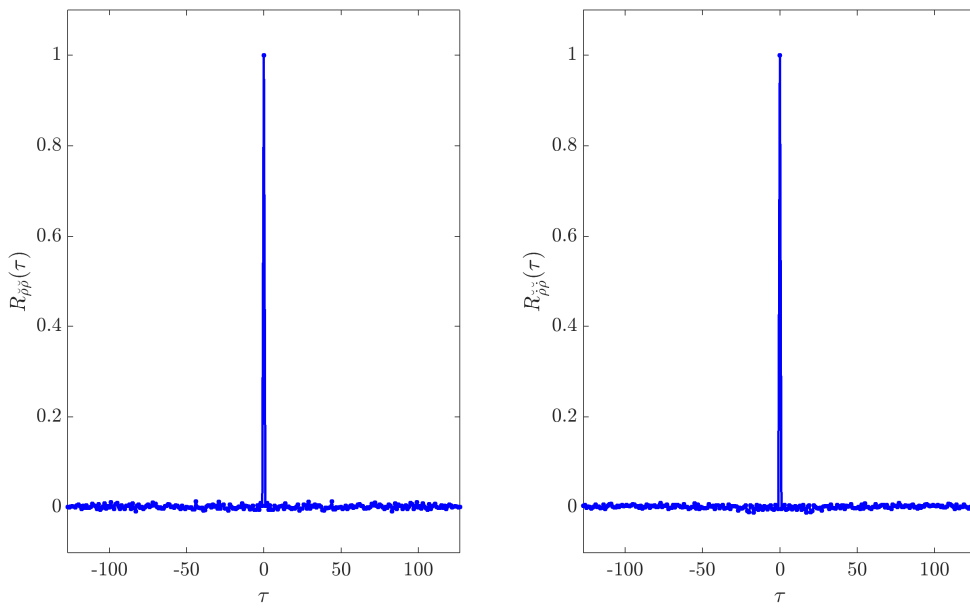


(b) Velocidad.

Figura B.16: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$.

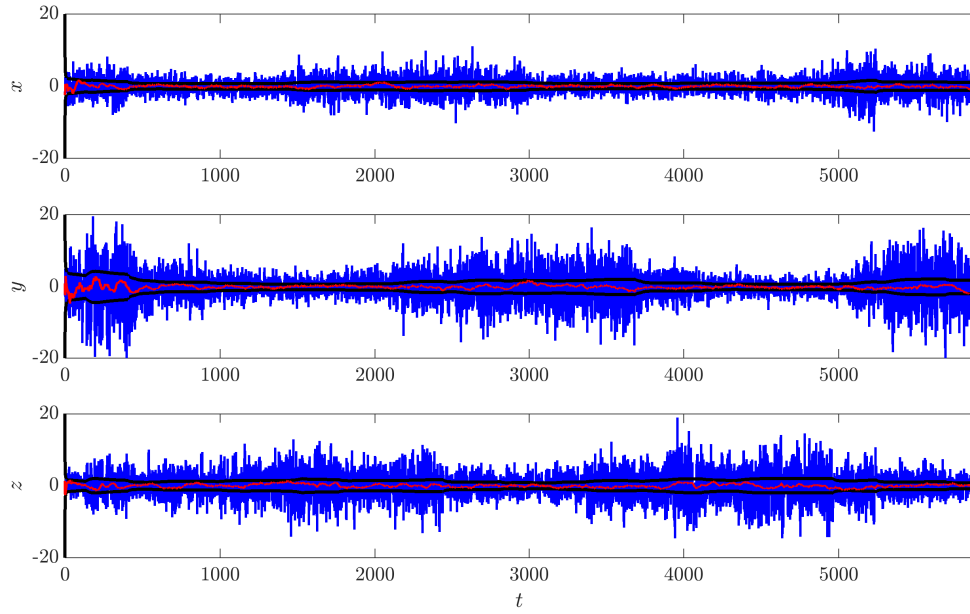


(a) Sesgo-Deriva.

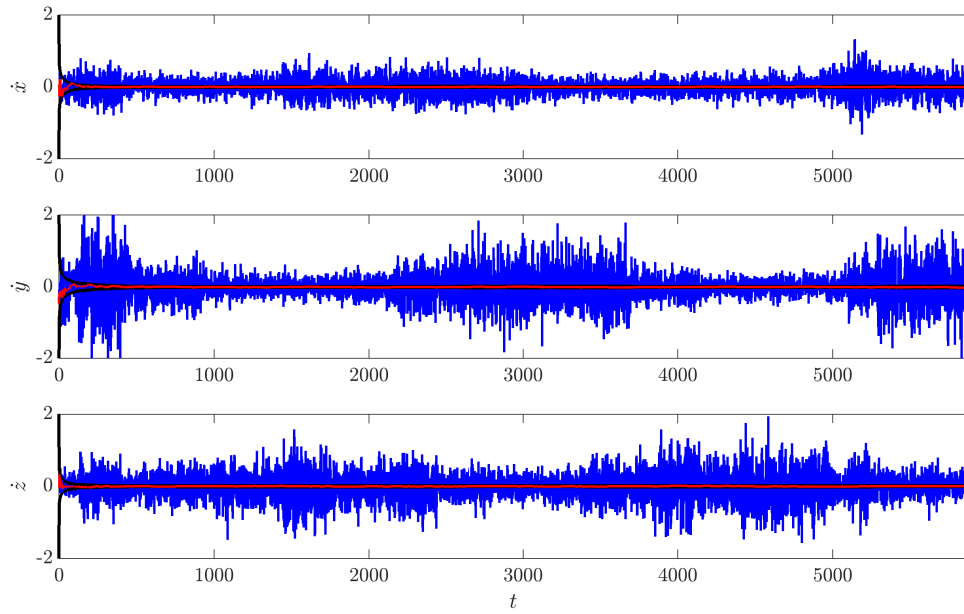


(b) Correlación normalizada.

Figura B.17: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

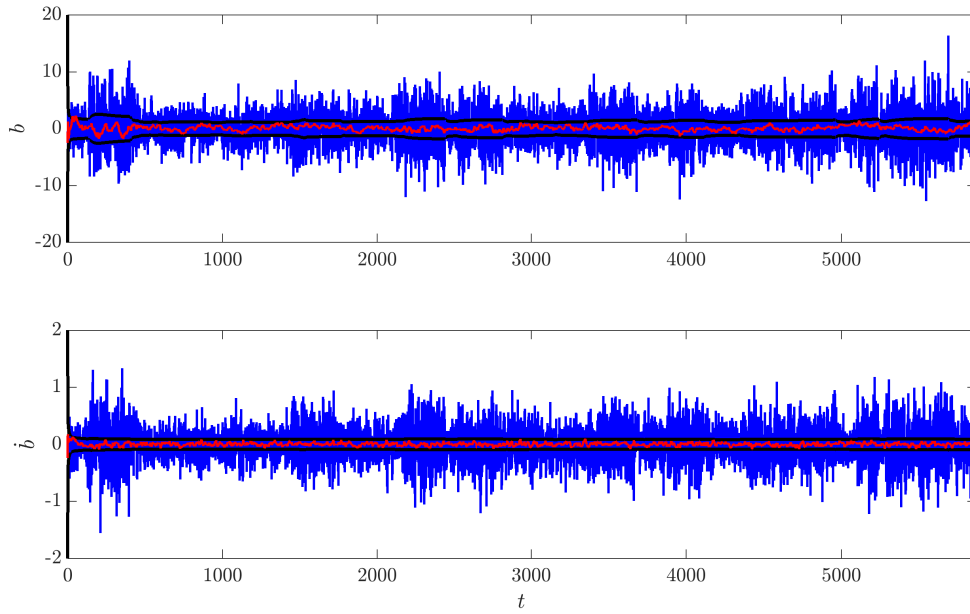


(a) Posición.

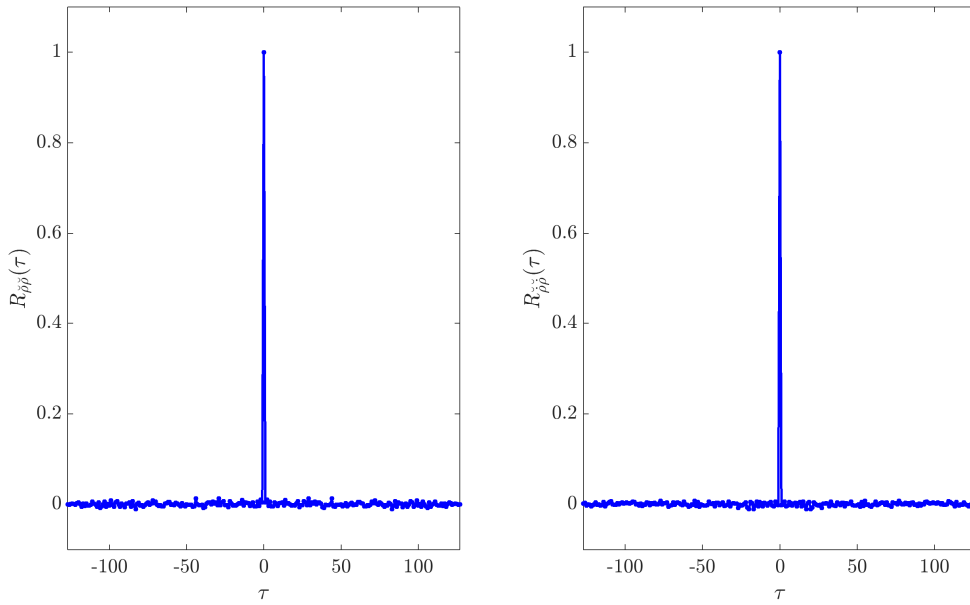


(b) Velocidad.

Figura B.18: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$.



(a) Sesgo-Deriva.



(b) Correlación normalizada.

Figura B.19: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

Finalmente, en las figuras, B.20, B.21 y B.22 se presentan en trazo color rojo los errores obtenidos en la solución de aceleración (no hay solución puntual de aceleración contra la cual comparar) con los modelos Cinemático II, Dinámico III y Dinámico IV, respectivamente, seleccionando en cada caso el valor de sintonía que corresponde al óptimo error de velocidad. Al igual que en las gráficas anteriores, también se presenta en trazo color negro el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ , observándose que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

En la comparación de estas gráficas se debe tener en cuenta que corresponden al error de estimación de tres aceleraciones diferentes: en el modelo Cinemático II corresponde a la estimación de toda la aceleración presente, en el modelo Dinámico III corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria dada por una Tierra con distribución de masa uniforme, mientras que en el modelo Dinámico IV corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria que incorpora el efecto del término J_2 .

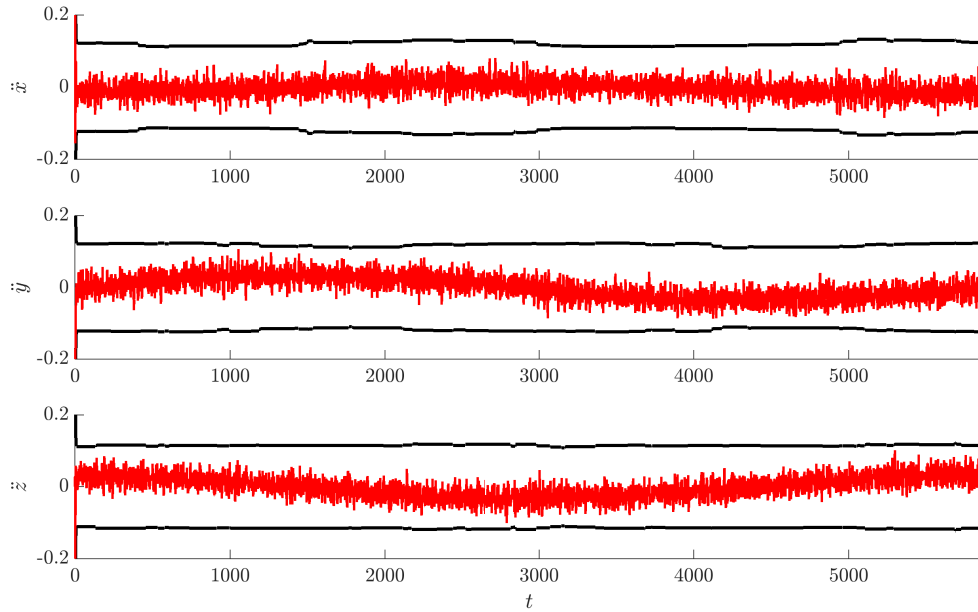


Figura B.20: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02.$$

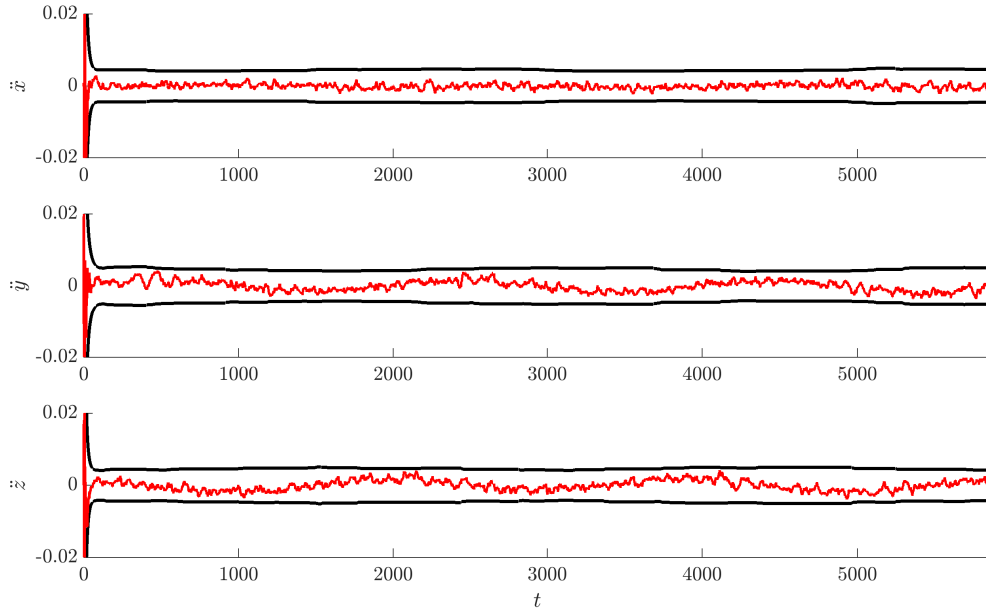


Figura B.21: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y

$$\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}.$$

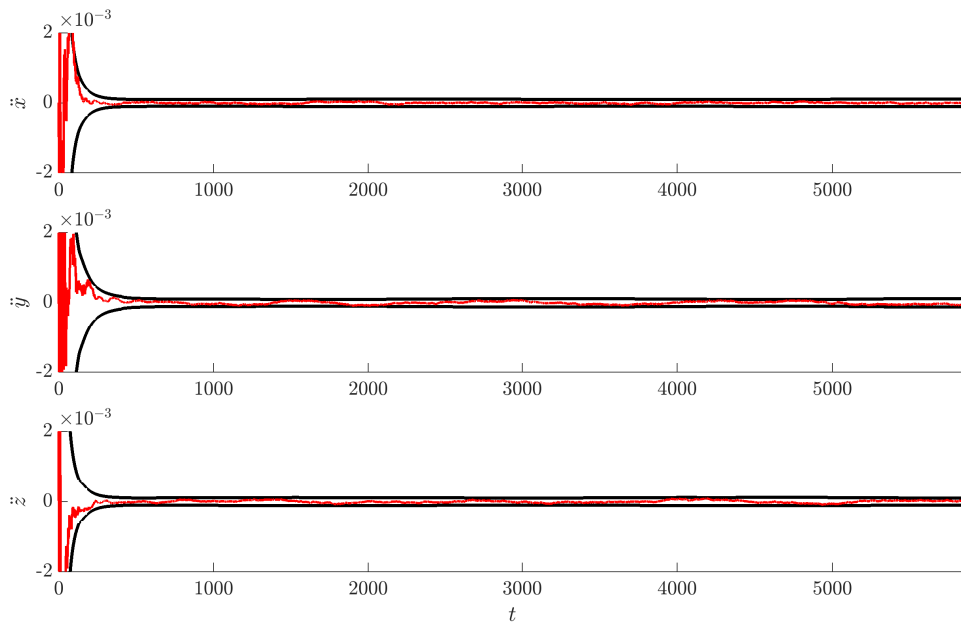


Figura B.22: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, y

$$\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}.$$

B.3. Uso conjunto de los sistemas GPS y GLONASS

En las figuras B.23, B.24, B.25, B.26, B.27 y B.28 se presentan los resultados de los errores medios cuadráticos y los residuos de pseudo-rango y delta-rango para los distintos modelos utilizados; en cada caso con diferentes valores de “sintonía” del filtro, considerando mediciones de ambos sistemas GPS y GLONASS. En cada caso se indica el valor óptimo, tanto en $\sqrt{\epsilon_p^2}$ (error de posición-sesgo) como en $\sqrt{\epsilon_v^2}$ (error de velocidad-deriva). Para complementar, también se indica en la gráfica de residuos el punto correspondiente a dicho óptimo. En las tablas B.3 y B.4 se presentan estos valores óptimos. En la figura B.29, se toma el valor de $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01^2$, y se comparan los errores obtenidos con los cuatro modelos presentados en función del valor de $\sigma_{\tilde{x}}$ (ó σ_j).

Enfoque	Óptimo	$\sigma_{\tilde{b}}$	$\sigma_{\tilde{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_p^2}$	$\sigma_{\tilde{\rho}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	10,00	$5,4912 \times 10^{-1}$	2,9648
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	7,00	$5,4921 \times 10^{-1}$	2,9648
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$5,4730 \times 10^{-1}$	2,9649
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$5,4730 \times 10^{-1}$	2,9649
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-2}$	$5,4615 \times 10^{-1}$	2,9650
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$3,50 \times 10^{-2}$	$5,6279 \times 10^{-1}$	2,9672
Din. II	Pos	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$2,9994 \times 10^{-1}$	2,9785
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$3,0033 \times 10^{-1}$	2,9788
Din. III	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$5,0430 \times 10^{-1}$	2,9683
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$5,0430 \times 10^{-1}$	2,9683
Din. IV	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$2,8767 \times 10^{-1}$	2,9810
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$2,8767 \times 10^{-1}$	2,9810

Tabla B.3: Resultados de comparación de los diferentes modelos, utilizando los sistemas GPS y GLONASS.

En la figura B.30 se presentan, en trazo color rojo, los errores en las soluciones de posición y velocidad con EKF para el caso Cinemático I, tomando los sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 7,0$ (valor óptimo de velocidad). En la misma figura también se presenta, en trazo color azul, los errores en la solución puntual de posición y velocidad; notándose el efecto de filtrado en la solución con EKF frente a la solución puntual. También se presenta, en trazo color negro, el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ . Puede observarse que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

En la figura B.31a se presentan los errores en las soluciones de sesgo y deriva. Además, en la figura B.31b se muestra el resultado de la correlación normalizada (al valor de varianza) de

²Que corresponde al óptimo, o es muy cercano al óptimo en todos los casos

Enfoque	Óptimo	$\sigma_{\dot{b}}$	$\sigma_{\ddot{x}}$ (ó σ_j)	$\sqrt{\epsilon_v^2}$	$\sigma_{\ddot{\rho}}$
Cin. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	10,00	$1,1496 \times 10^{-1}$	$2,7328 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	7,00	$1,1496 \times 10^{-1}$	$2,7328 \times 10^{-1}$
Cin. II	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,5626 \times 10^{-2}$	$2,8962 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,5626 \times 10^{-2}$	$2,8962 \times 10^{-1}$
Din. I	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-2}$	$6,6010 \times 10^{-2}$	$2,8411 \times 10^{-1}$
	Vel	$7,50 \times 10^{-3}$	$3,50 \times 10^{-2}$	$5,5917 \times 10^{-2}$	$2,9183 \times 10^{-1}$
Din. II	Pos	$1,50 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,4256 \times 10^{-2}$	$2,9770 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$7,50 \times 10^{-4}$	$1,3655 \times 10^{-2}$	$2,9858 \times 10^{-1}$
Din. III	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$2,9495 \times 10^{-2}$	$2,9766 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$2,9495 \times 10^{-2}$	$2,9766 \times 10^{-1}$
Din. IV	Pos	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$1,4212 \times 10^{-2}$	$2,9859 \times 10^{-1}$
	Vel	$1,00 \times 10^{-2}$	$2,50 \times 10^{-6}$	$1,4212 \times 10^{-2}$	$2,9859 \times 10^{-1}$

Tabla B.4: Resultados de comparación de los diferentes modelos, utilizando los sistemas GPS y GLONASS.

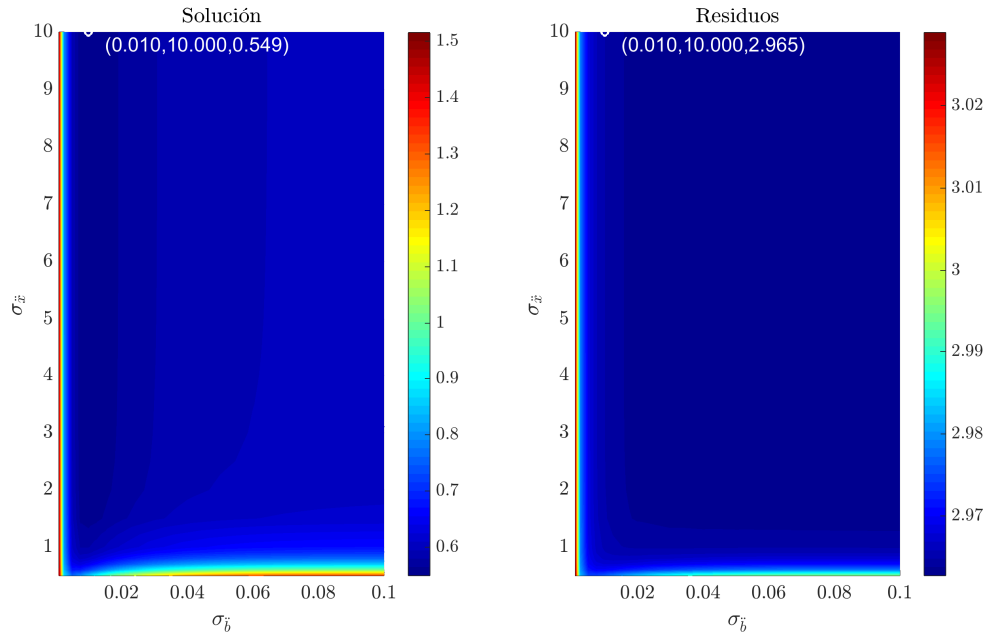
los residuos de post-filtrado. Se observa que los mismos son fuertemente no-correlacionados, lo cual es esperable: si el filtrado es bueno, en los residuos de post-filtrado debe observarse el efecto del ruido.

En las figuras B.32 y B.33 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Cinemático II, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$ (valor óptimo, en el error de velocidad).

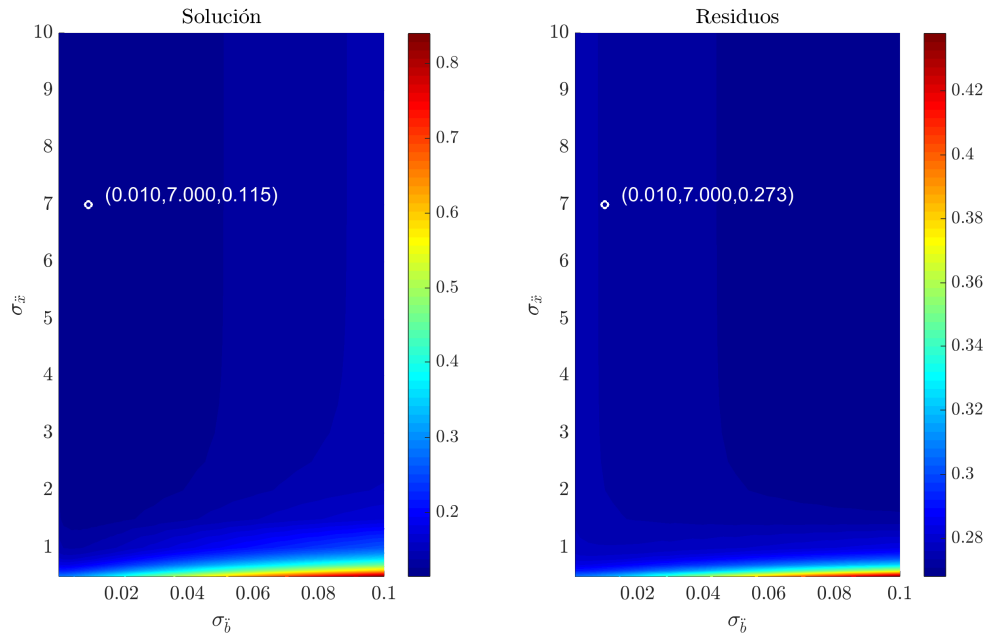
De igual manera, en las figuras B.34 y B.35 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico I, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 3,5 \times 10^{-2}$ (valor óptimo, en el error de velocidad); en las las figuras B.36 y B.37 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico II, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en las figuras B.38 y B.39 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico III, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; y en las figuras B.40 y B.41 se presentan los resultados de error al implementar el modelo Dinámico IV, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. En todos los casos la sintonía seleccionada corresponde al valor óptimo en el error de velocidad.

Puede observarse como se reduce el error al seleccionar diferentes modelos, en concordancia con lo observado en la figura B.7.

Los resultados del análisis son similares a los expuestos en el caso de tomar un único sistema, ya sea GPS (sección 8.3) ó GLONASS (sección B.2).

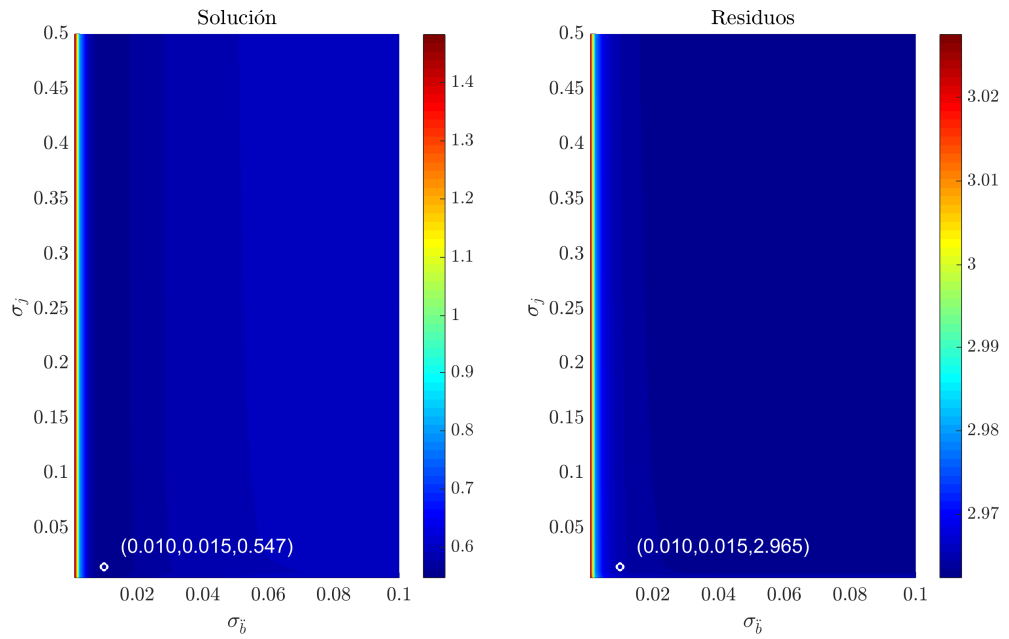


(a) Posición-Sesgo.

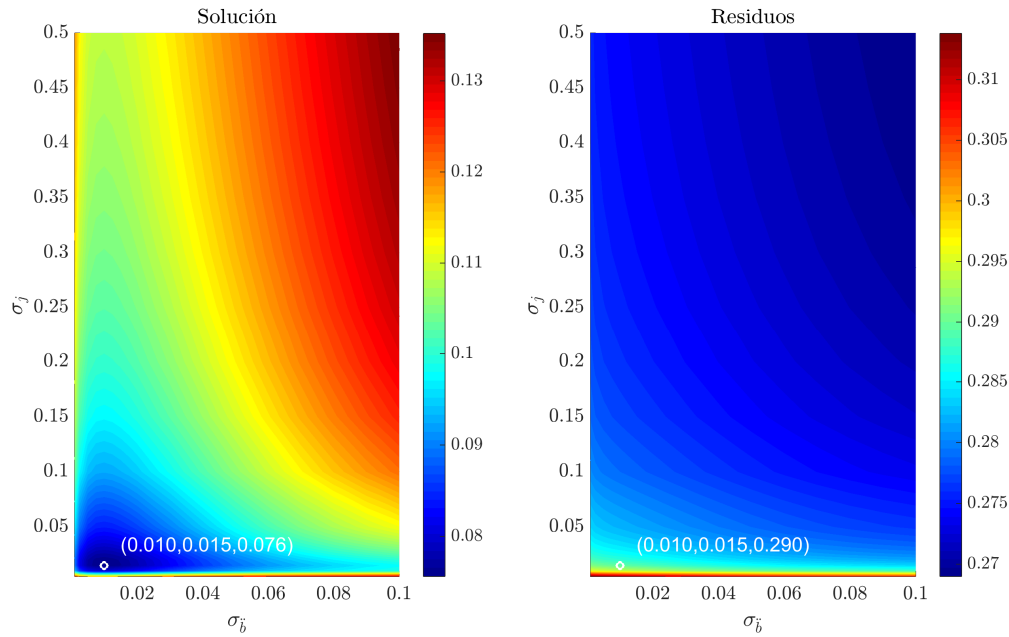


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.23: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS.

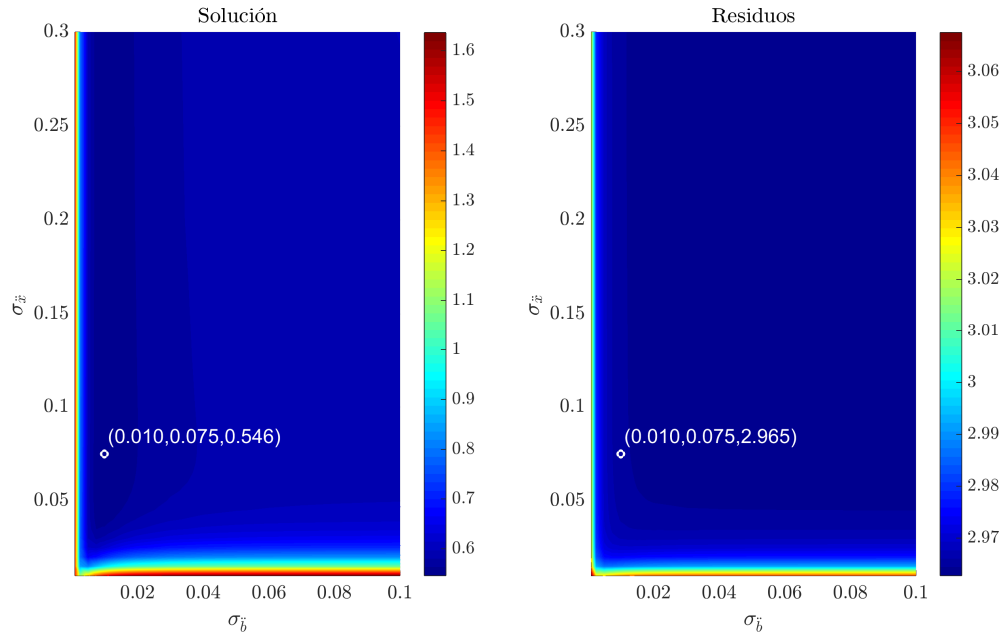


(a) Posición-Sesgo.

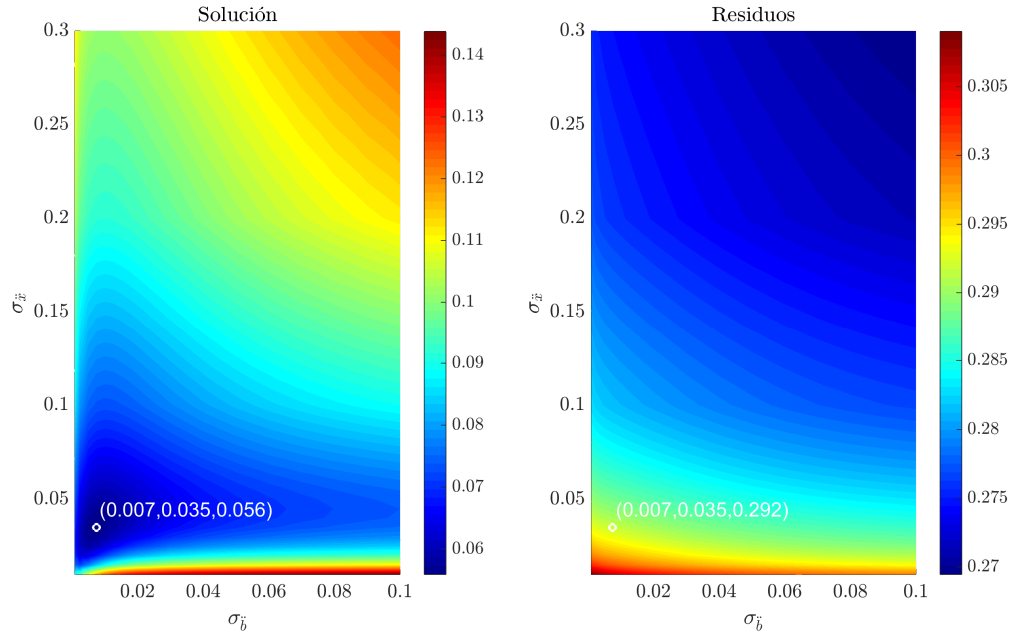


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.24: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS.

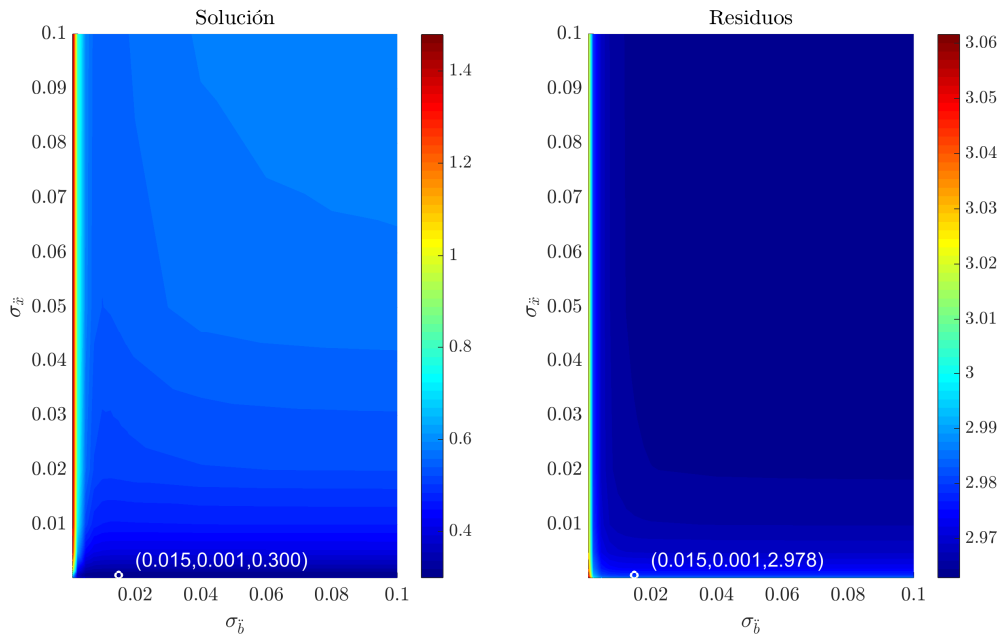


(a) Posición-Sesgo.

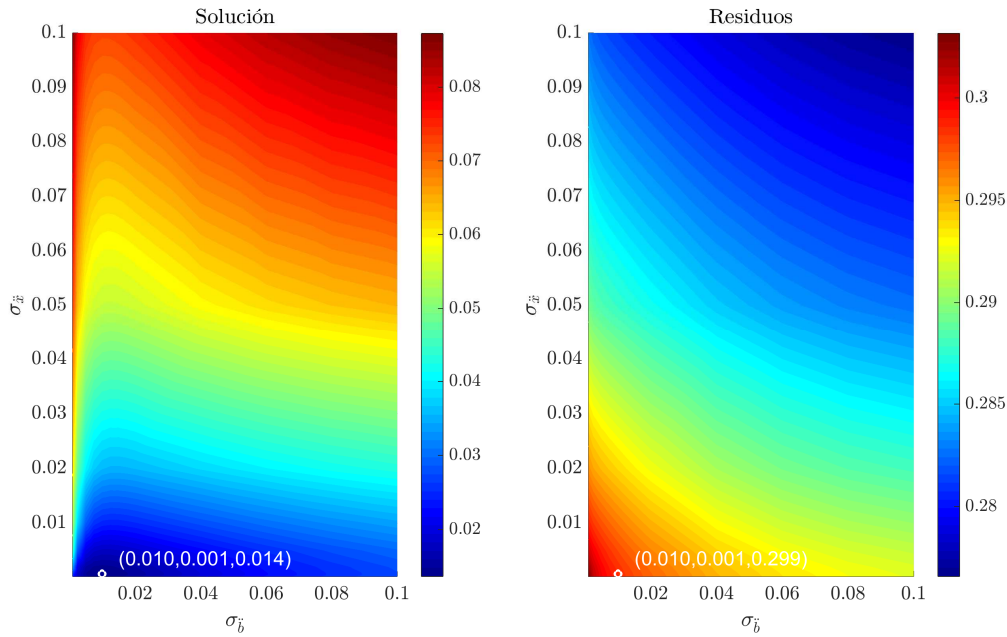


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.25: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS.

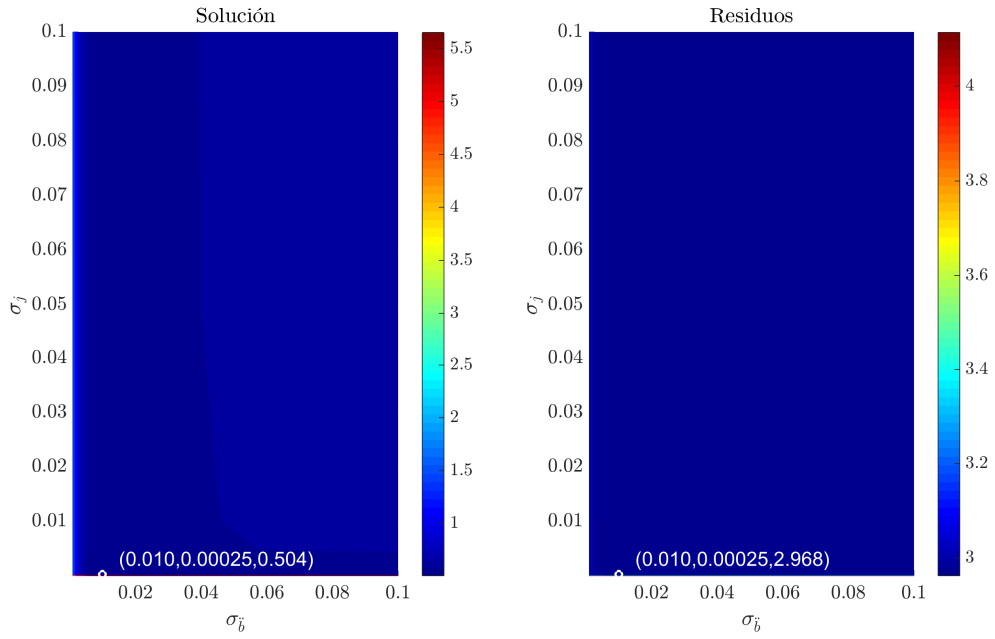


(a) Posición-Sesgo.

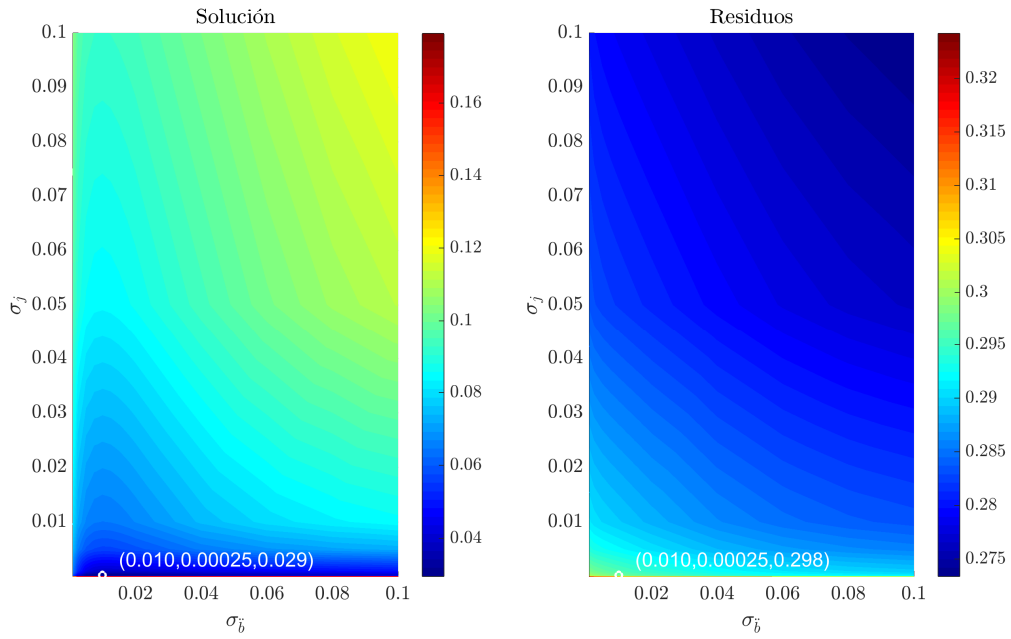


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.26: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS.

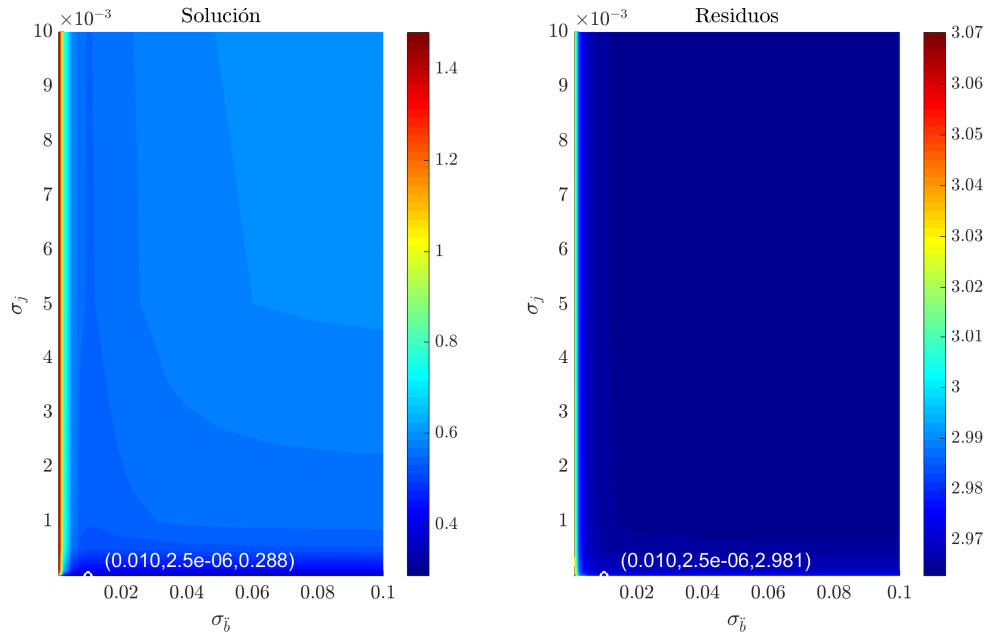


(a) Posición-Sesgo.

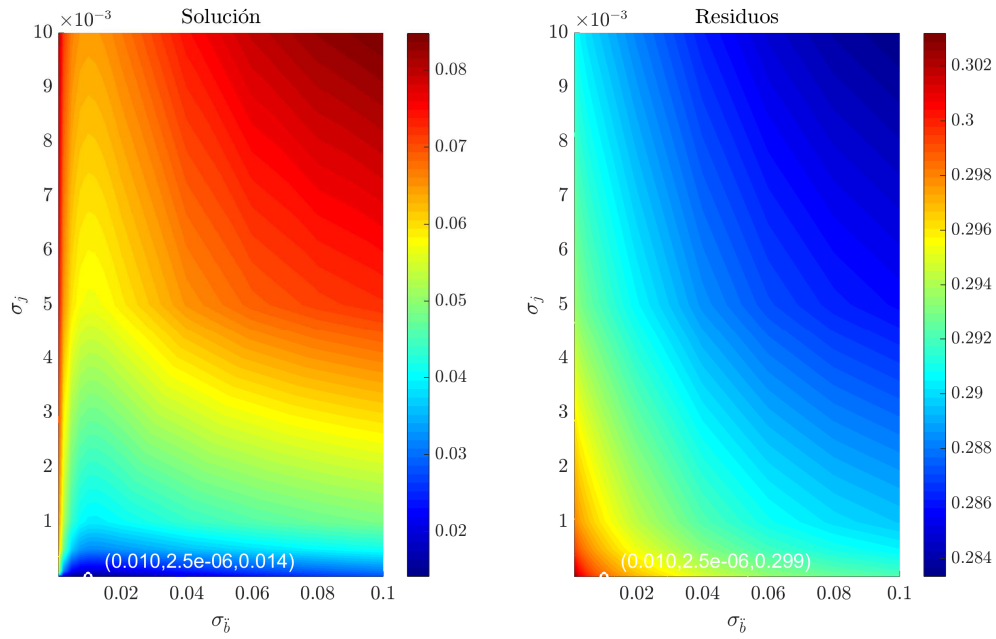


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.27: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS.

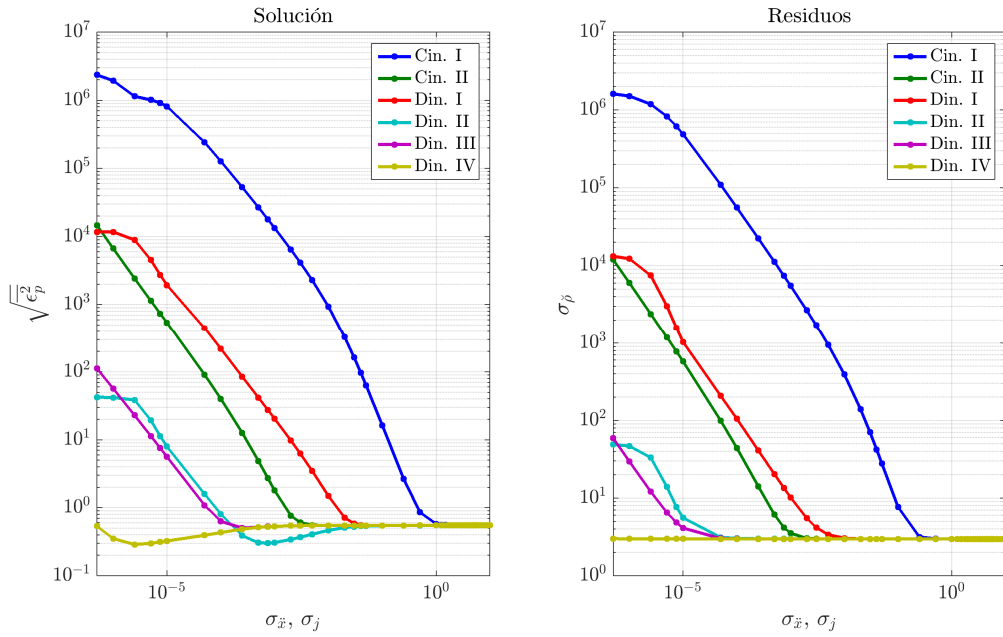


(a) Posición-Sesgo.

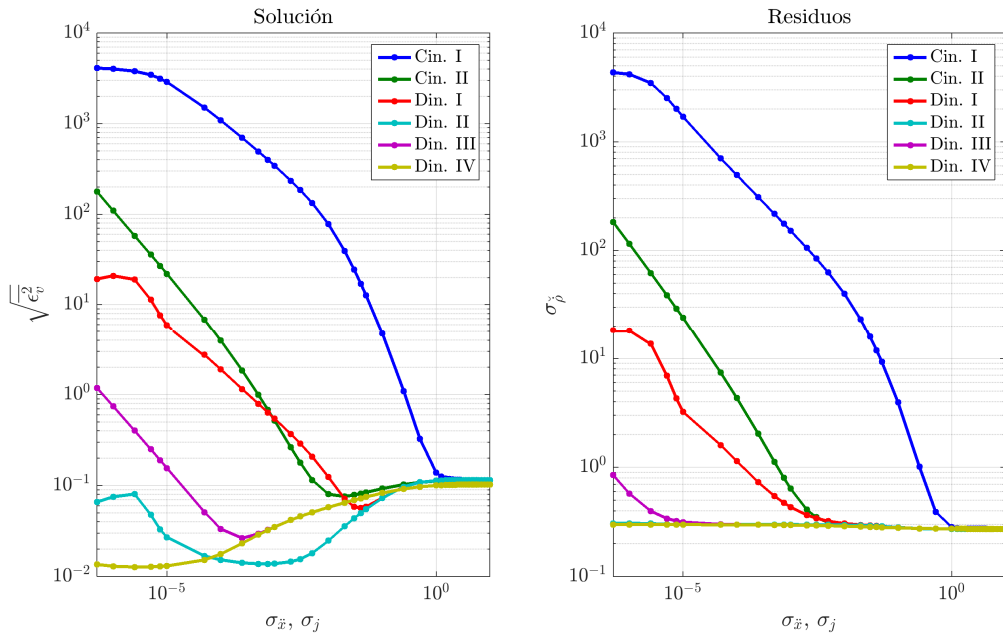


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.28: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de los elementos de \mathbf{Q} para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS.

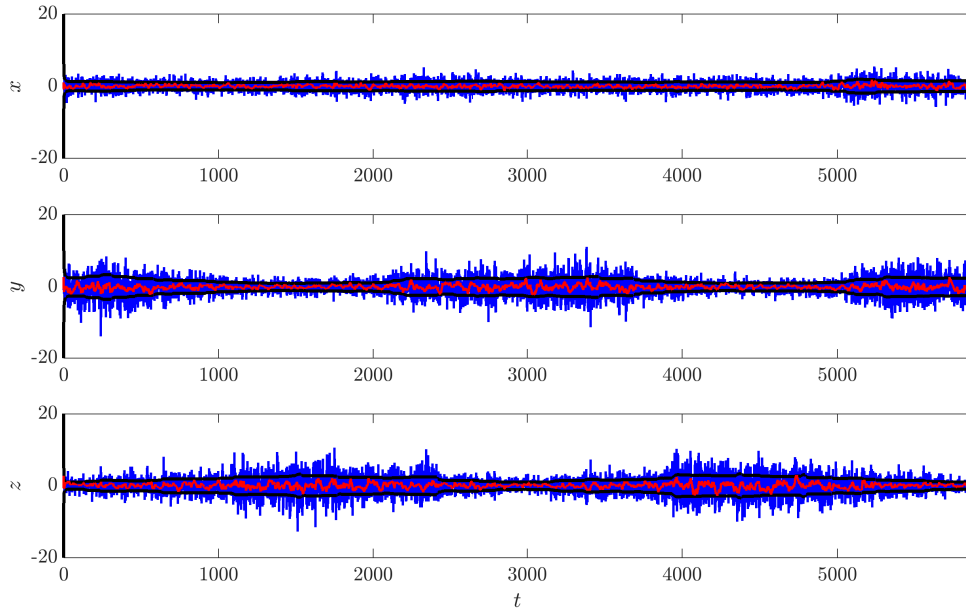


(a) Posición-Sesgo.

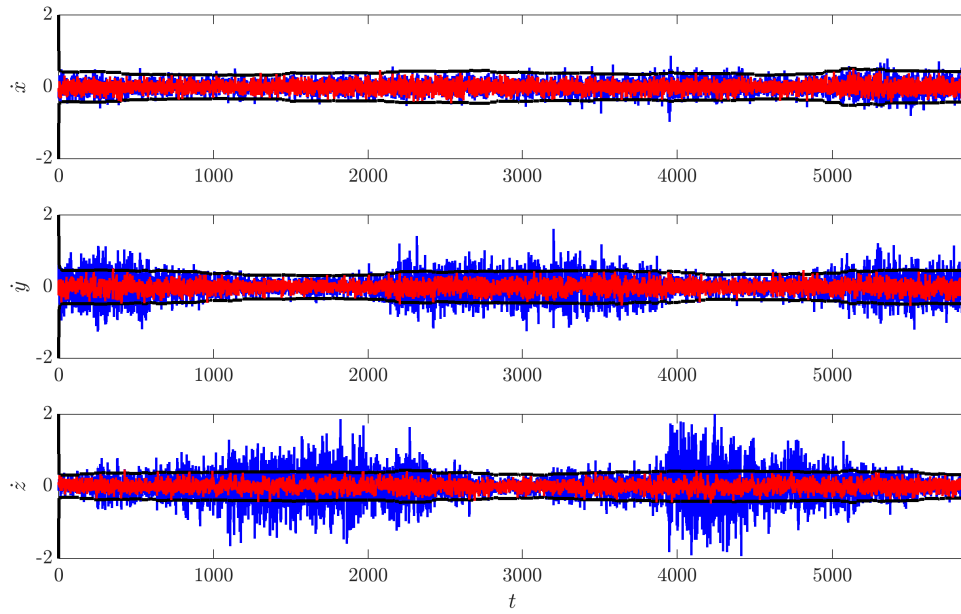


(b) Velocidad-Deriva.

Figura B.29: Error medio cuadrático en las soluciones de posición-sesgo y velocidad-deriva, y residuos respectivos de pseudo-rango y delta-rango post-filtrado; en función de $\sigma_{\hat{x}}$ (o σ_j) para los seis modelos considerados, sistemas GPS y GLONASS. En todos los casos se toma $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$.

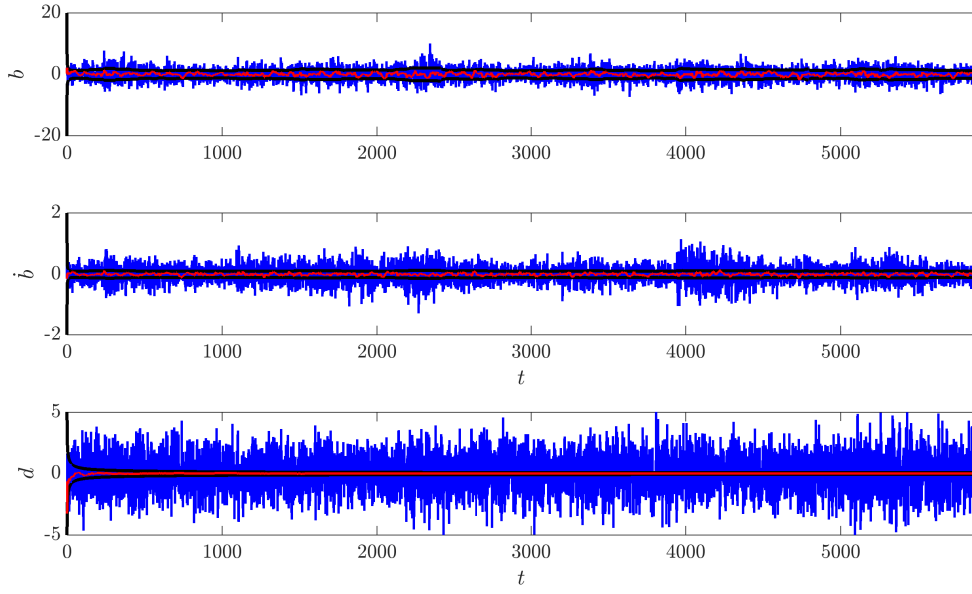


(a) Posición.

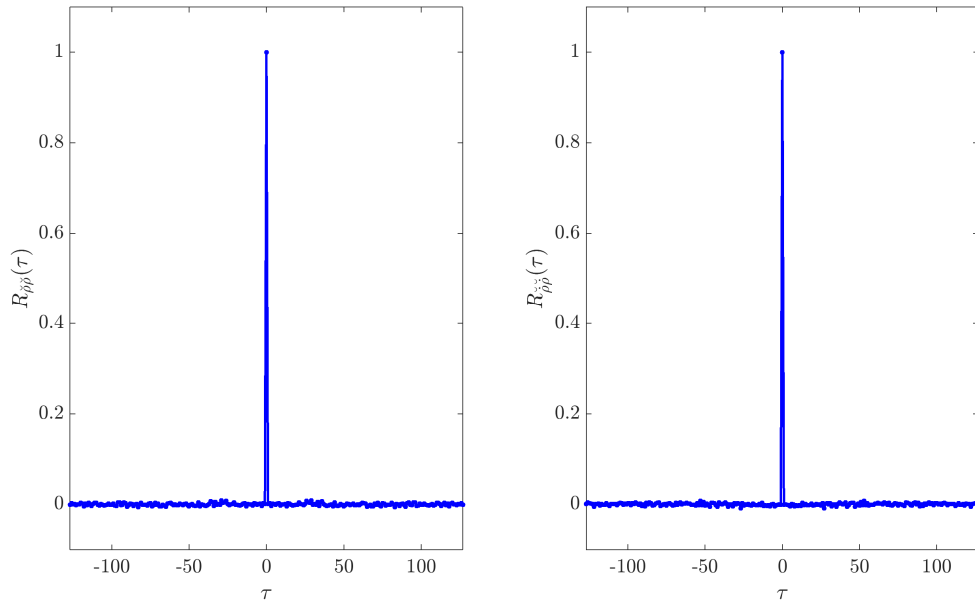


(b) Velocidad.

Figura B.30: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$.

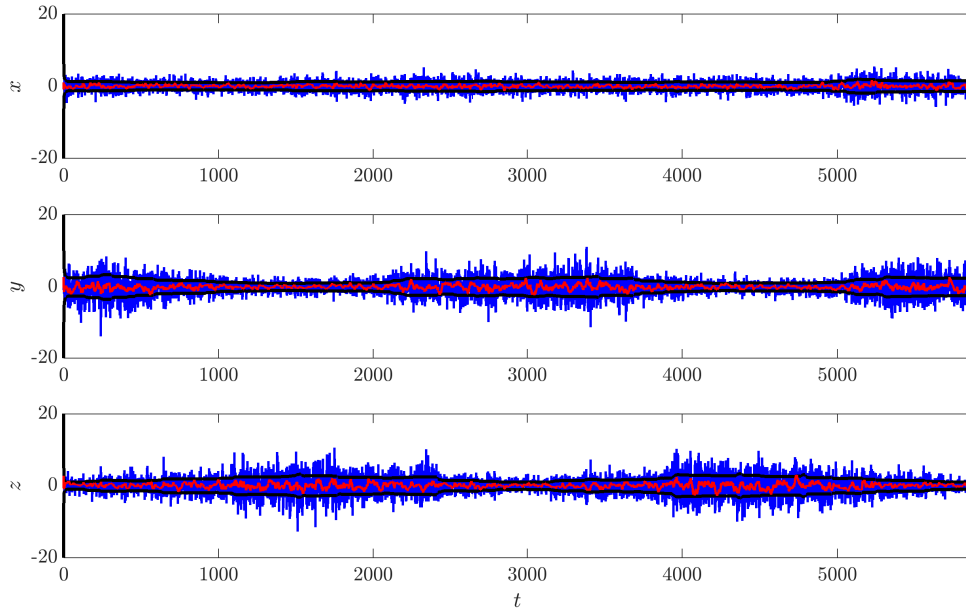


(a) Sesgo-Deriva.

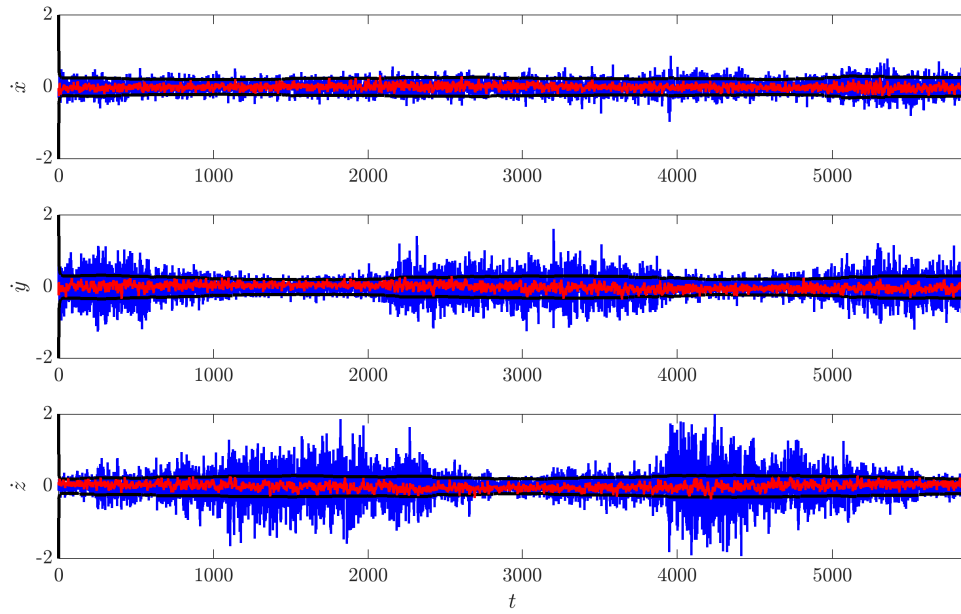


(b) Correlación normalizada.

Figura B.31: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,0$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

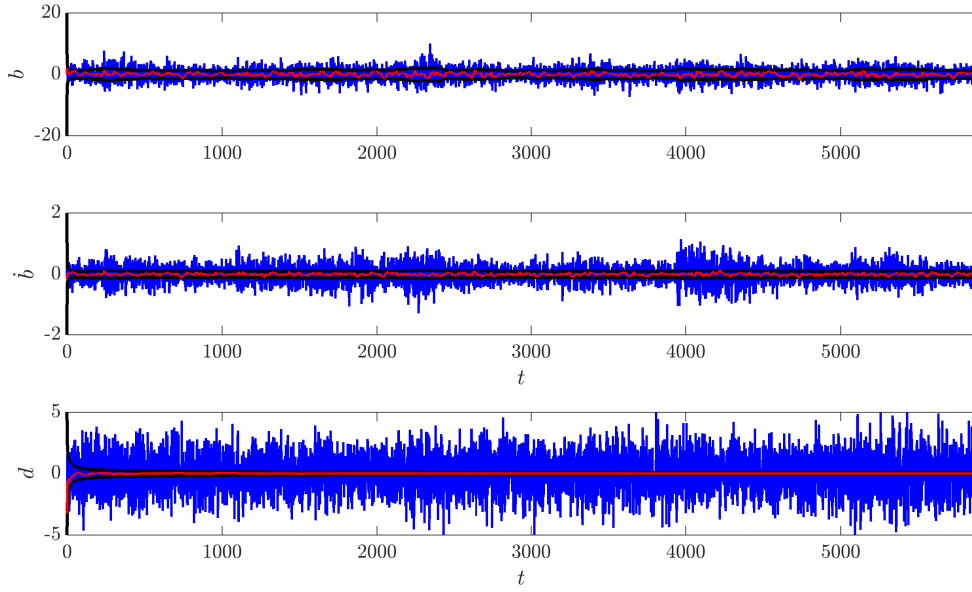


(a) Posición.

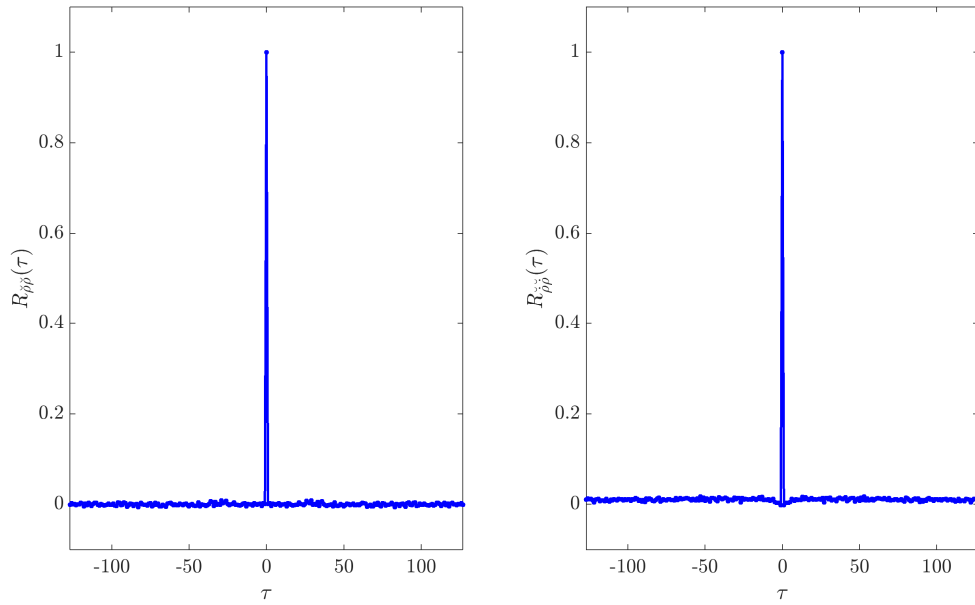


(b) Velocidad.

Figura B.32: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$.

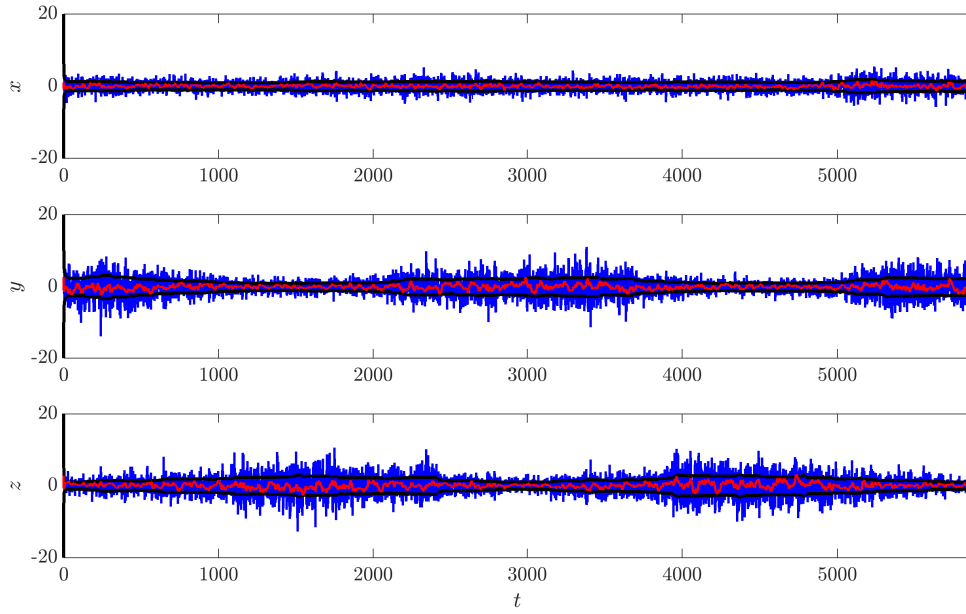


(a) Sesgo-Deriva.

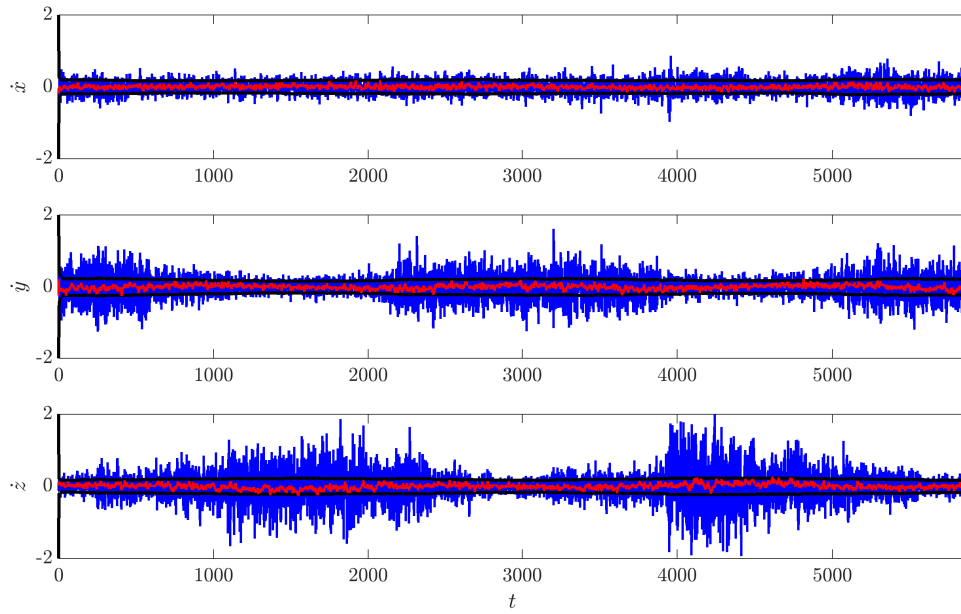


(b) Correlación normalizada.

Figura B.33: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el caso Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}$. Se compara con la solución puntual (sesgo y deriva).

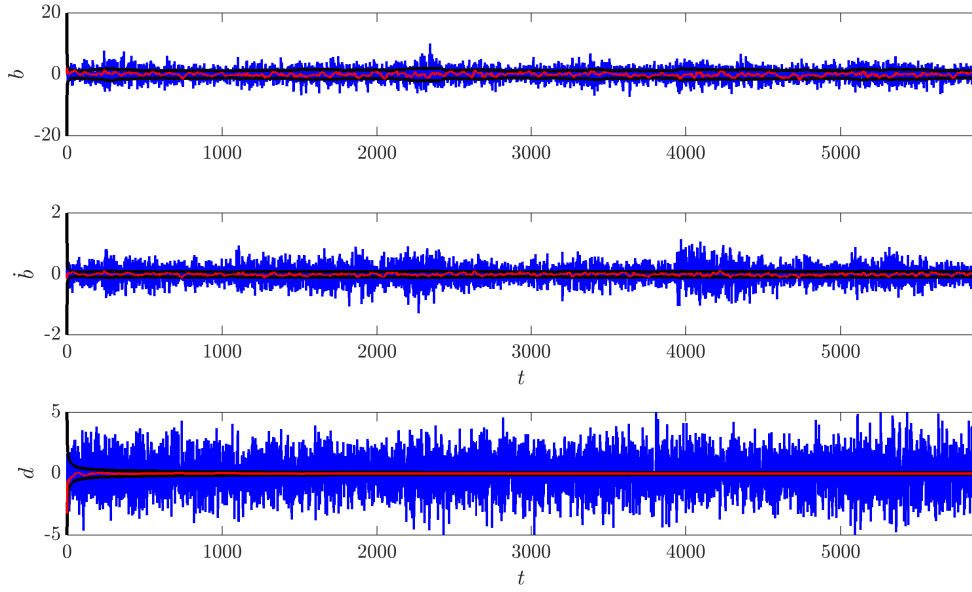


(a) Posición.

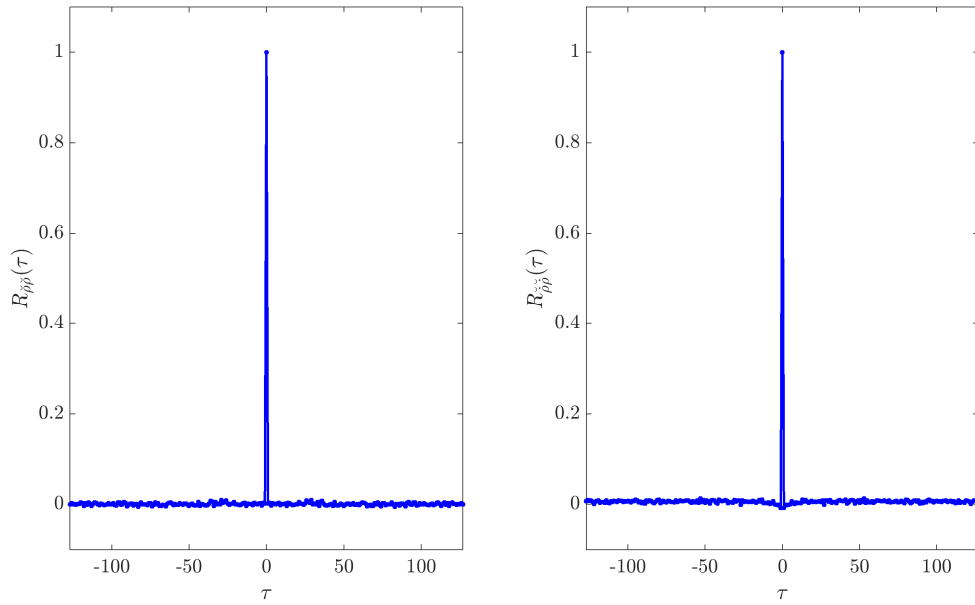


(b) Velocidad.

Figura B.34: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (---); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 3,5 \times 10^{-2}$.

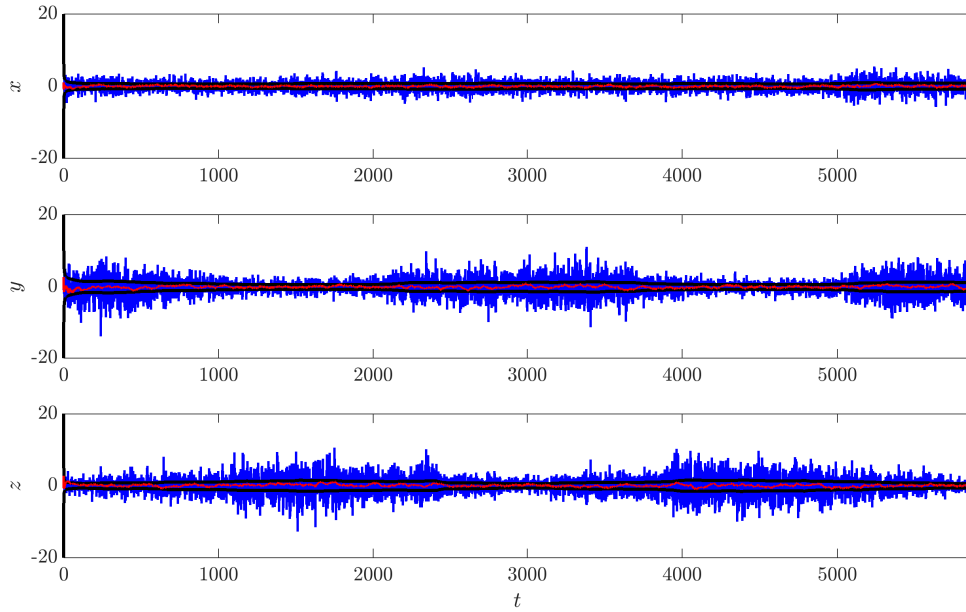


(a) Sesgo-Deriva.

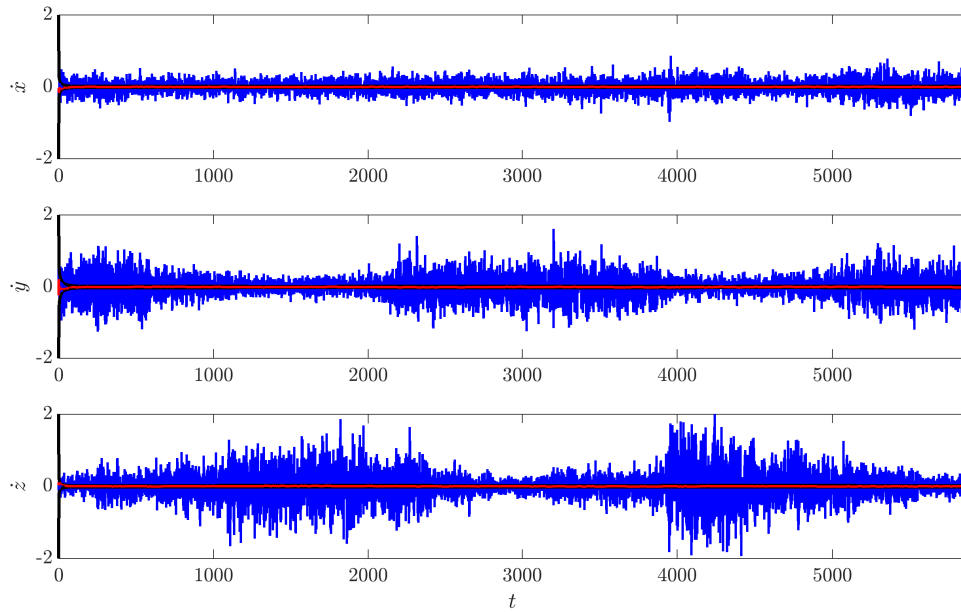


(b) Correlación normalizada.

Figura B.35: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 7,5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 3,5 \times 10^{-2}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

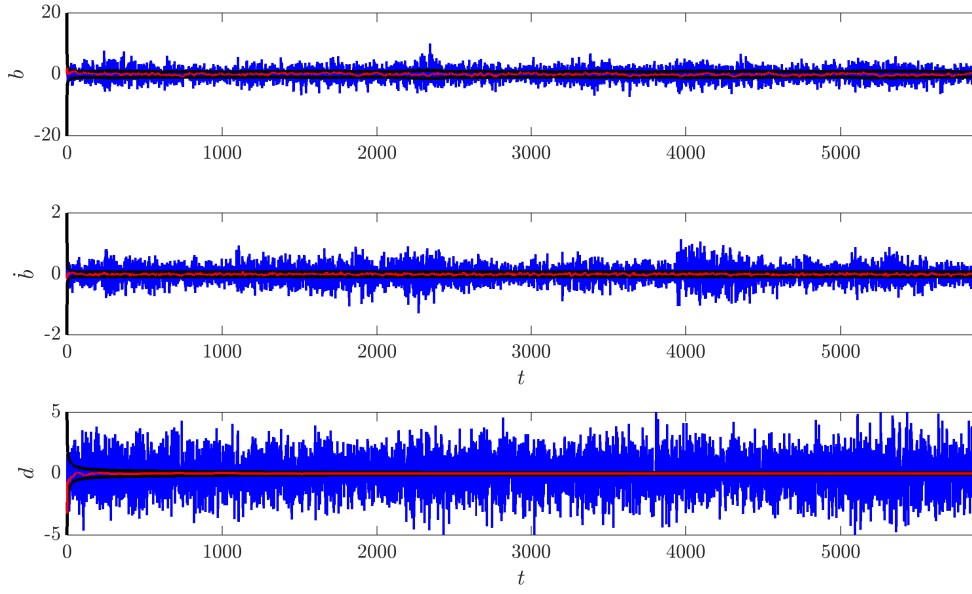


(a) Posición.

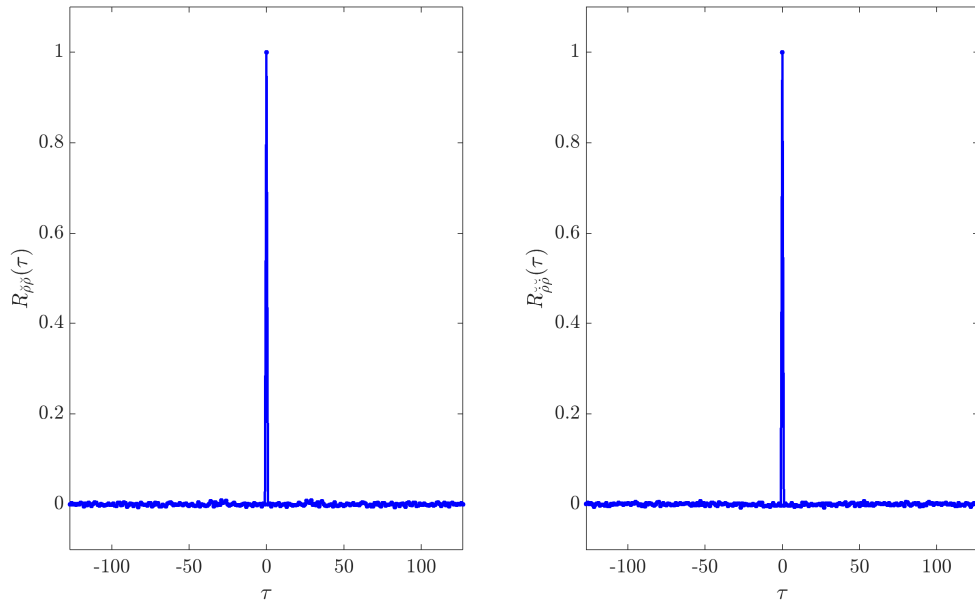


(b) Velocidad.

Figura B.36: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$.

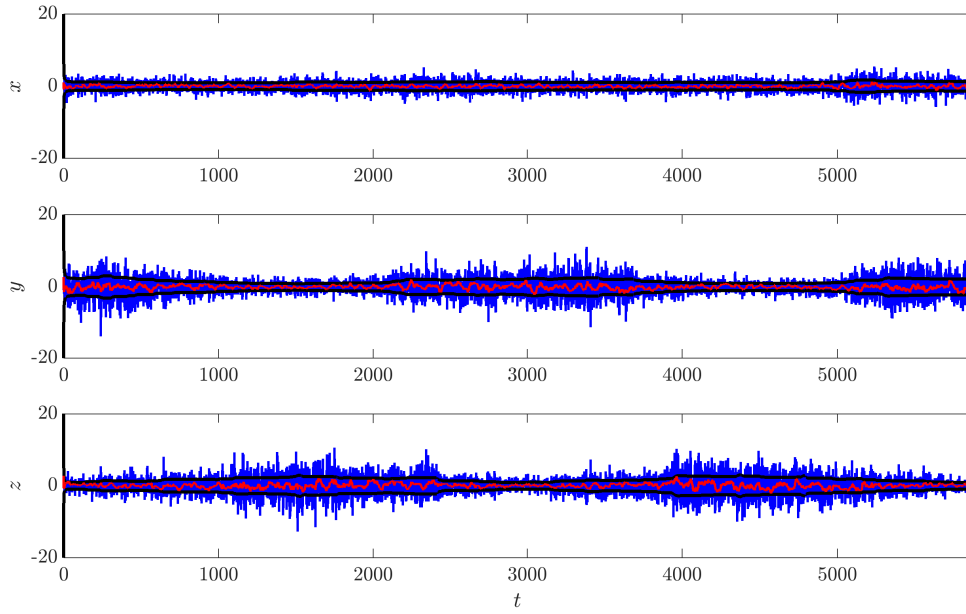


(a) Sesgo-Deriva.

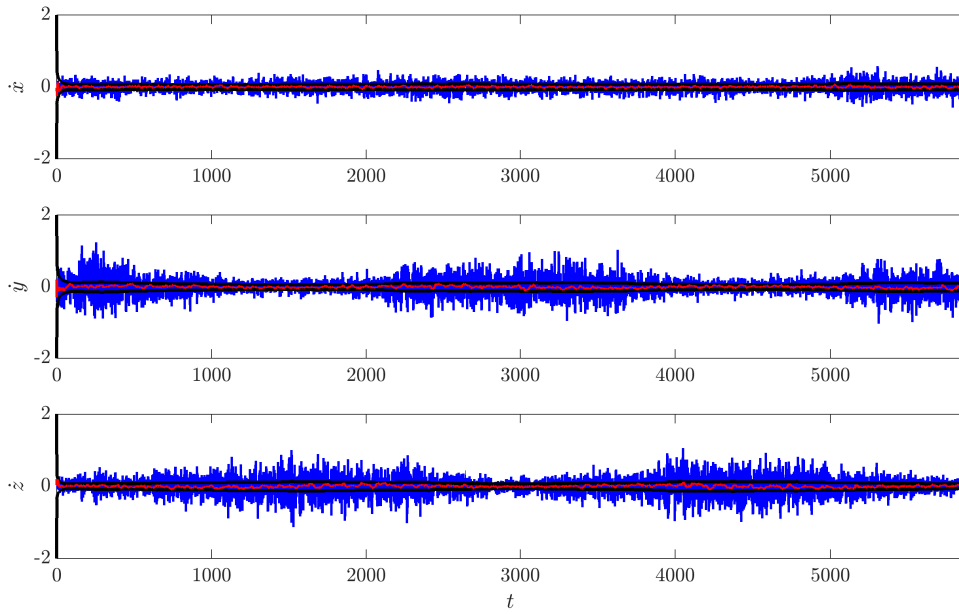


(b) Correlación normalizada.

Figura B.37: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

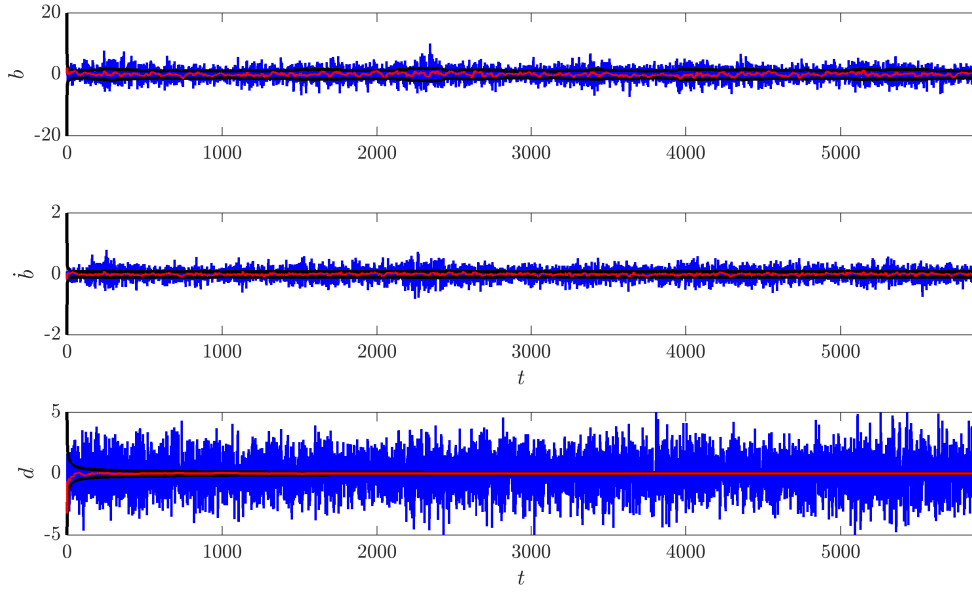


(a) Posición.

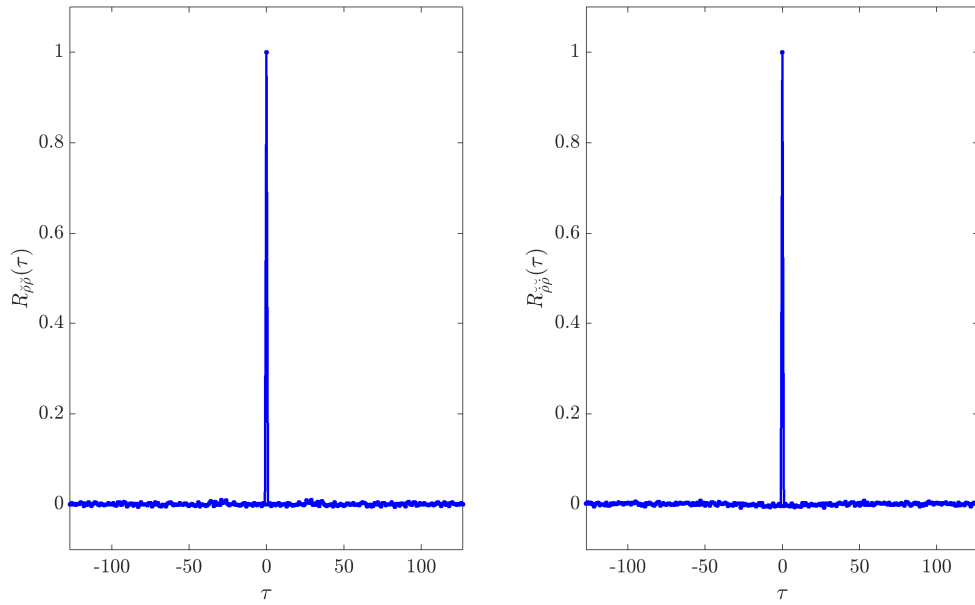


(b) Velocidad.

Figura B.38: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$.

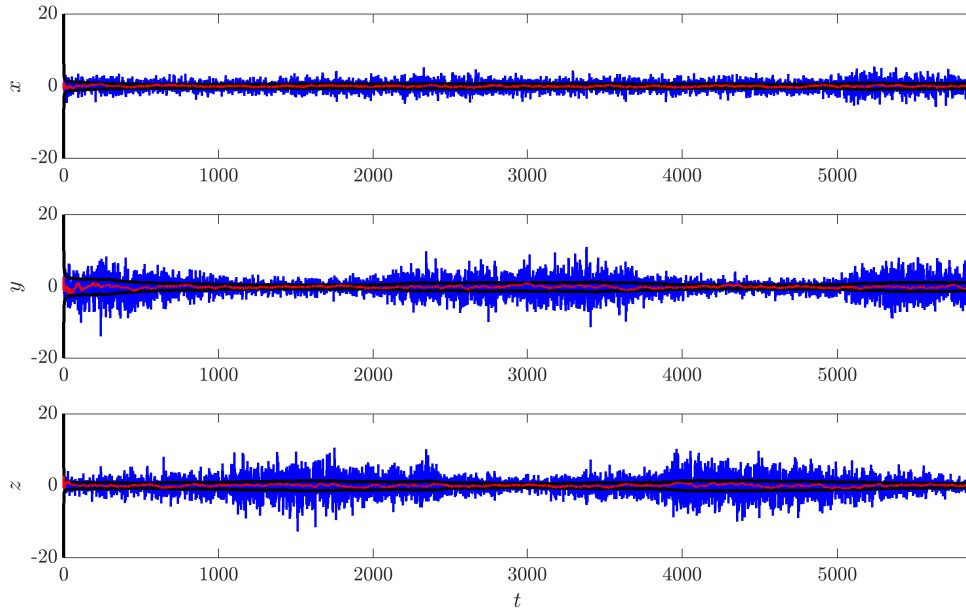


(a) Sesgo-Deriva.

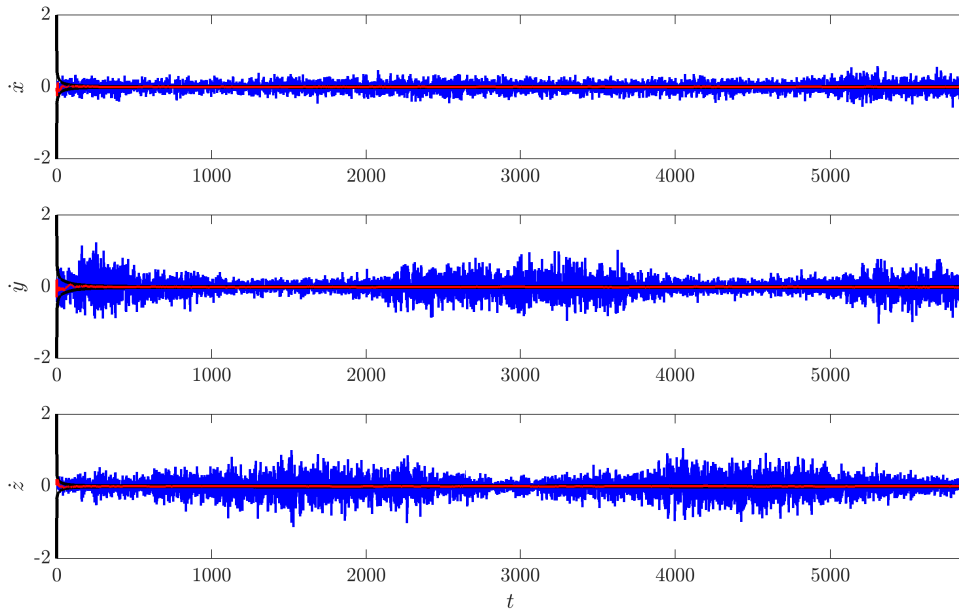


(b) Correlación normalizada.

Figura B.39: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

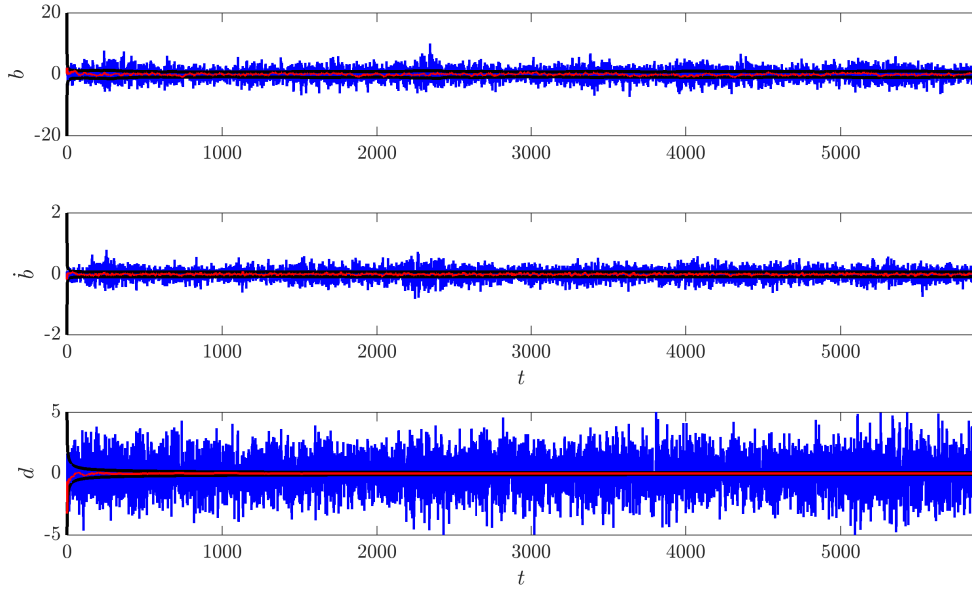


(a) Posición.

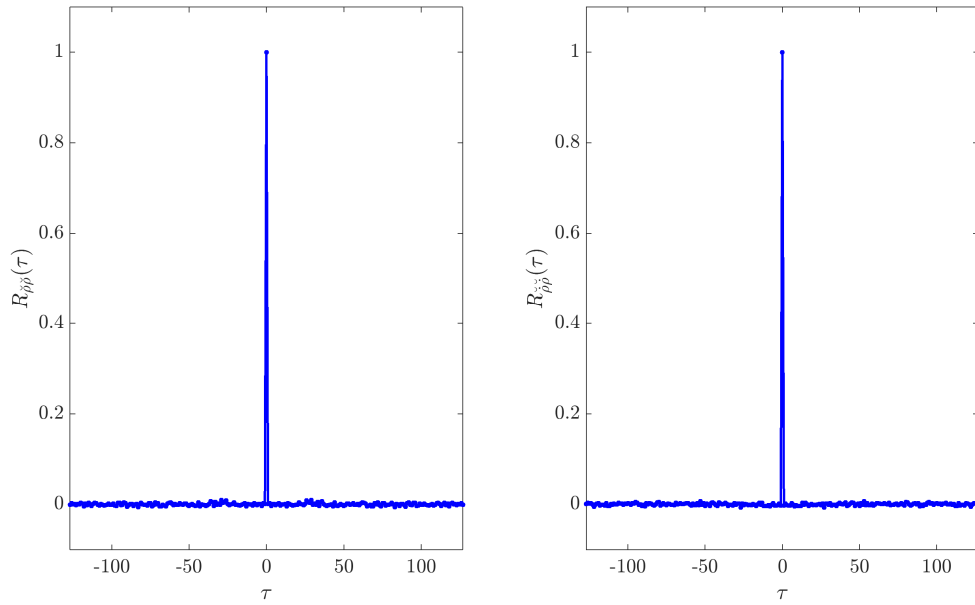


(b) Velocidad.

Figura B.40: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$.



(a) Sesgo-Deriva.



(b) Correlación normalizada.

Figura B.41: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$. Se presentan también las correlaciones de los residuos de post-filtrado para este caso.

Finalmente, en las figuras, B.42, B.43 y B.44 se presentan en trazo color rojo los errores obtenidos en la solución de aceleración (no hay solución puntual de aceleración contra la cual comparar) con los modelos Cinemático II, Dinámico III y Dinámico IV, respectivamente, seleccionando en cada caso el valor de sintonía que corresponde al óptimo error de velocidad. Al igual que en las gráficas anteriores, también se presenta en trazo color negro el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación, dado en cada caso por el elemento correspondiente de la matriz \mathbf{P}_k^+ , observándose que en general el error en la solución con EKF se mantiene dentro de los límites establecidos por este intervalo.

En la comparación de estas gráficas se debe tener en cuenta que corresponden al error de estimación de tres aceleraciones diferentes: en el modelo Cinemático II corresponde a la estimación de toda la aceleración presente, en el modelo Dinámico III corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria dada por una Tierra con distribución de masa uniforme, mientras que en el modelo Dinámico IV corresponde a la estimación de la aceleración no modelada al considerar un modelo de atracción gravitatoria que incorpora el efecto del término J_2 .

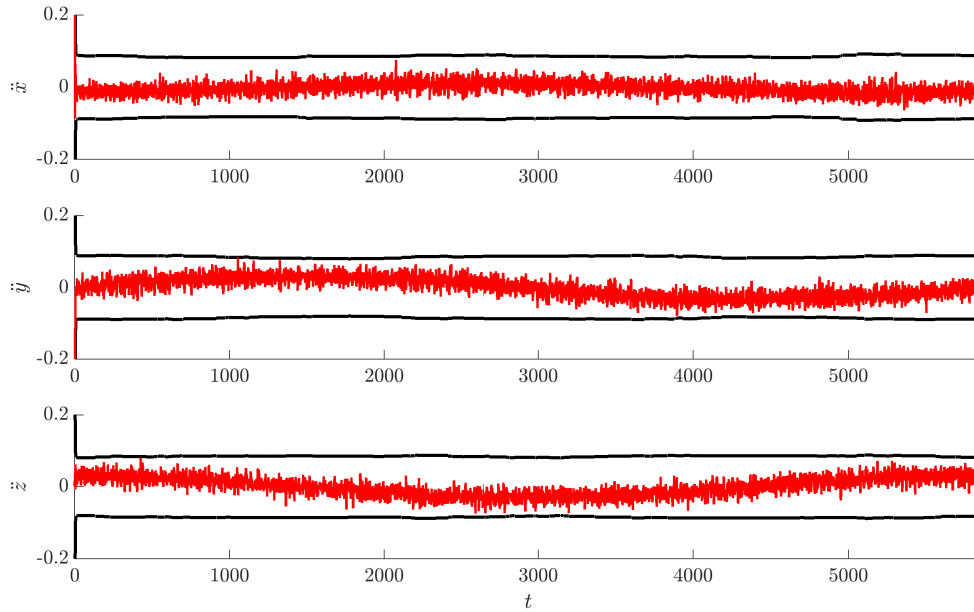


Figura B.42: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$,

$$\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 1,5 \times 10^{-2}.$$

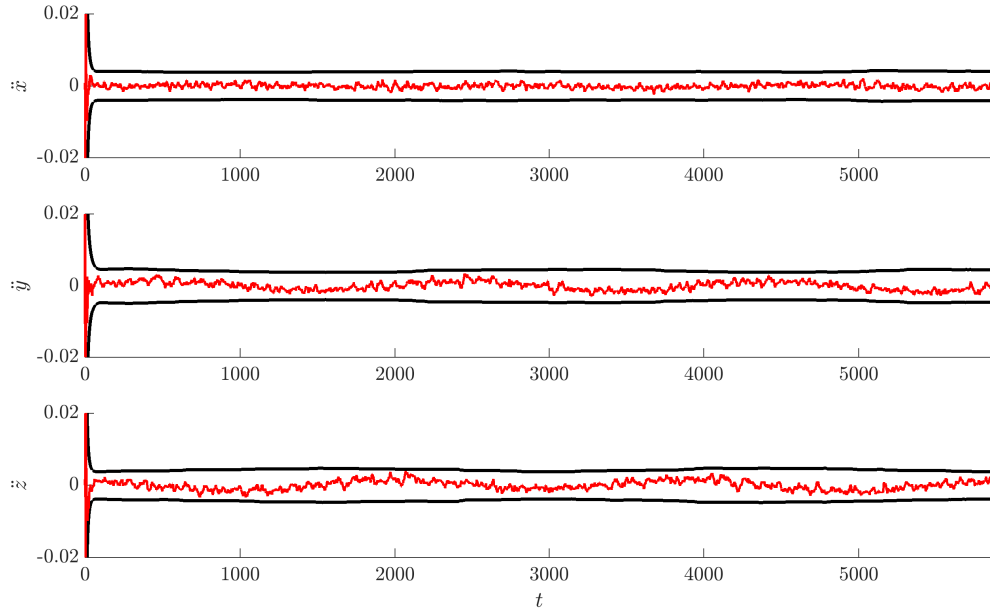


Figura B.43: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$.

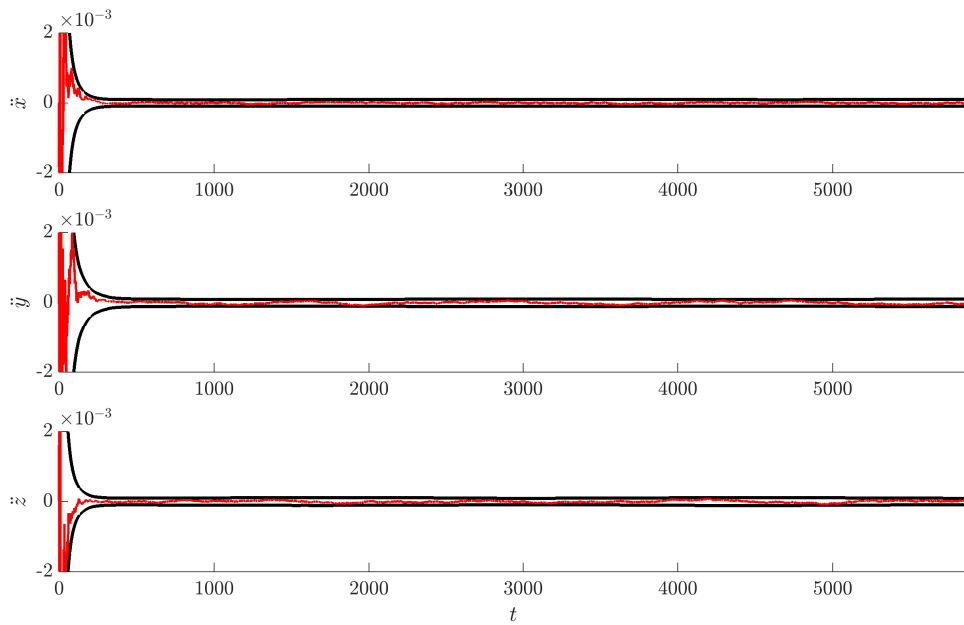


Figura B.44: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, y $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$.

APÉNDICE C

COMPARACIÓN DE ESTRATEGIAS DE FILTRADO CON GLONASS Y GPS-GLONASS

Este Apéndice complementa el análisis realizado en la sección 8.4 de comparación del desempeño del EKF contra el PKF, en el caso de utilizar los demás modelos propuestos.

Los resultados obtenidos al utilizar el modelo Cinemático II se presentan en las figuras C.1, C.2, C.3 y C.4 (mediciones de GPS); C.5, C.6, C.7 y C.8 (mediciones de GLONASS); C.9, C.10, C.11 y C.12 (mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS).

Los resultados obtenidos al utilizar el modelo Dinámico I se presentan en las figuras C.13, C.14, C.15 y C.16 (mediciones de GPS); C.17, C.18, C.19 y C.20 (mediciones de GLONASS); C.21, C.22, C.23 y C.24 (mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS).

Los resultados obtenidos al utilizar el modelo Dinámico II se presentan en las figuras C.25, C.26, C.27 y C.28 (mediciones de GPS); C.29, C.30, C.31 y C.32 (mediciones de GLONASS); C.33, C.34, C.35 y C.36 (mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS).

Los resultados obtenidos al utilizar el modelo Dinámico III se presentan en las figuras C.37, C.38, C.39 y C.40 (mediciones de GPS); C.41, C.42, C.43 y C.44 (mediciones de GLONASS); C.45, C.46, C.47 y C.48 (mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS).

Finalmente, los resultados obtenidos al utilizar el modelo Dinámico IV se presentan en las figuras C.49, C.50, C.51 y C.52 (mediciones de GPS); C.53, C.54, C.55 y C.56 (mediciones de GLONASS); C.57, C.58, C.59 y C.60 (mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS).

En todos los casos se verifica que el desempeño de ambos esquemas de filtrado es similar, complementando el análisis presentado en 8.4.

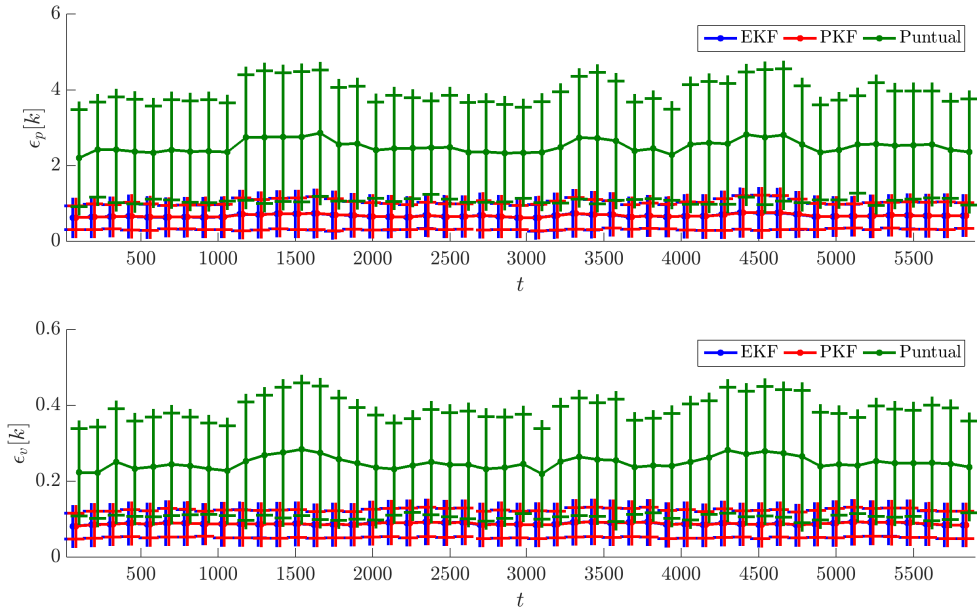


Figura C.1: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

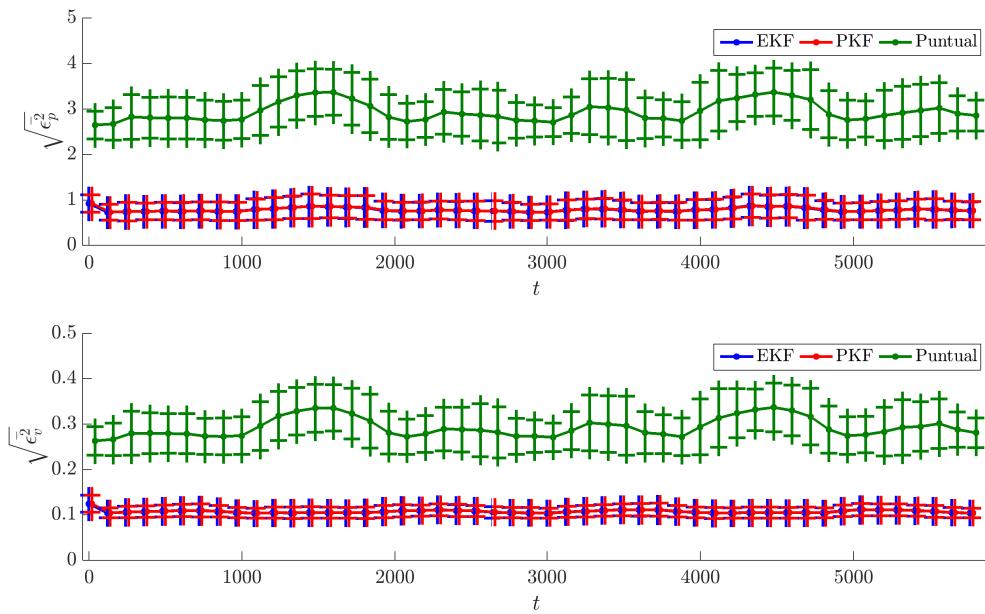


Figura C.2: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

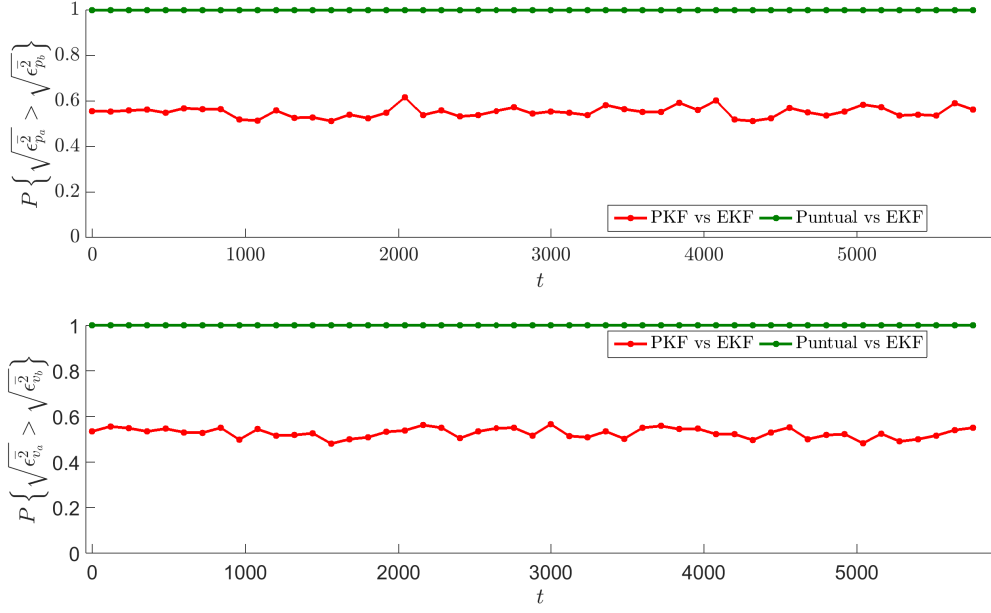


Figura C.3: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

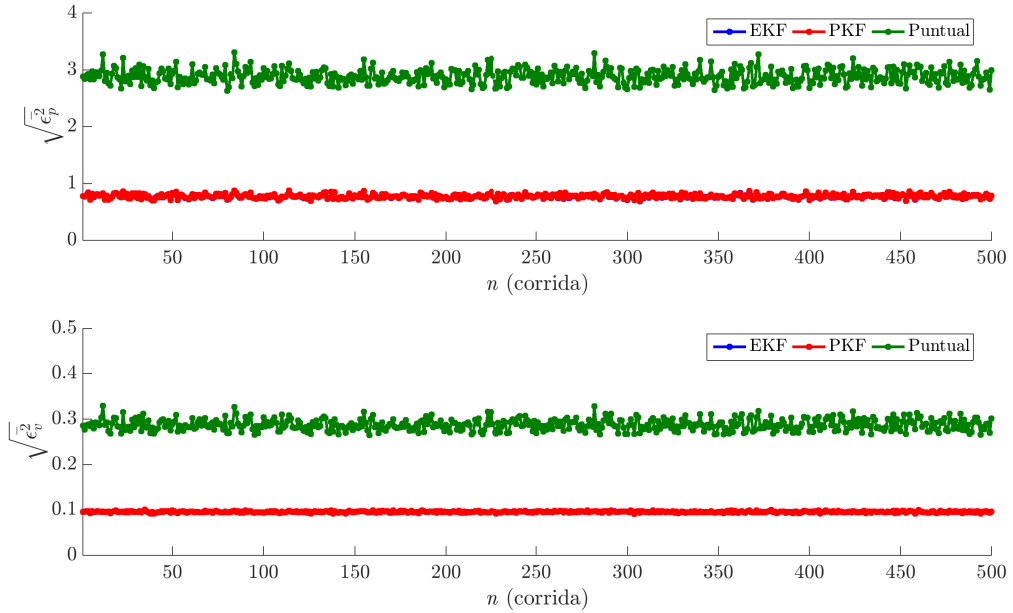


Figura C.4: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

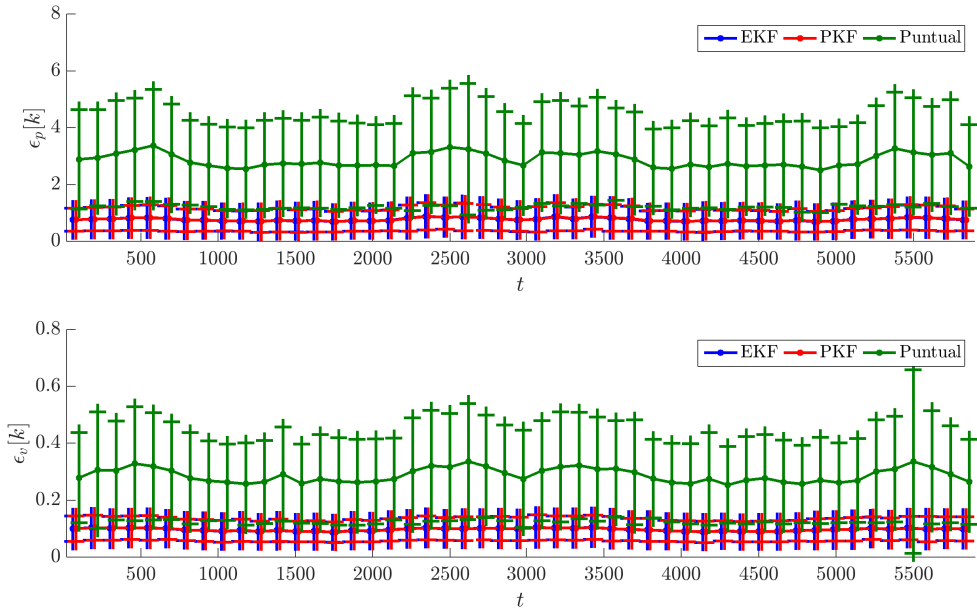


Figura C.5: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

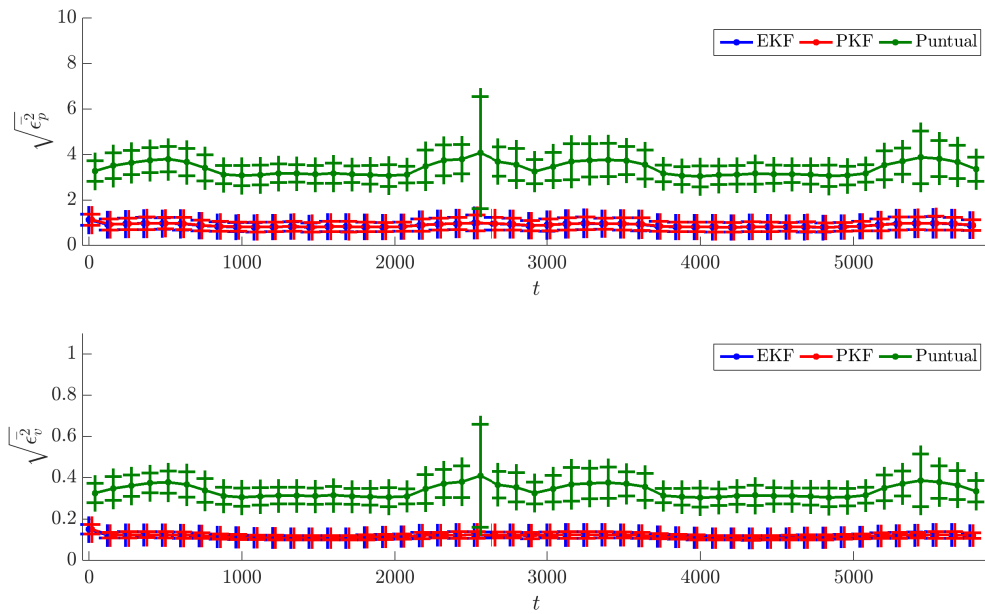


Figura C.6: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

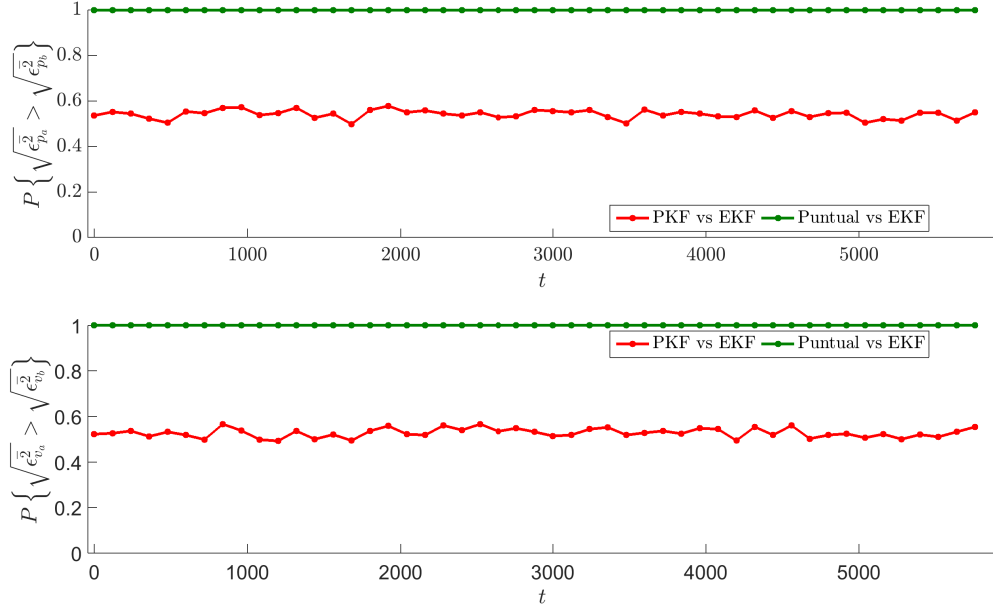


Figura C.7: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

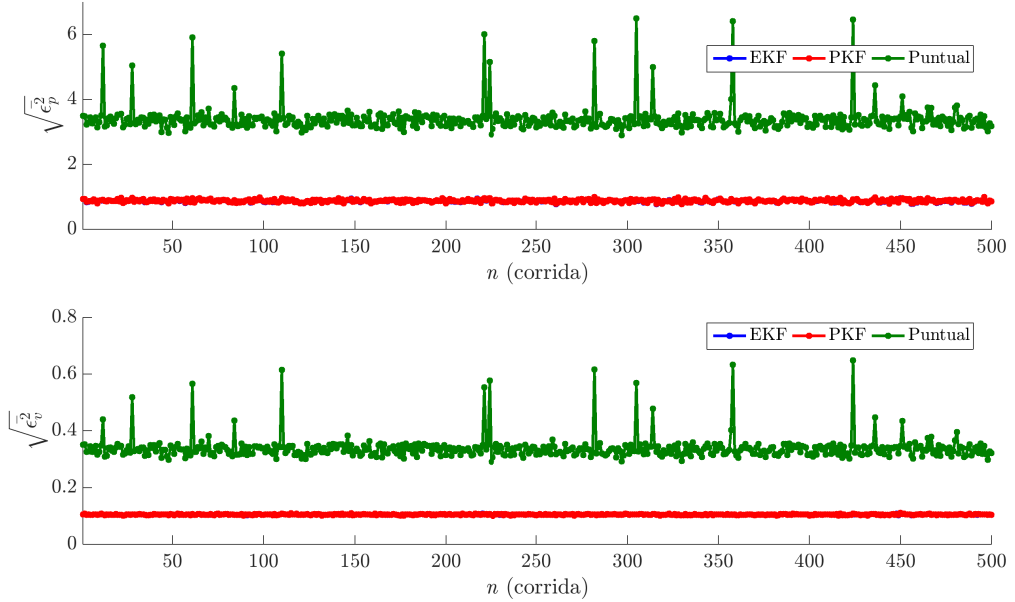


Figura C.8: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.



Figura C.9: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

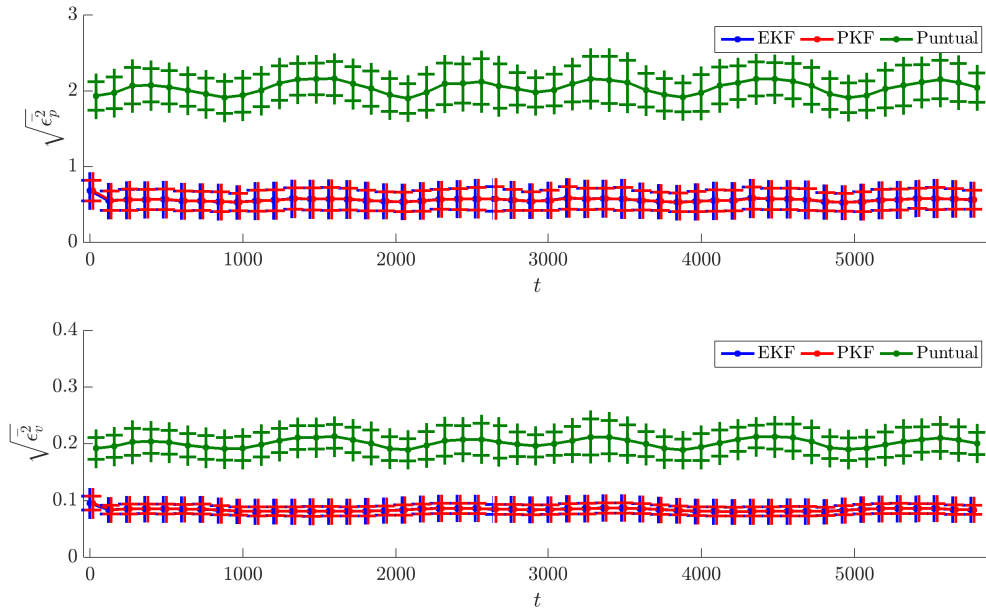


Figura C.10: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

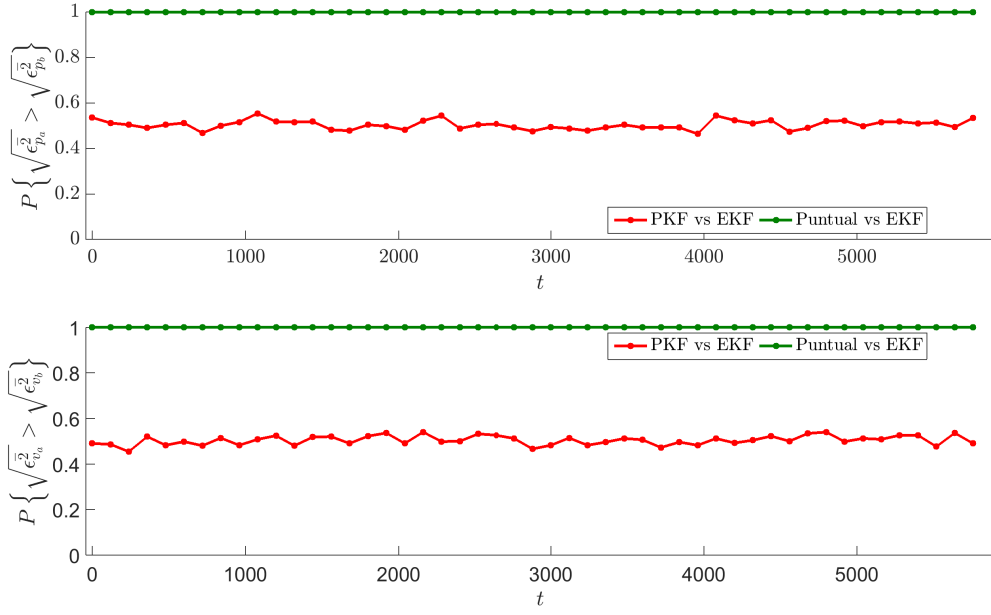


Figura C.11: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

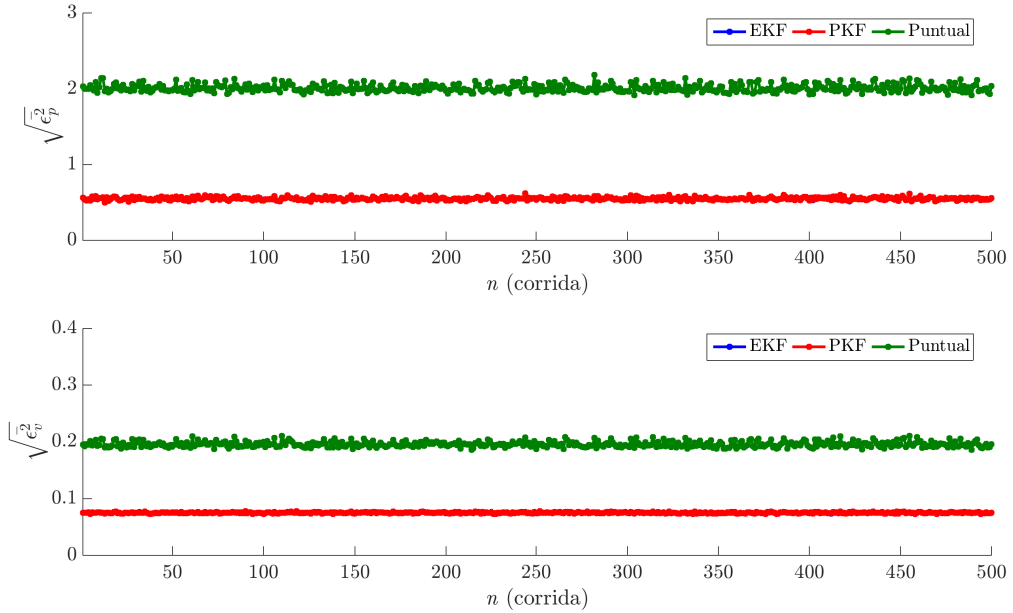


Figura C.12: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Cinemático II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

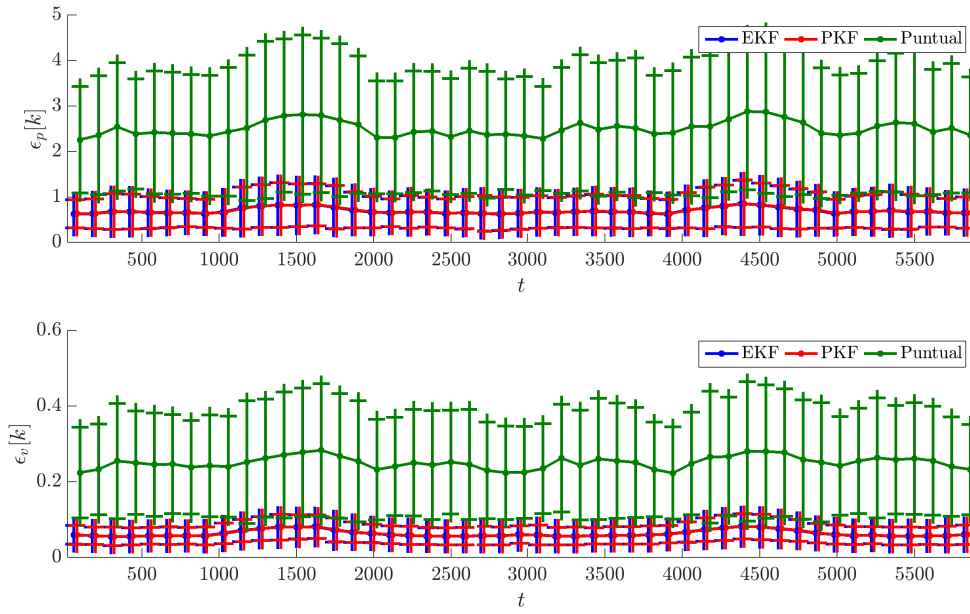


Figura C.13: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

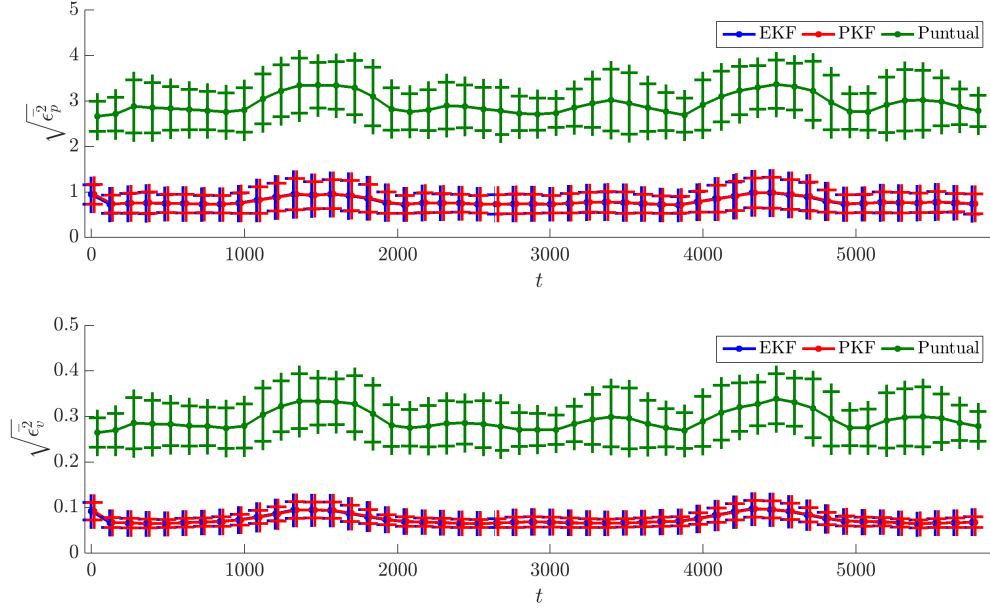


Figura C.14: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

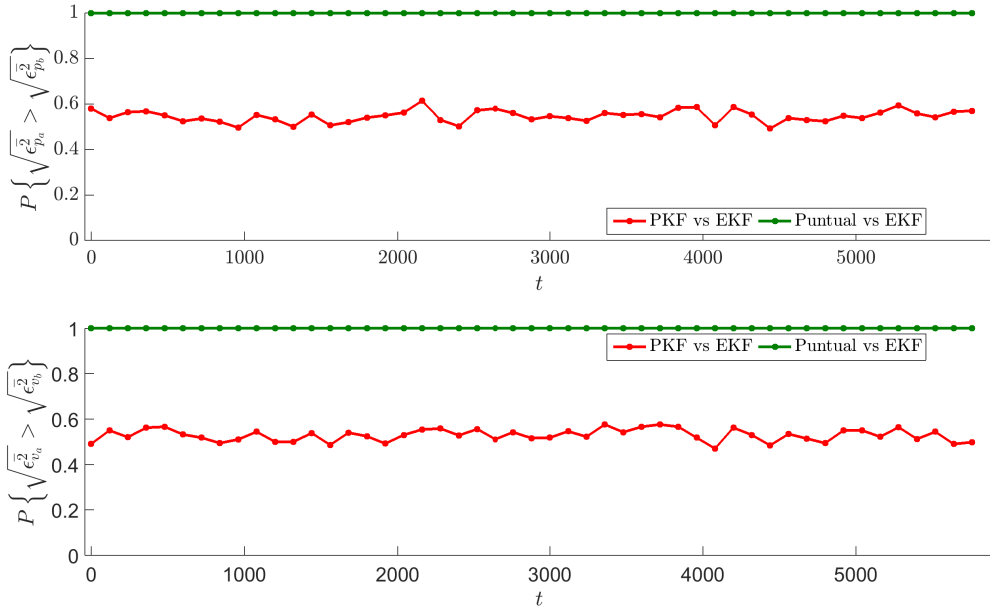


Figura C.15: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{y}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

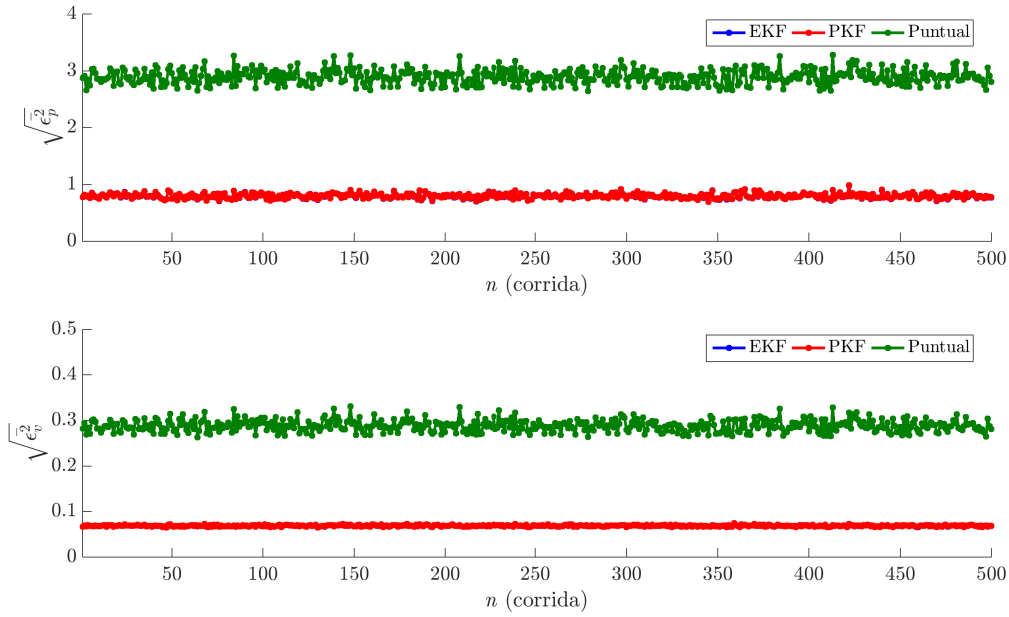


Figura C.16: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

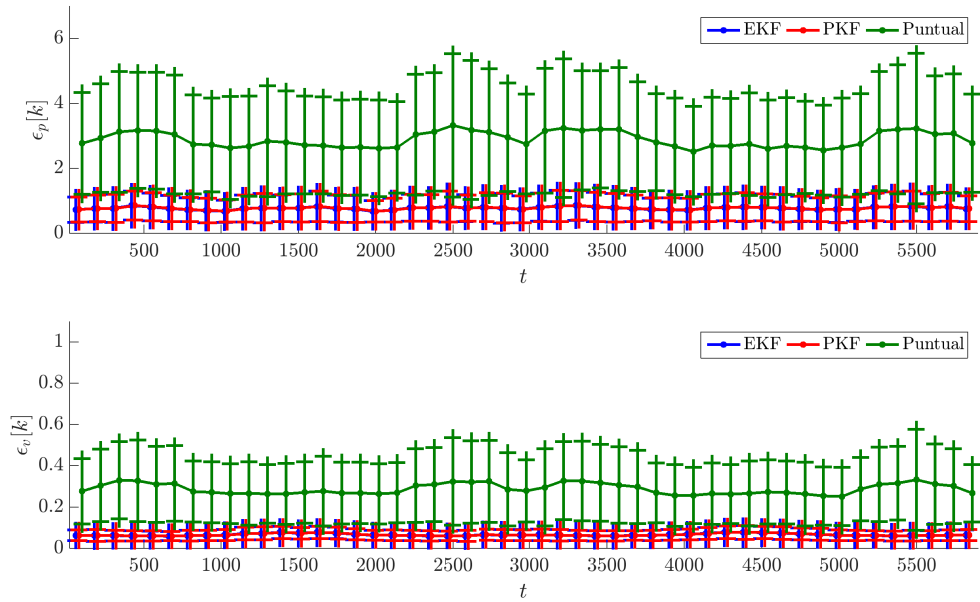


Figura C.17: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

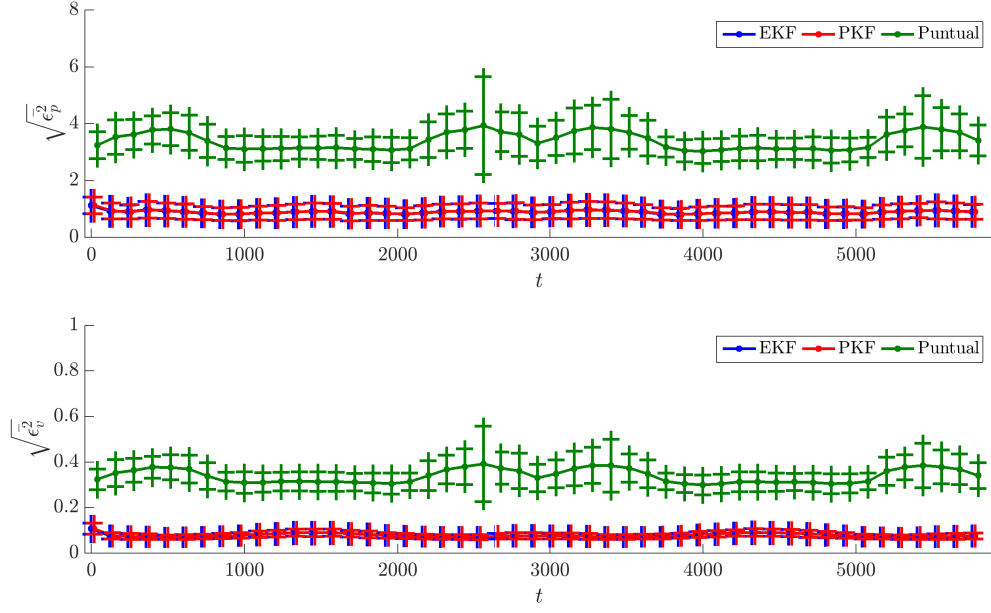


Figura C.18: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

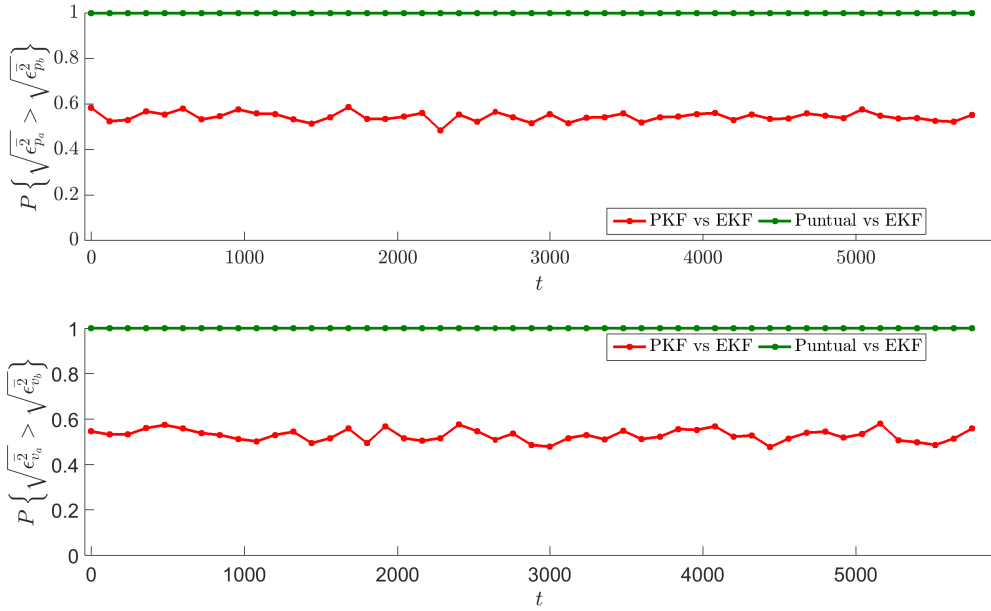


Figura C.19: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

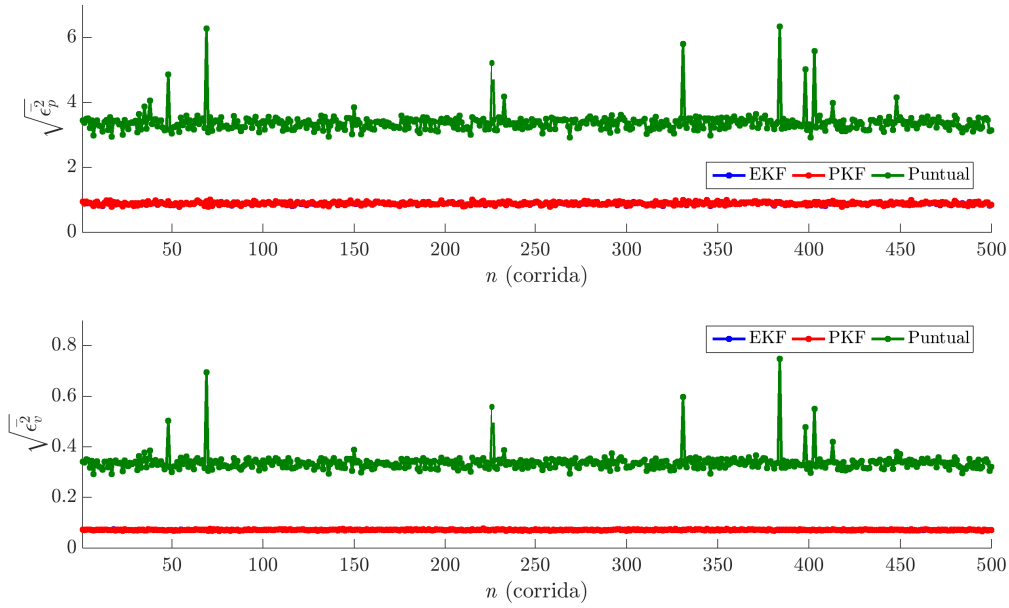


Figura C.20: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

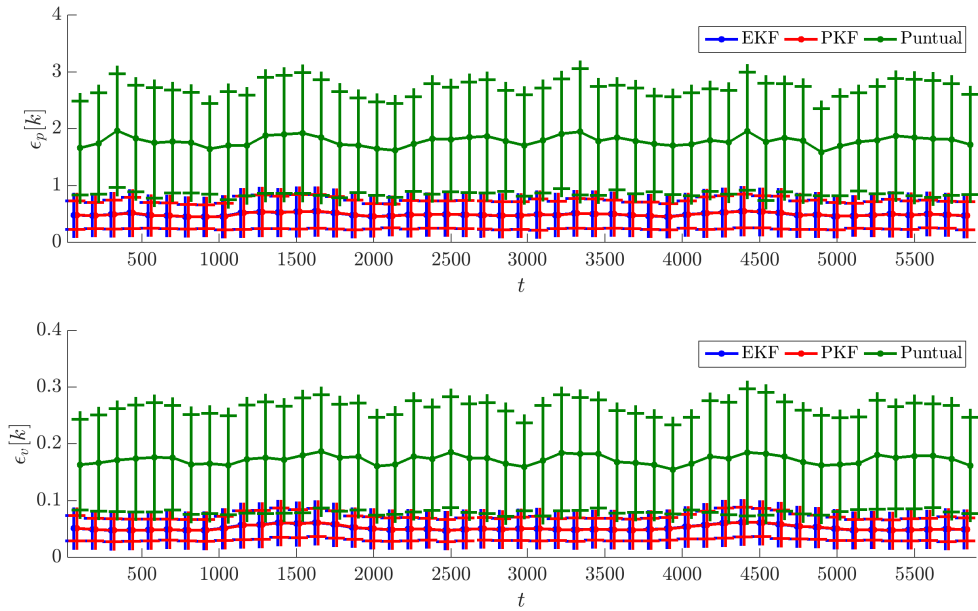


Figura C.21: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

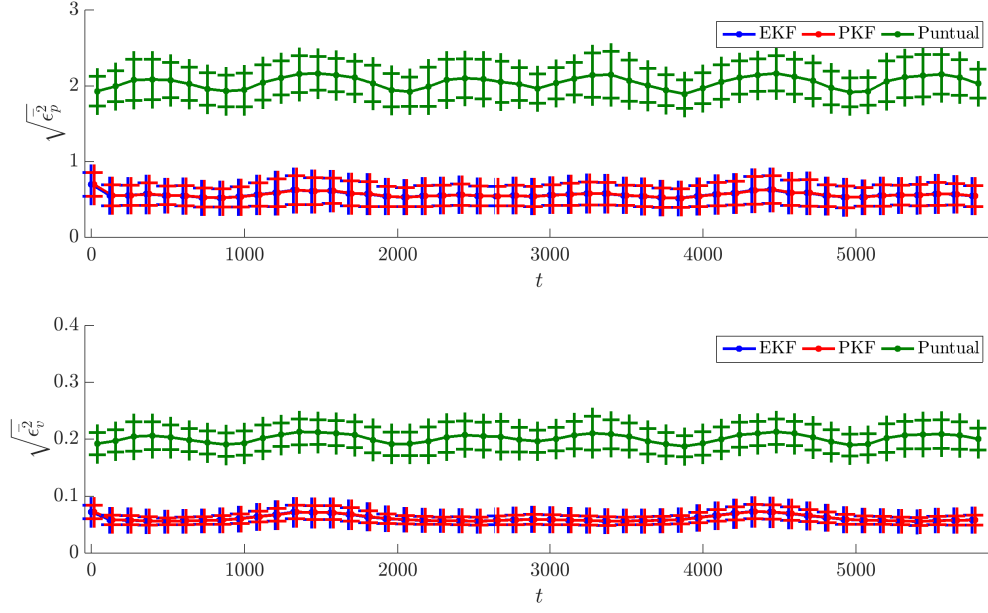


Figura C.22: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

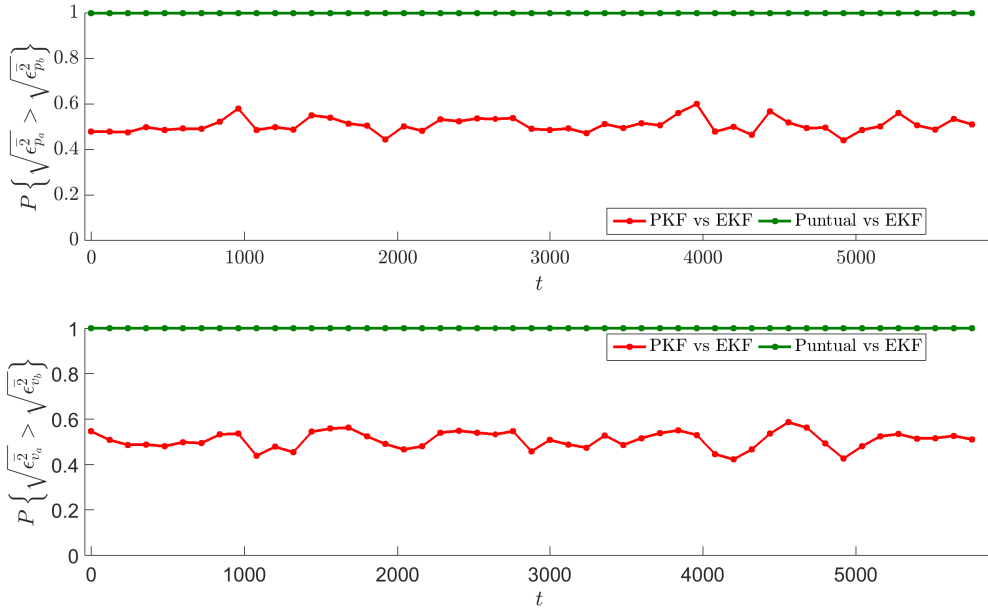


Figura C.23: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_{\ddot{b}} = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

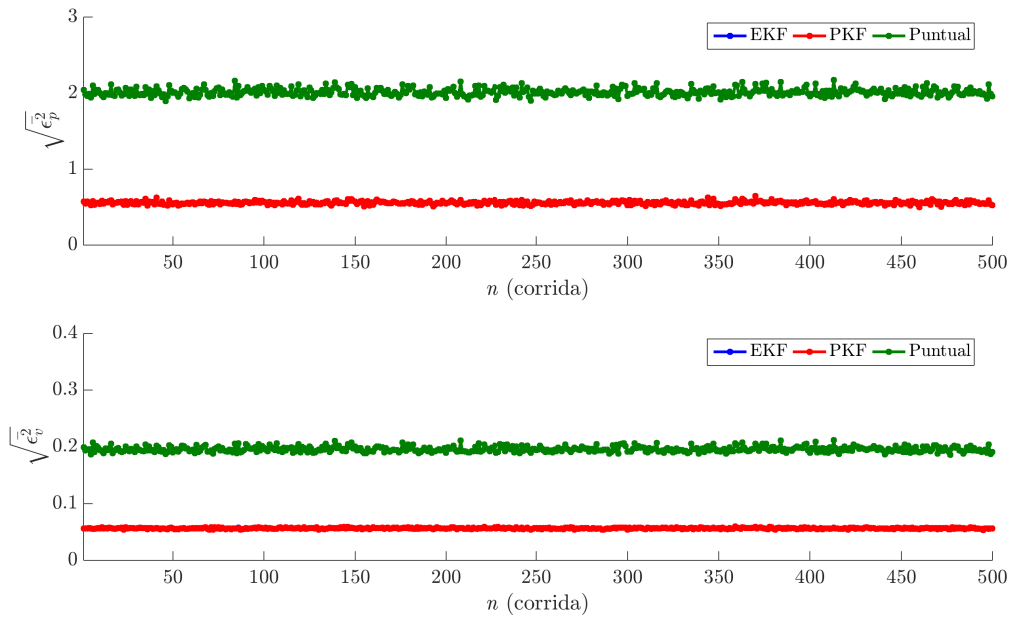


Figura C.24: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico I con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_b = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

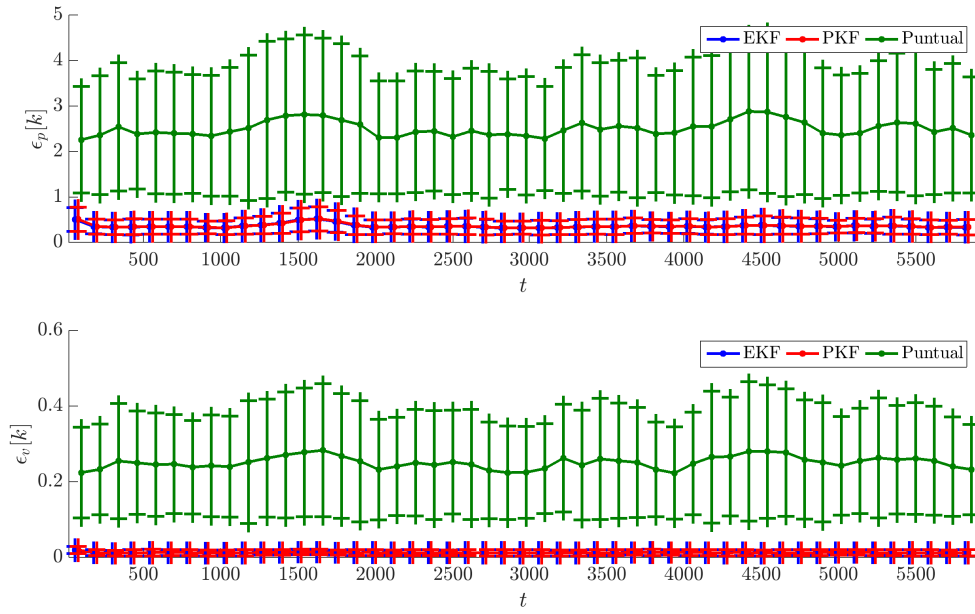


Figura C.25: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{y}} = \sigma_{\hat{z}} = 6,0$.

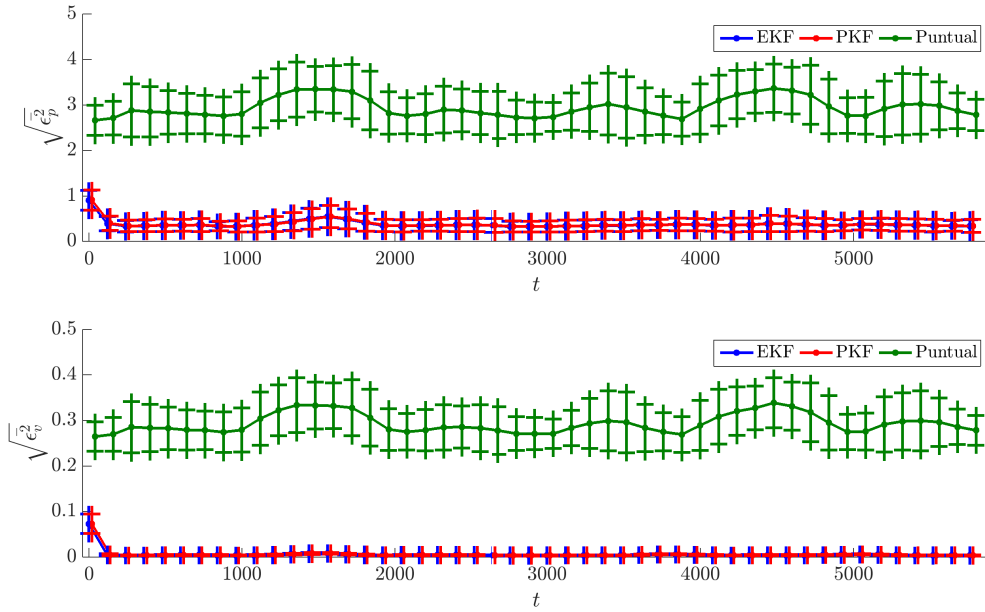


Figura C.26: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

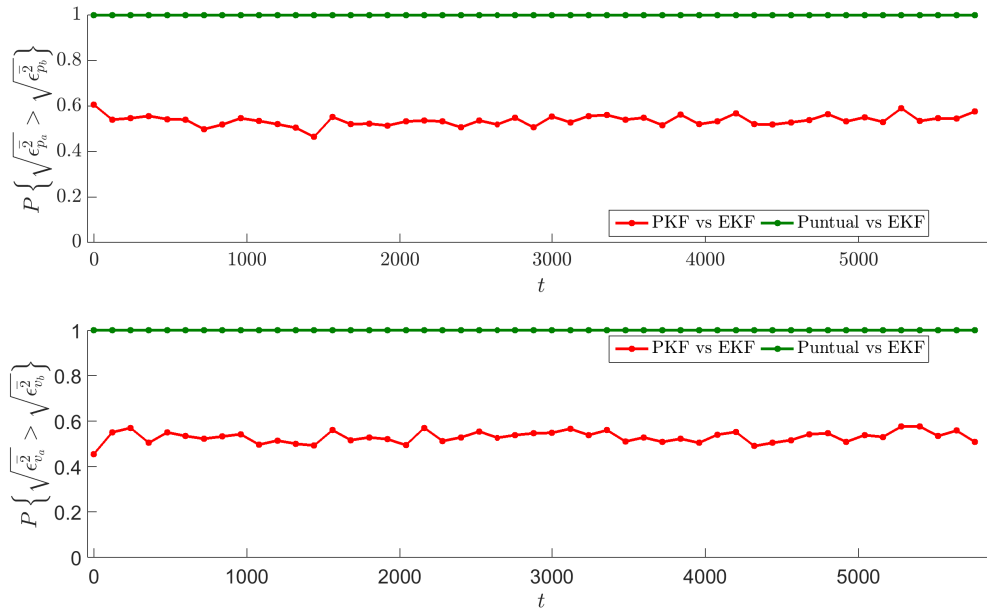


Figura C.27: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

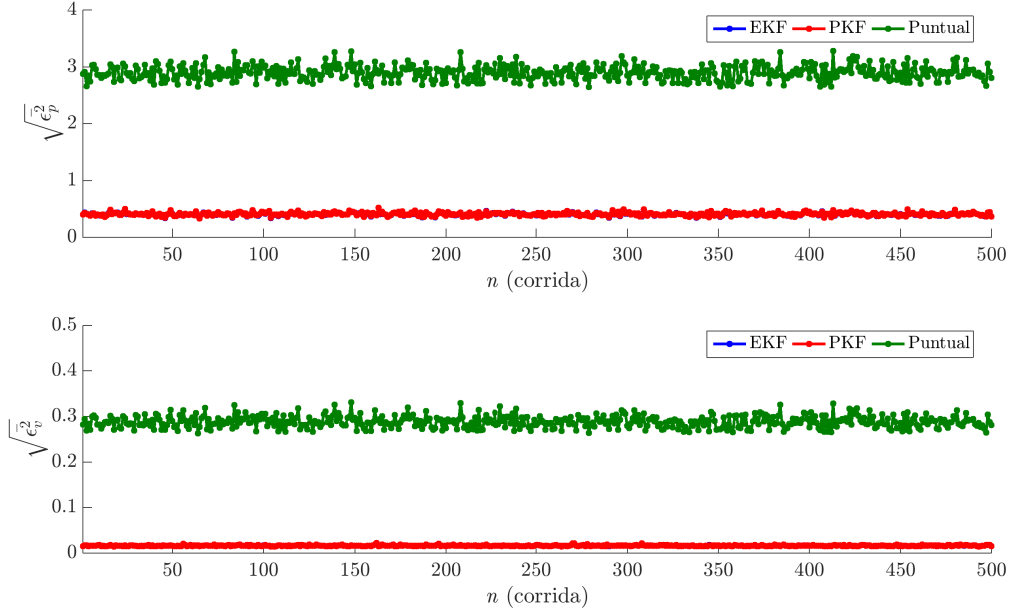


Figura C.28: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\ddot{y}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

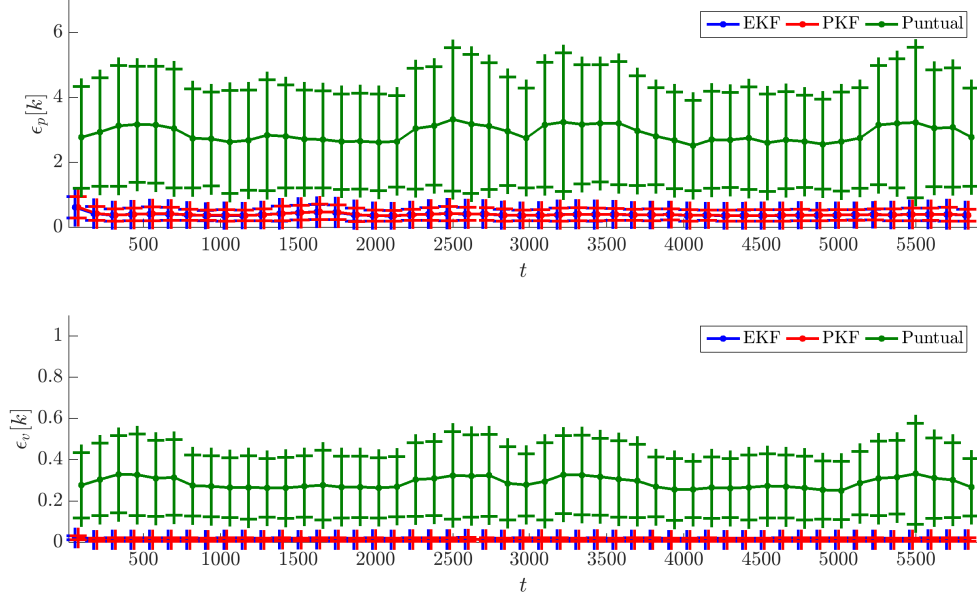


Figura C.29: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

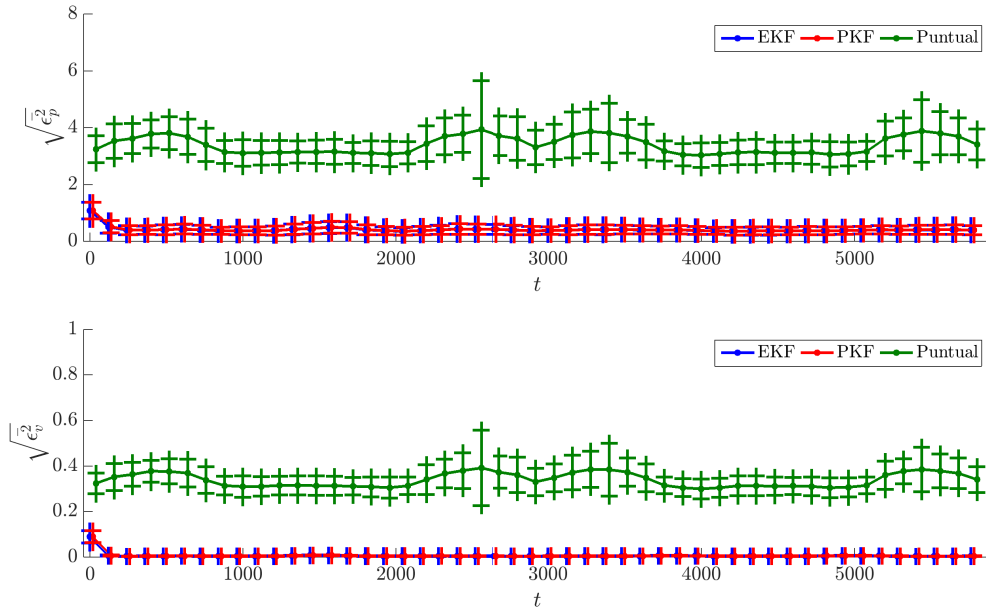


Figura C.30: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

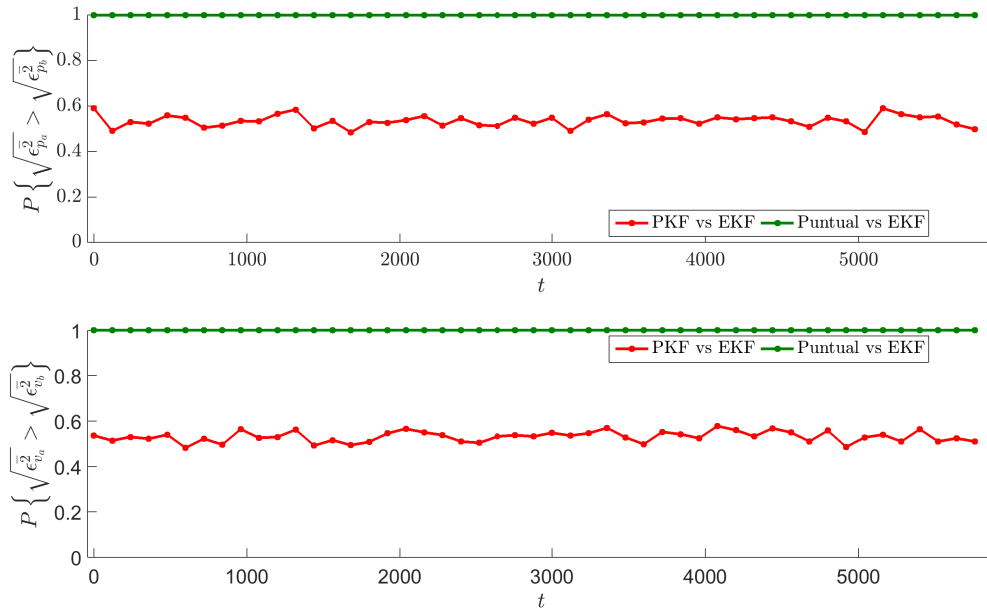


Figura C.31: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

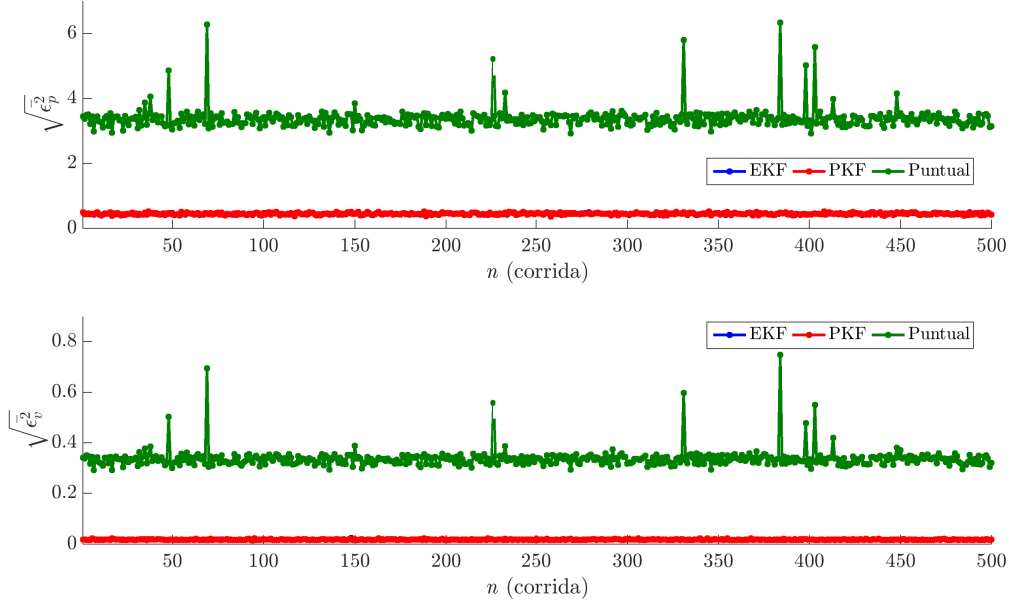


Figura C.32: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

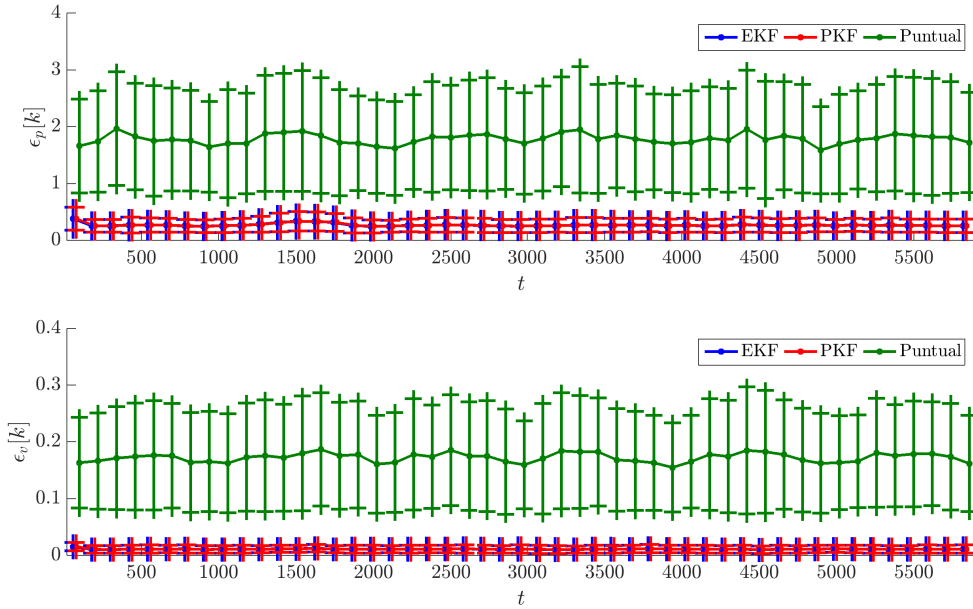


Figura C.33: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

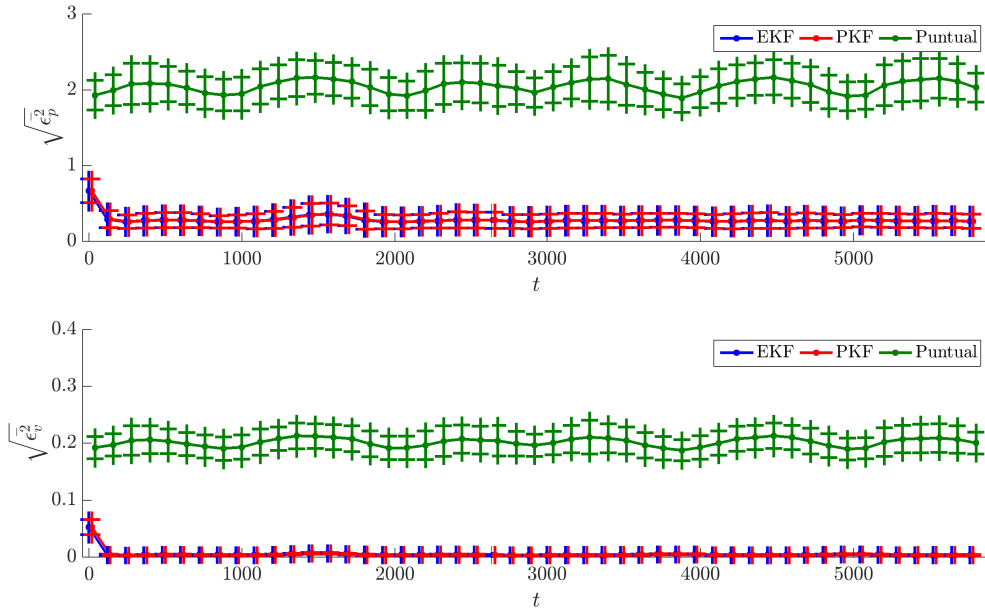


Figura C.34: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

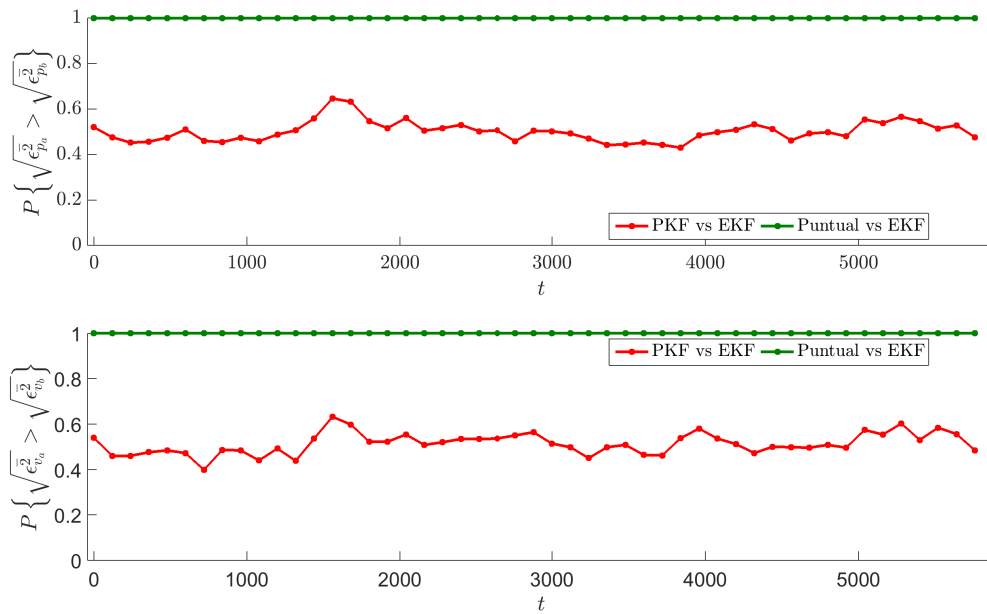


Figura C.35: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_b = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

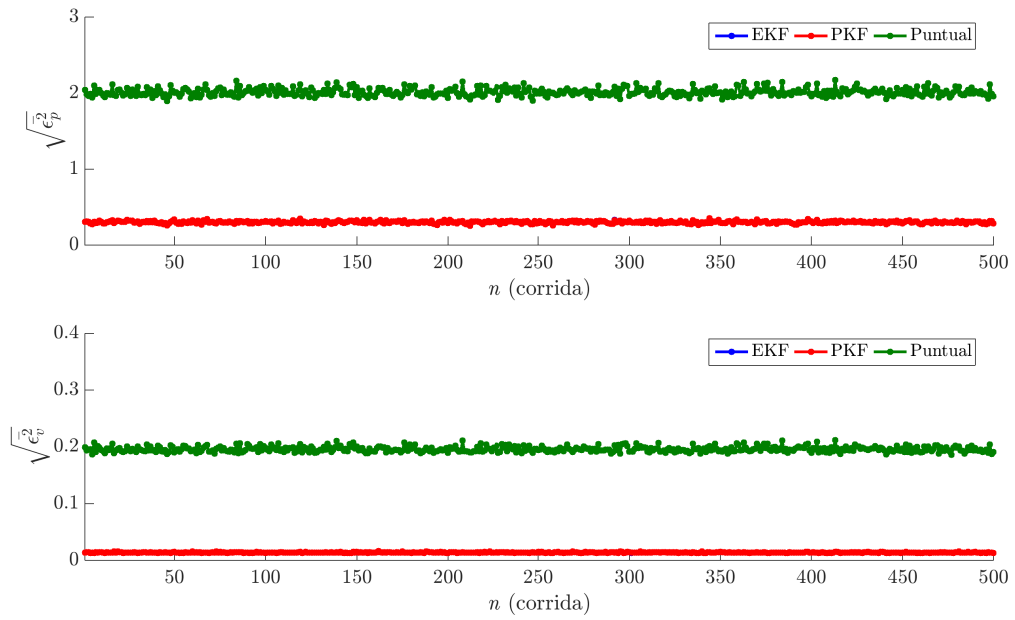


Figura C.36: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico II con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

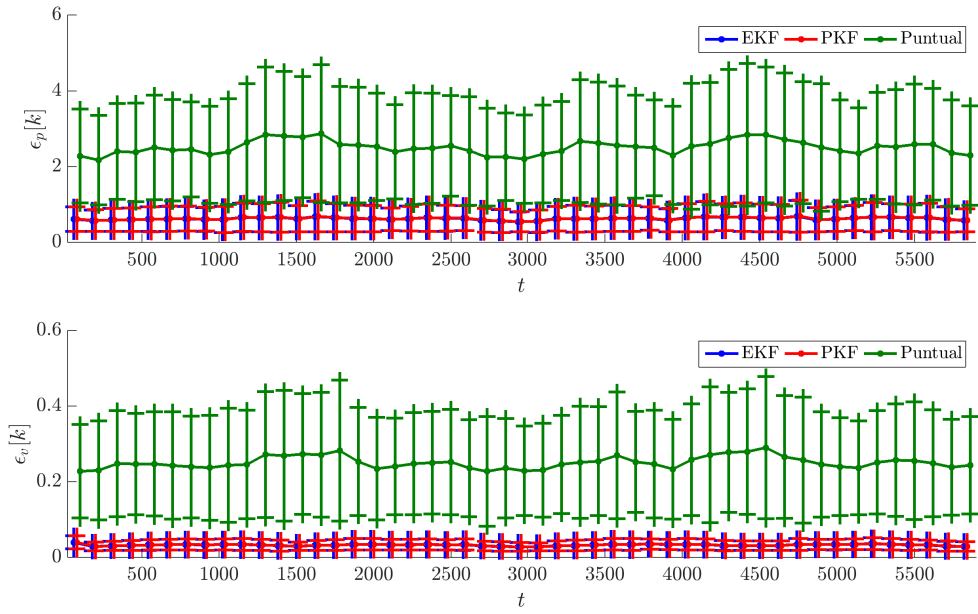


Figura C.37: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 6,0$.

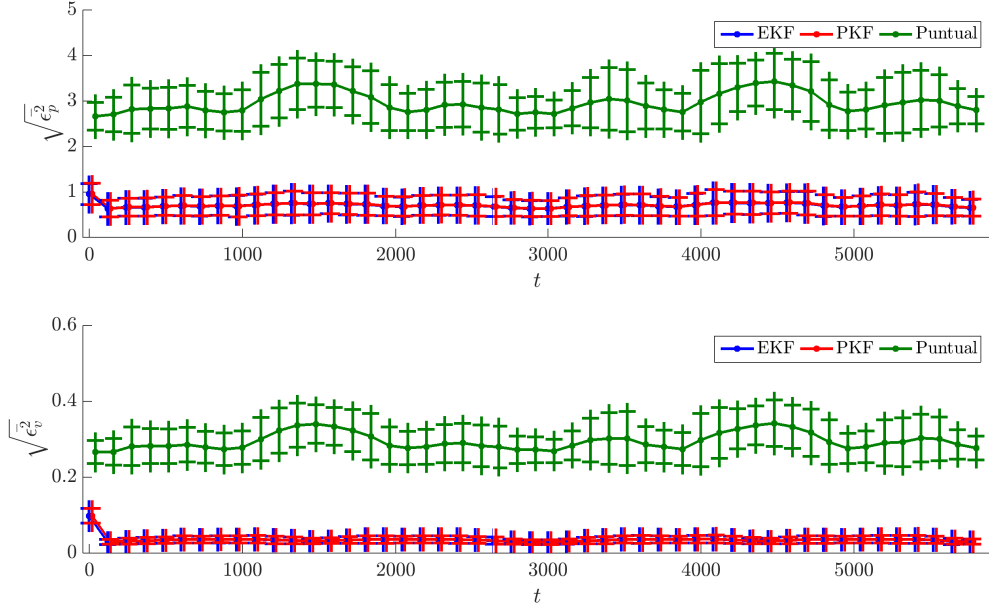


Figura C.38: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

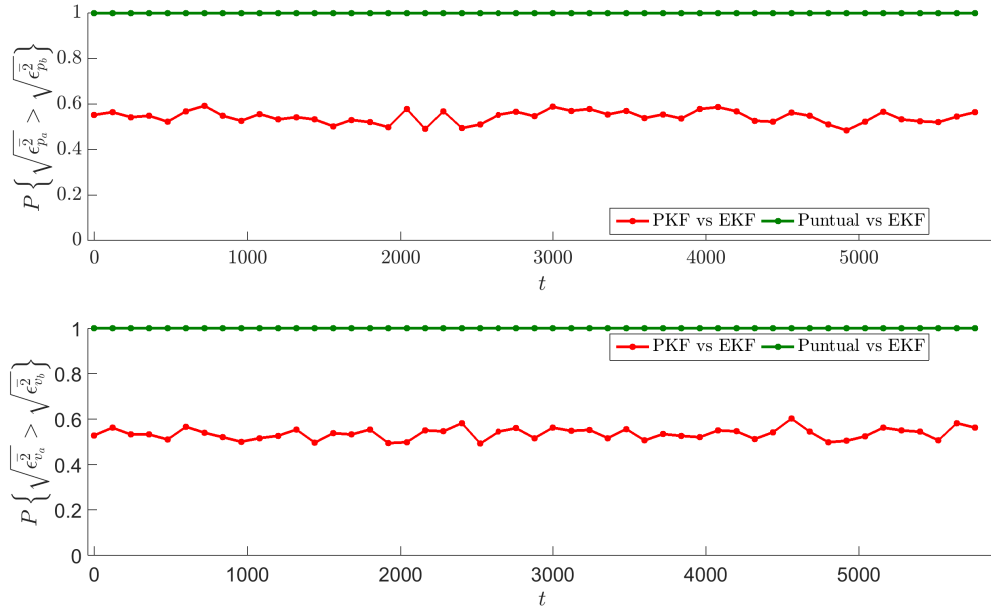


Figura C.39: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

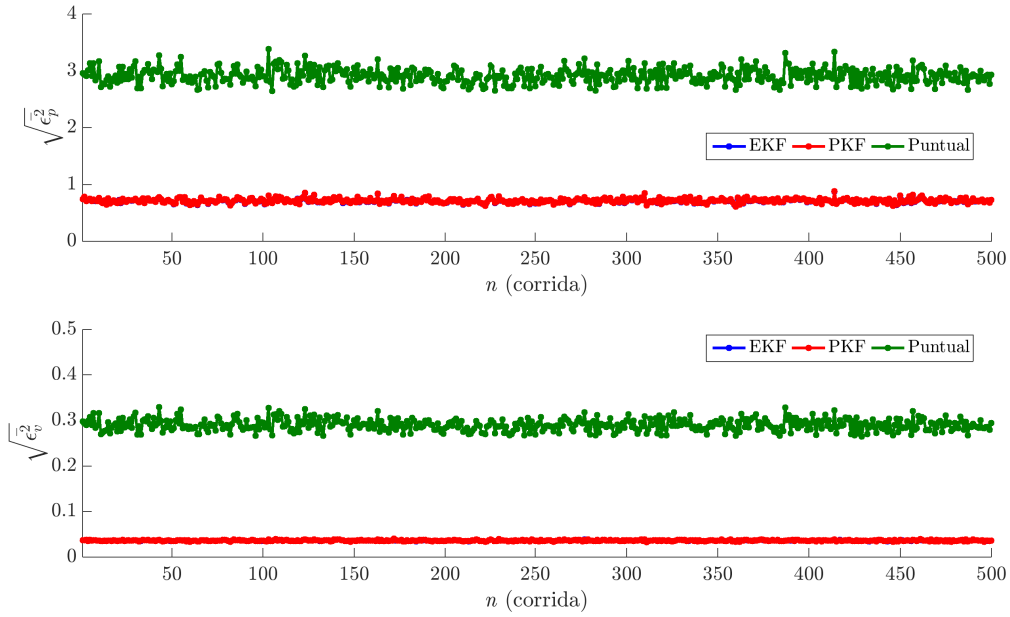


Figura C.40: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

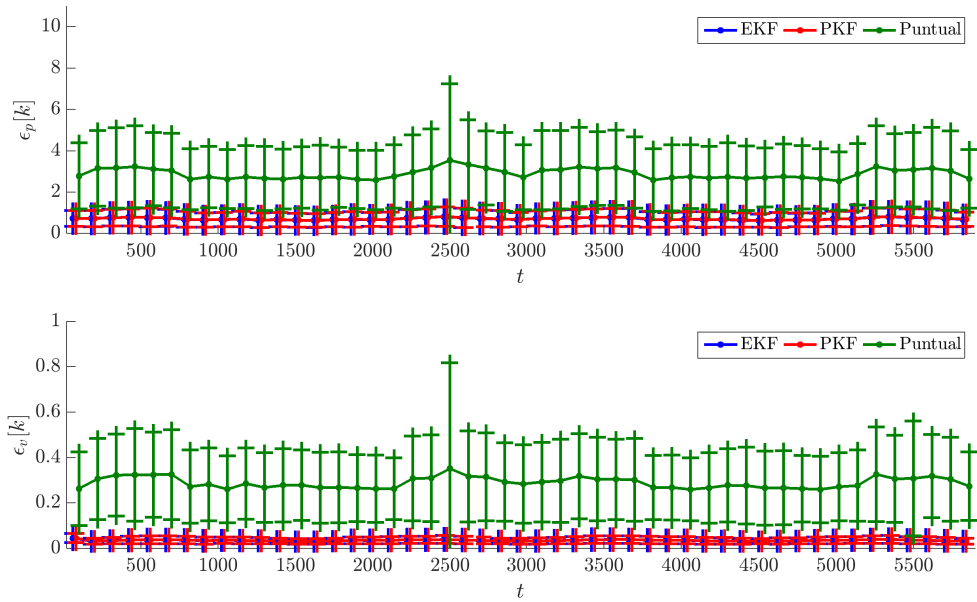


Figura C.41: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico

III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

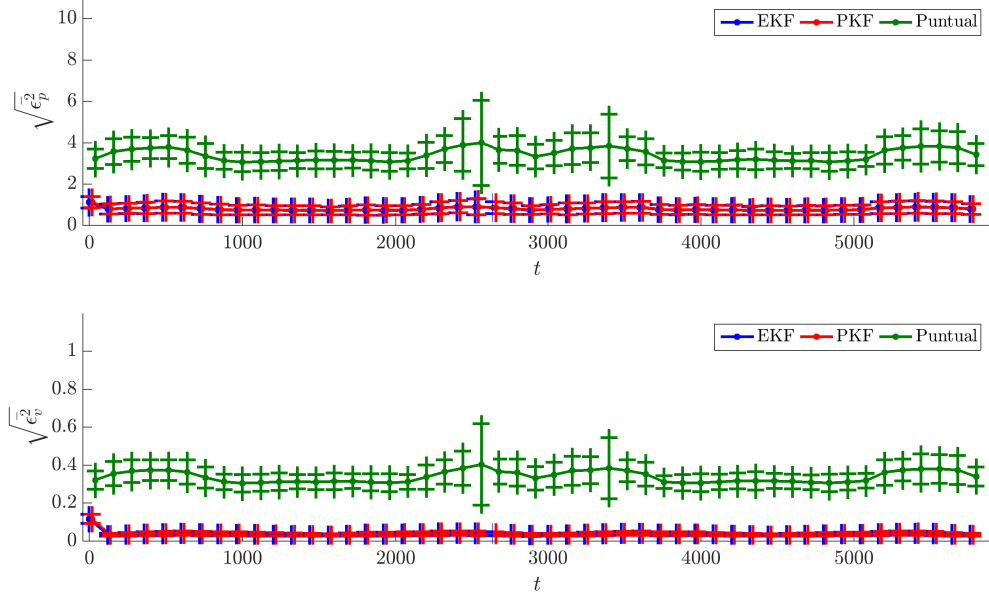


Figura C.42: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

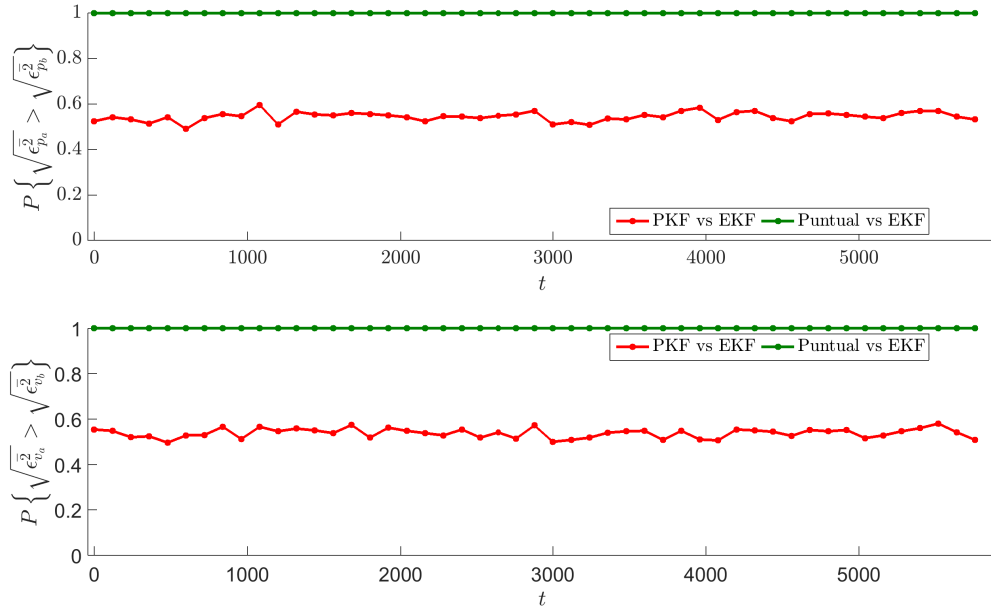


Figura C.43: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

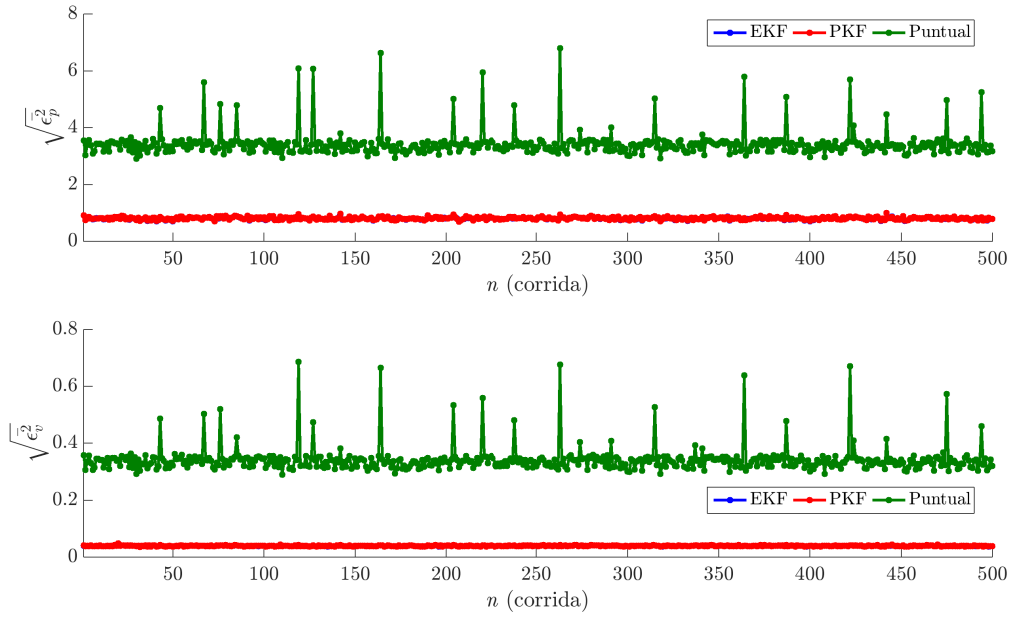


Figura C.44: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

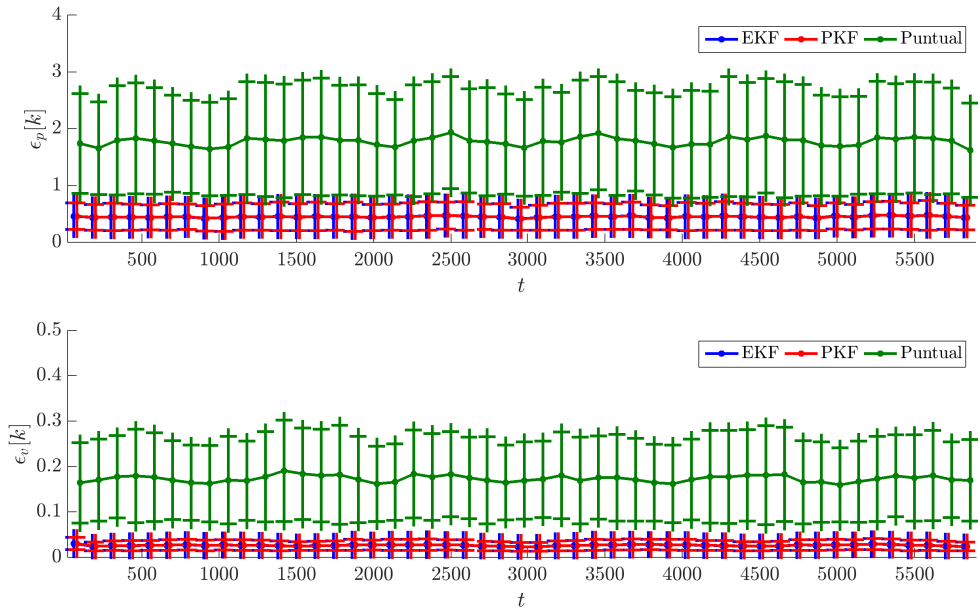


Figura C.45: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

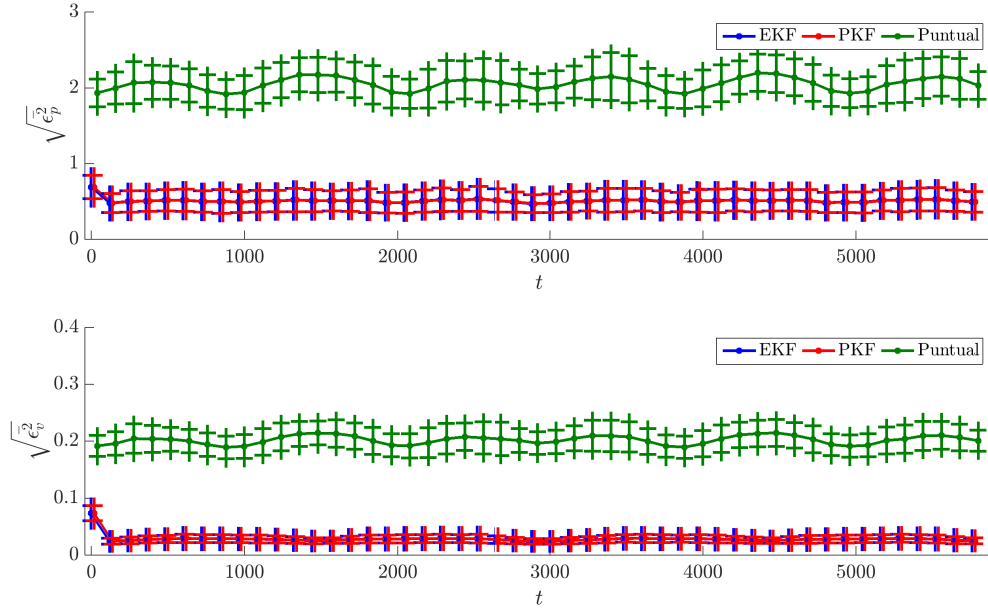


Figura C.46: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

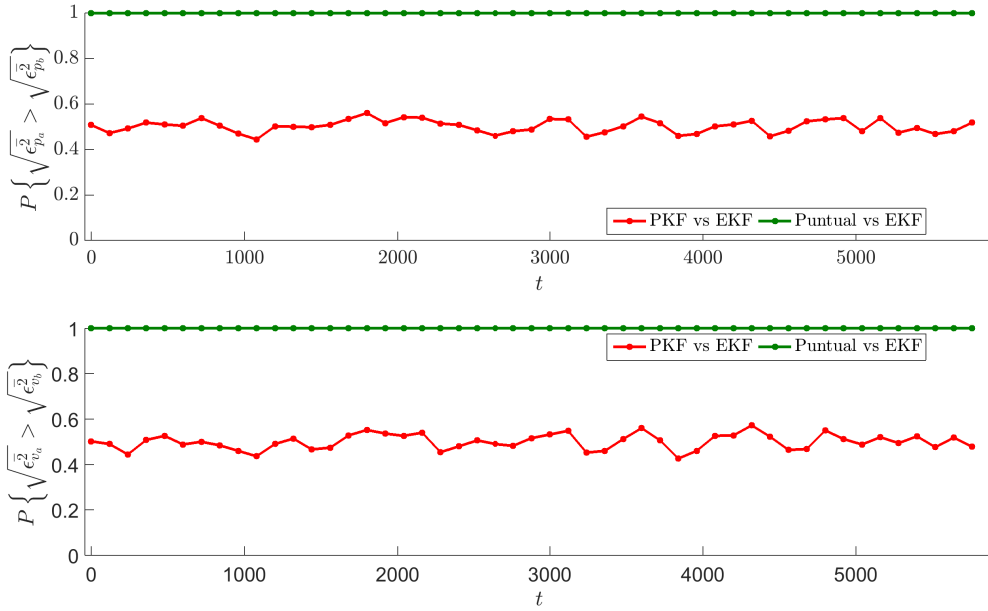


Figura C.47: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_{\ddot{b}} = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

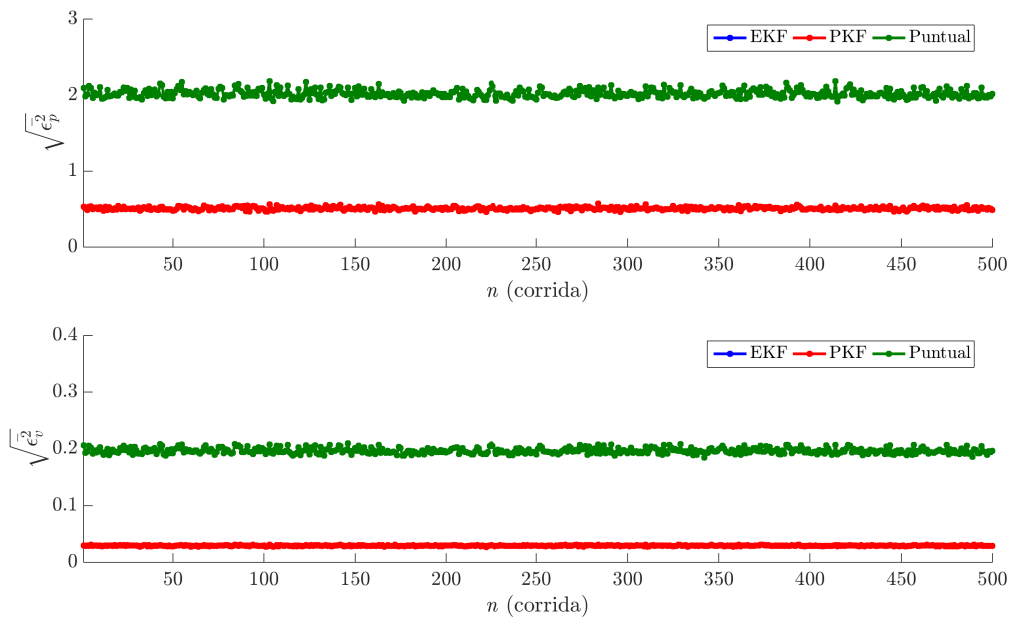


Figura C.48: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico III con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_b = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

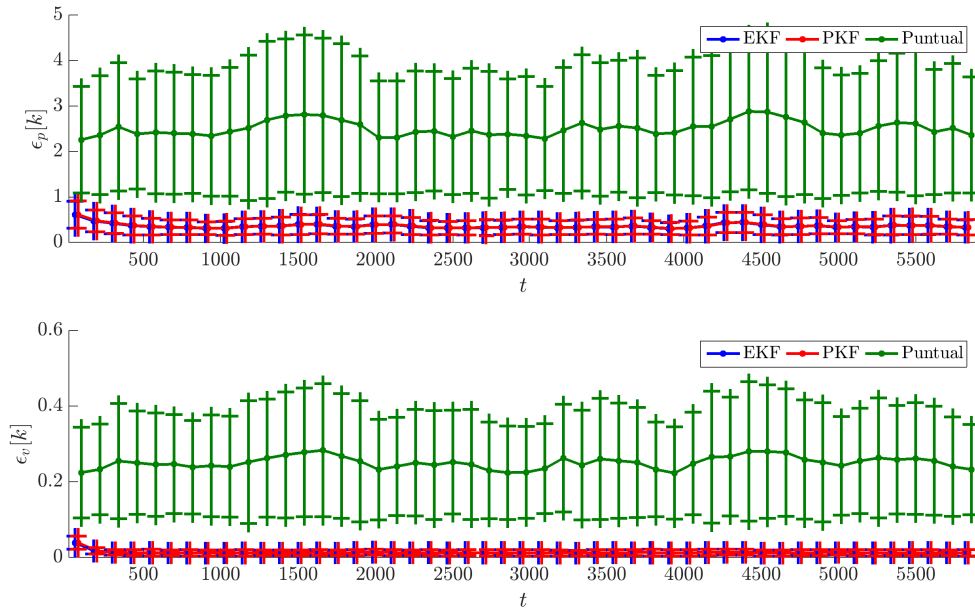


Figura C.49: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 6,0$.

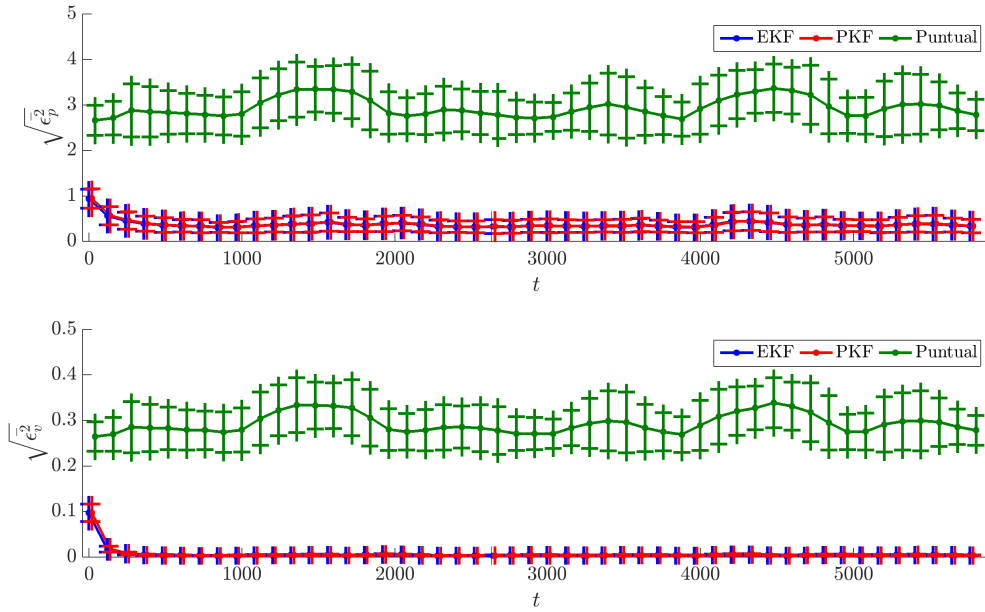


Figura C.50: Comparación de los errores de posición y velocidad, cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 6,0$.

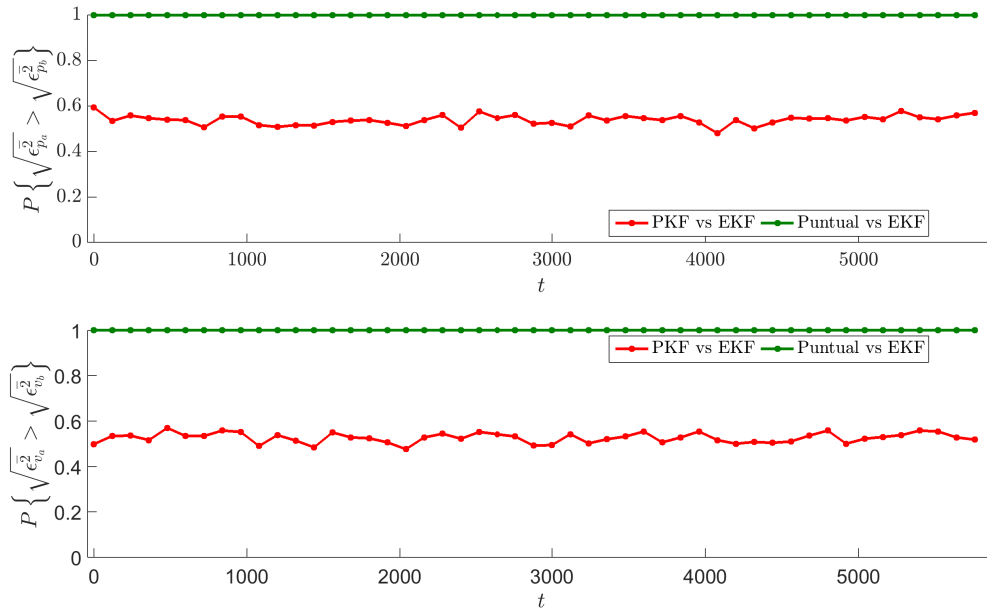


Figura C.51: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 6,0.$$

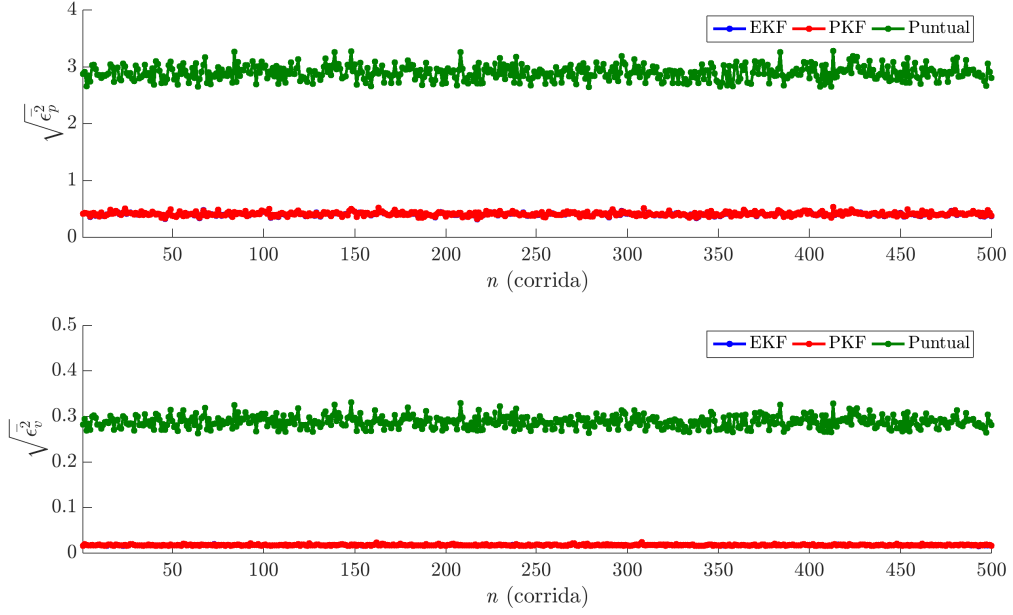


Figura C.52: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$,

$$\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

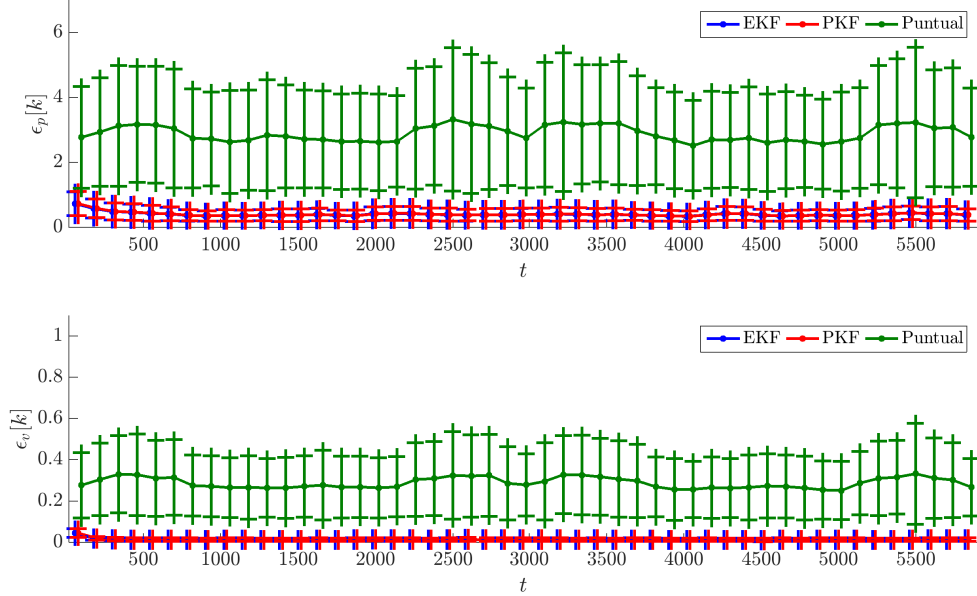


Figura C.53: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

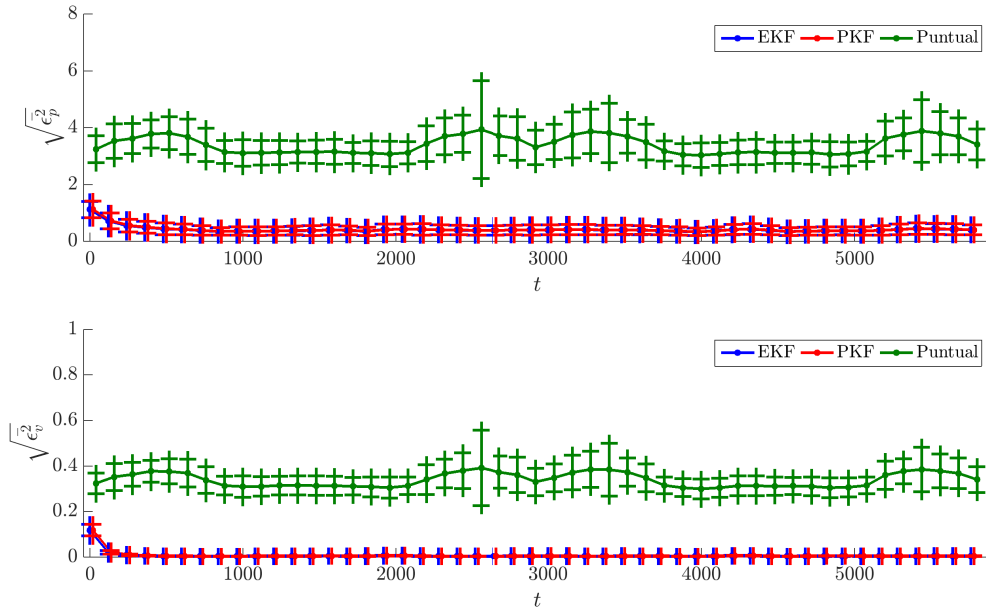


Figura C.54: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

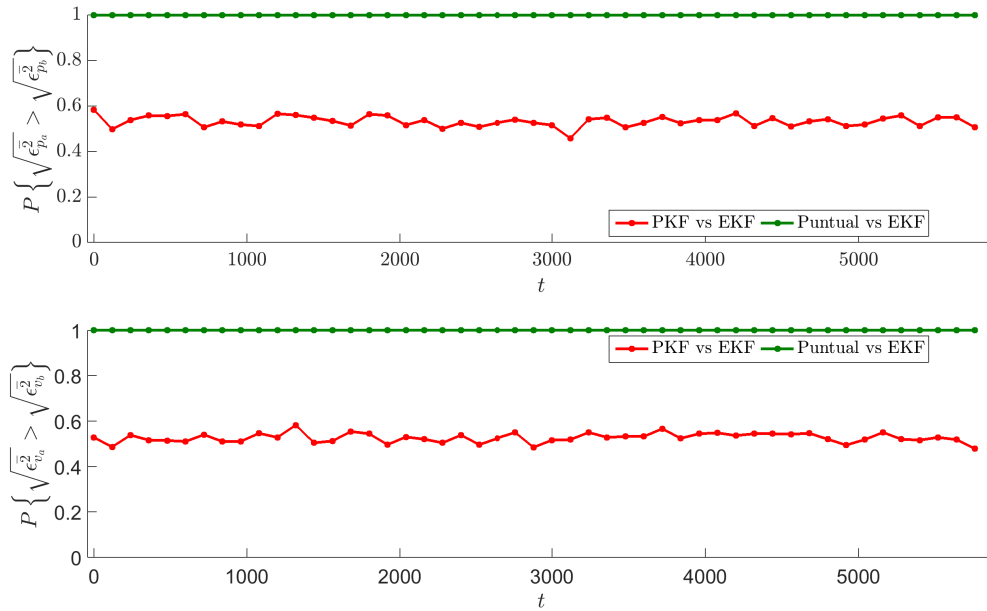


Figura C.55: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GLONASS; tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

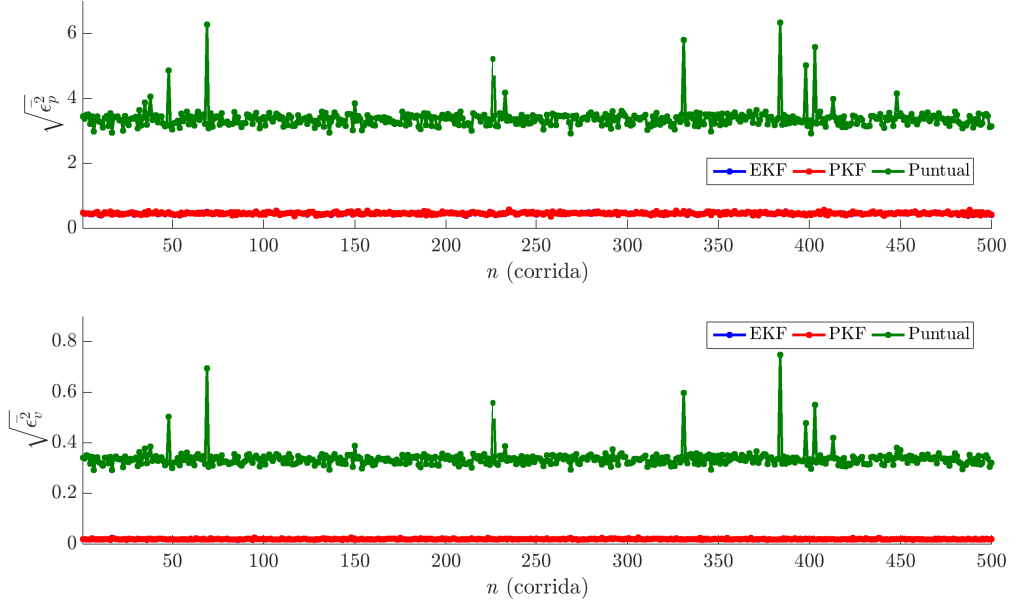


Figura C.56: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

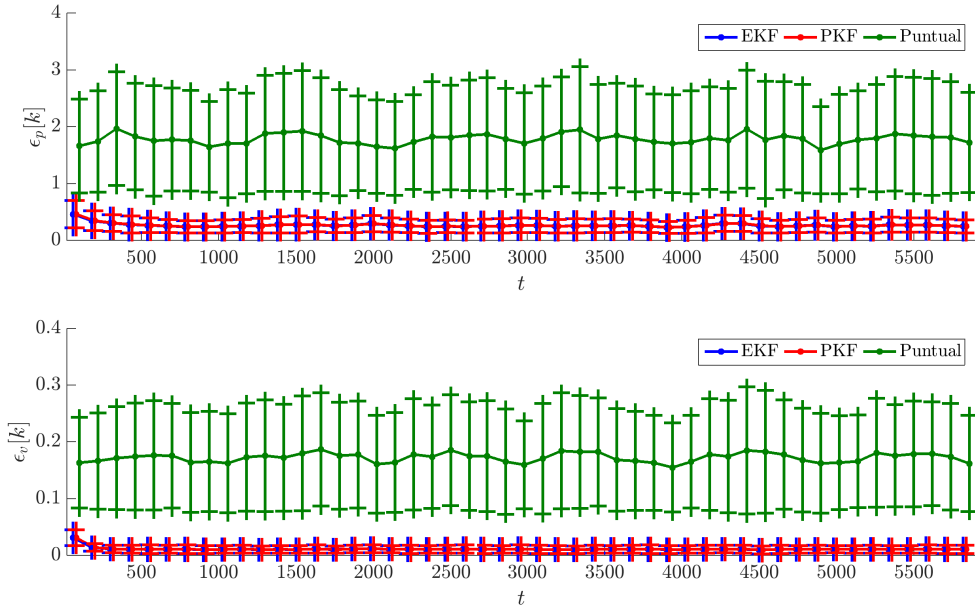


Figura C.57: Comparación de los errores instantáneos cada 60 segundos de posición y velocidad, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

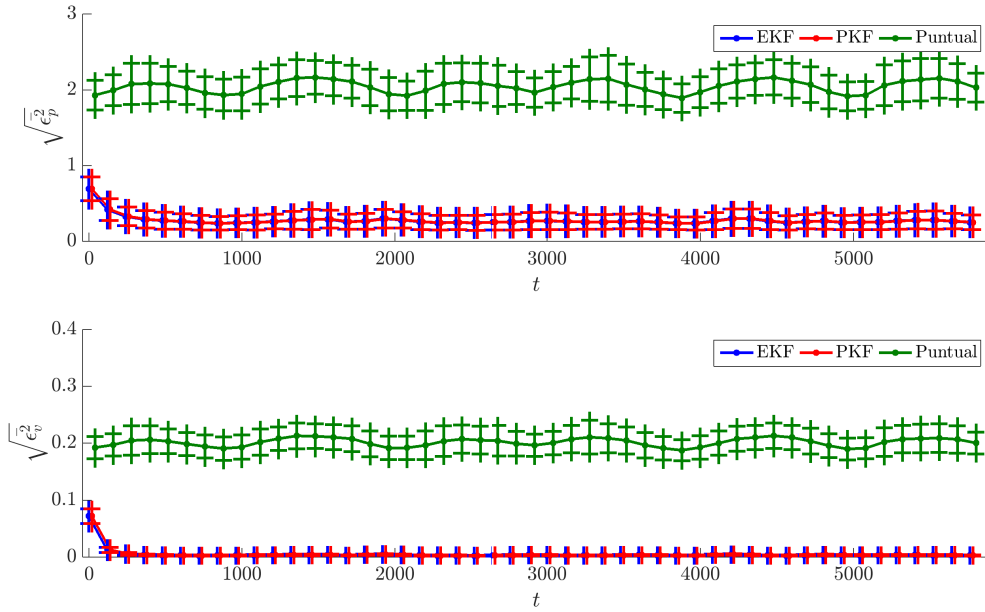


Figura C.58: Comparación de los errores de posición y velocidad cuadráticos medios, con los esquemas de filtrado EKF y PKF y con la solución puntual, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0$.

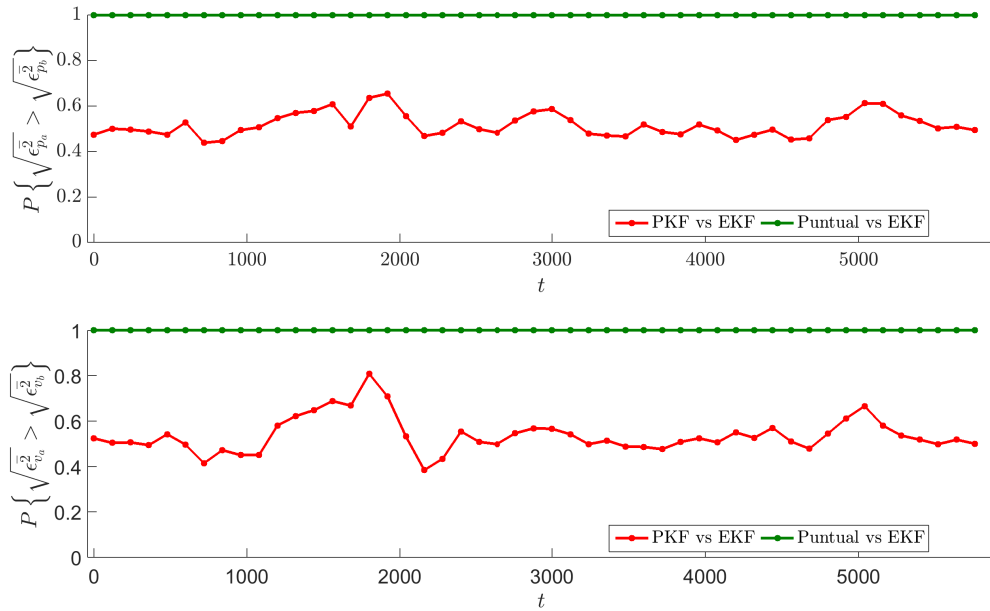


Figura C.59: Probabilidad de que un esquema sea peor que otro (mayor error cuadrático medio en el intervalo), utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_b = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

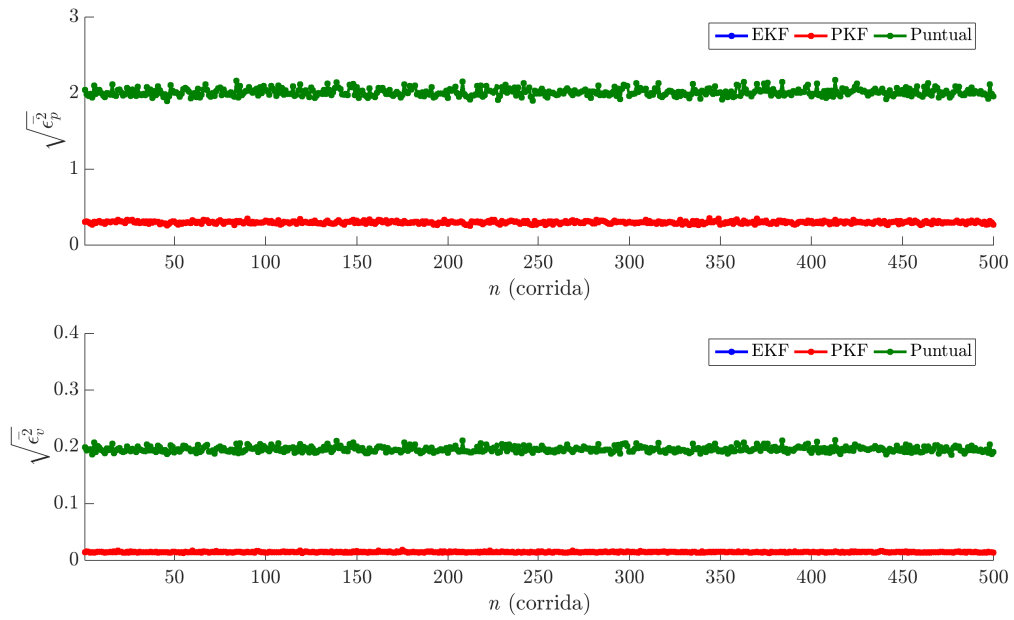


Figura C.60: Errores cuadráticos medios en todo el intervalo para las diferentes corridas de simulación, utilizando el modelo Dinámico IV con mediciones de GPS y GLONASS; tomando

$$\sigma_b = 0,01, \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 6,0.$$

APÉNDICE D

ESCENARIO DE SIMULACIÓN “REALISTA” GLONASS Y GPS-GLONASS

En este apéndice se compara el desempeño de los diferentes modelos utilizados para la implementación del EKF, en caso de perturbaciones de *thrust* y en caso de pérdida de satélites (lo que denominamos un escenario de simulación más realista) al utilizar mediciones del sistema GLONASS, y en caso de utilizar mediciones de los sistemas GPS y GLONASS de manera conjunta; complementando el análisis realizado en el capítulo 9.

D.2. Perturbaciones de Thrust

Consideramos las mismas perturbaciones de aceleración por efecto de *thrust* que en las utilizadas en la sección 9.1, figura 9.1, y analizamos el comportamiento en caso de utilizar mediciones del sistema GLONASS, y en caso de utilizar de forma conjunta mediciones de los sistemas GPS y GLONASS.

Al realizar las simulaciones con esta perturbación, no se observaron cambios significativos en el desempeño tanto de los modelos Cinemáticos I y II como del modelo Dinámico I, al utilizar las mismas sintonías que en el caso ideal, analizado en el apéndice B. Esto resulta totalmente esperable, ya que las magnitudes de las aceleraciones de la perturbación se encuentran por debajo de los valores de desviación estándar de ruido de modelo para estos tres casos.

No obstante, al analizar el desempeño del modelo Dinámico II con los valores de sintonía óptimos en el caso ideal, se observa el comportamiento descrito en las figuras D.1, D.2, D.3, y D.4. Puede verse que en los instantes en los que existe aceleración, dado que la perturbación excede ampliamente la modelada, el filtro correspondiente no es capaz de rechazarla y por ende aparecen errores en las estimaciones tanto de posición y sesgo como de velocidad y deriva.

Sin contar con información adicional, la única forma de mitigar este efecto consiste en aumentar la desviación estándar del ruido de perturbación en el modelo. En las figuras D.5, D.7, D.6 y D.8 se puede observar que al tomar un valor de $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$ se logra un comportamiento aceptable de los filtros. Con ayuda de las figuras B.7 y B.29 puede verse que con este valor de sintonía, esta opción de filtrado sigue mostrando un desempeño superior al de los modelos Cinemático I, Cinemático II y Dinámico I.

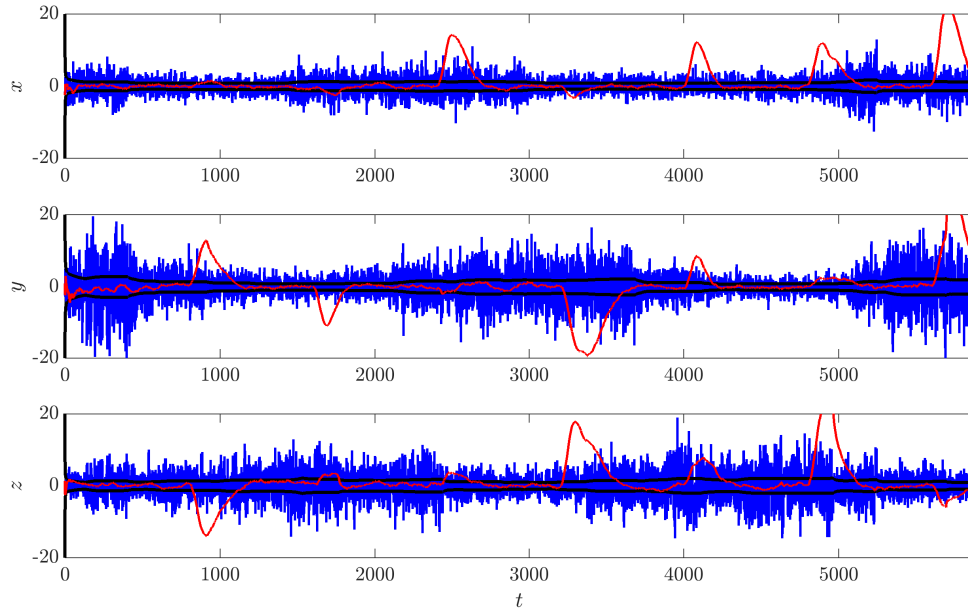
En las figuras D.9, D.10, D.11, D.12, D.13, D.14, D.15, D.16, D.17, D.18, D.19 y D.20 se presenta el comportamiento de los modelos Dinámico III y Dinámico IV, cada uno con los valores óptimos de sintonía correspondientes. Se observa que mientras en el modelo Dinámico III la perturbación afecta casi únicamente a la estimación de aceleración y es filtrada casi completamente en los restantes estados, para el modelo Dinámico IV la situación es análoga a la observada en el modelo Dinámico II, es decir, en los instantes en los que existe aceleración, dado que la perturbación excede ampliamente la modelada, el filtro correspondiente no es capaz de rechazarla y por ende aparecen errores en las estimaciones tanto de posición y sesgo, de velocidad y deriva como de aceleración.

Nuevamente, sin contar con información adicional, la única forma de mitigar este efecto consiste en aumentar la desviación estándar del ruido de perturbación en el modelo. En las figuras D.21, D.22, D.23, D.24, D.25 y D.26 se puede observar que al tomar un valor de $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$ se logra un comportamiento aceptable del filtro. Volviendo a las figuras B.7 y B.29 puede verse que con este valor de sintonía, el desempeño del modelo Dinámico IV es prácticamente igual al que se obtiene con el modelo Dinámico III.

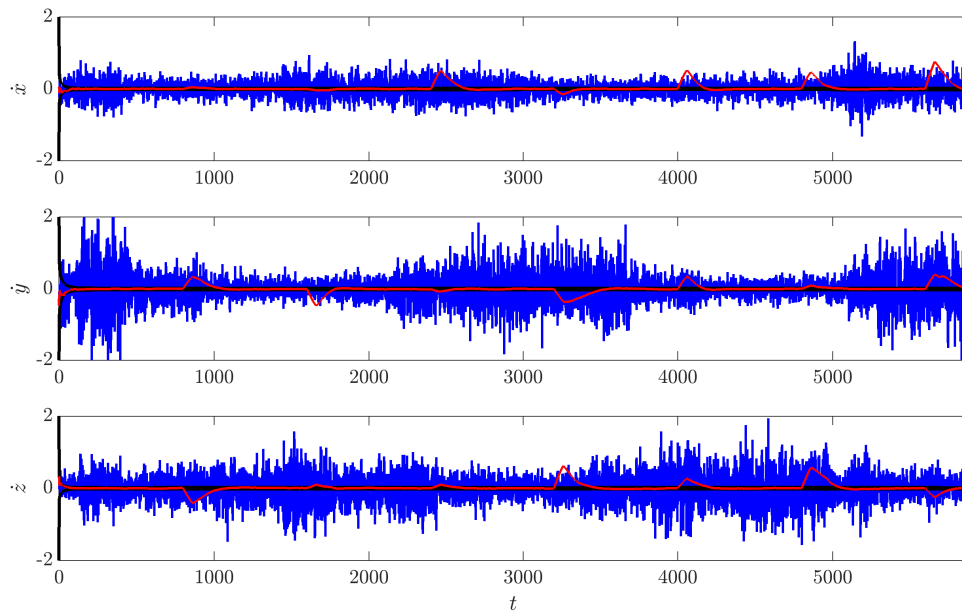
Si bien en las figuras B.7 y B.29 no se observa en detalle, el desempeño de estos tres modelos (Dinámico II, III y IV) cada uno con los valores de sintonía que permiten mitigar el efecto de esta perturbación resulta prácticamente el mismo. Una comparación más rigurosa de este aspecto requiere un análisis más detallado que supere el puramente cualitativo hecho previamente¹, y que excede los objetivos de este apéndice.

Por supuesto, al igual que en el caso de mediciones con el sistema GPS, en caso de contar con información adicional sobre los instantes de aplicación de las perturbaciones, se podría proponer una estrategia que aumente la desviación estándar del ruido de modelo en dichos instantes, lo cual lograría un desempeño superior.

¹Es decir, establecer alguna métrica que permita cuantificar el desempeño de cada modelo ante perturbaciones.

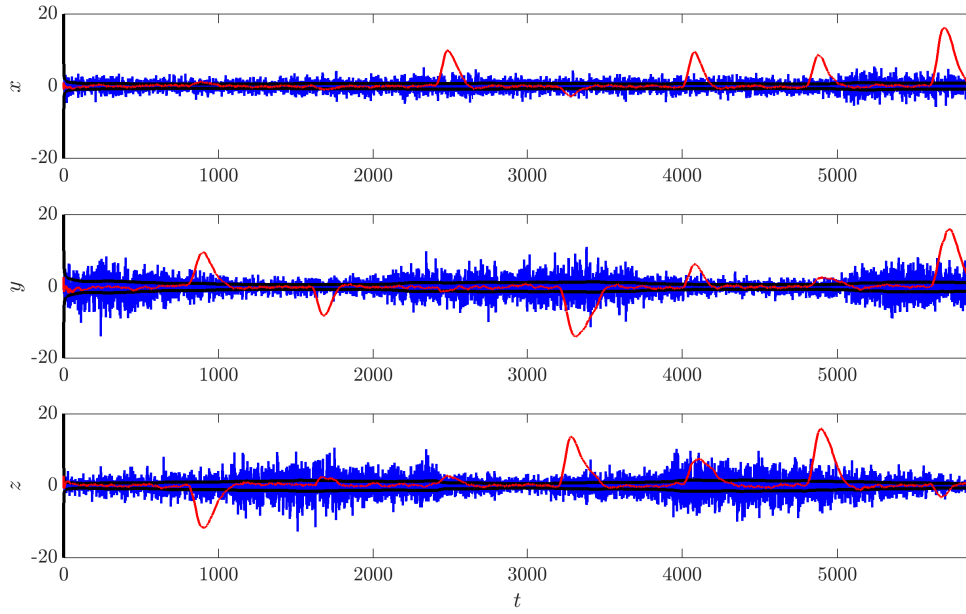


(a) Posición.

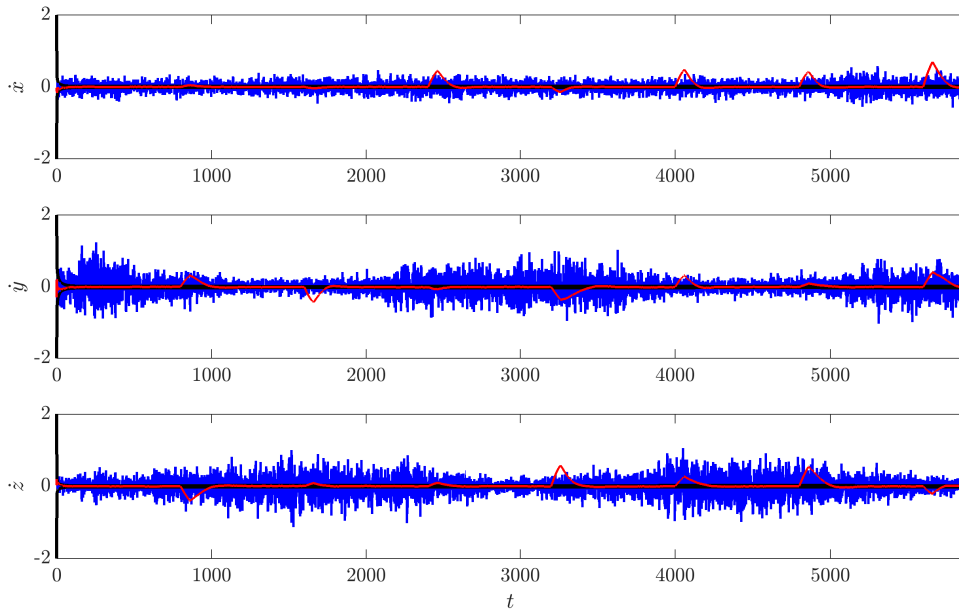


(b) Velocidad.

Figura D.1: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (---); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.2: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

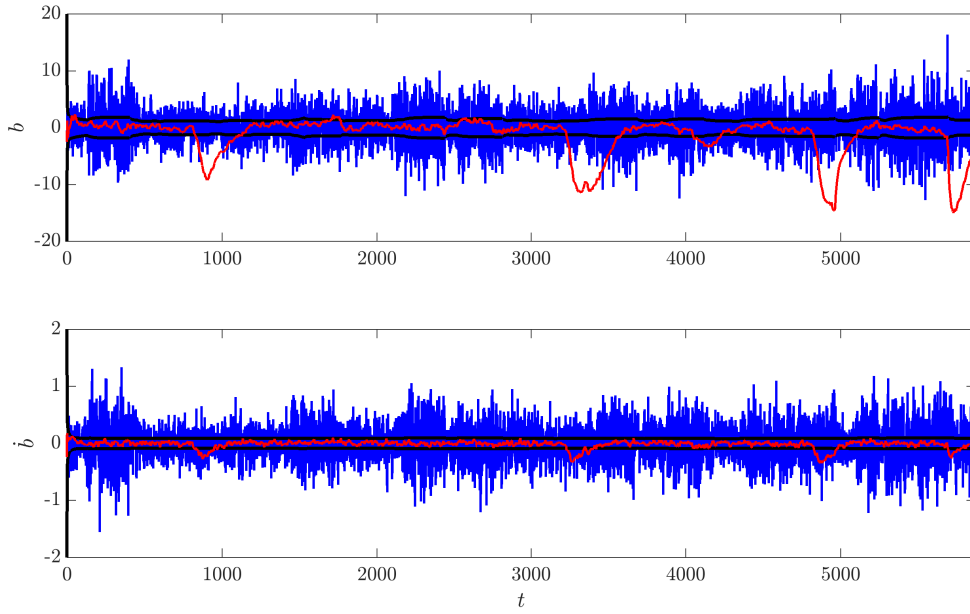


Figura D.3: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

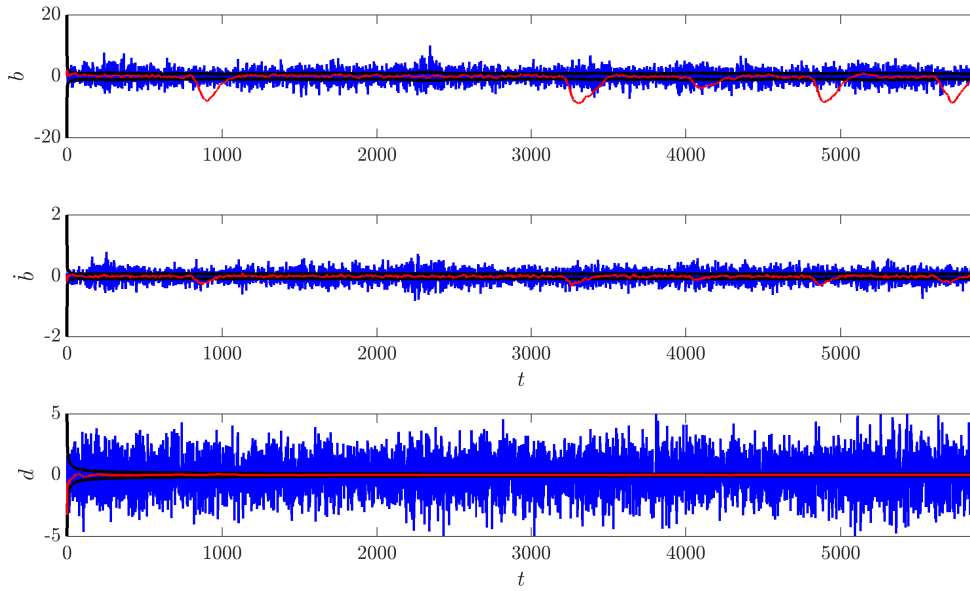
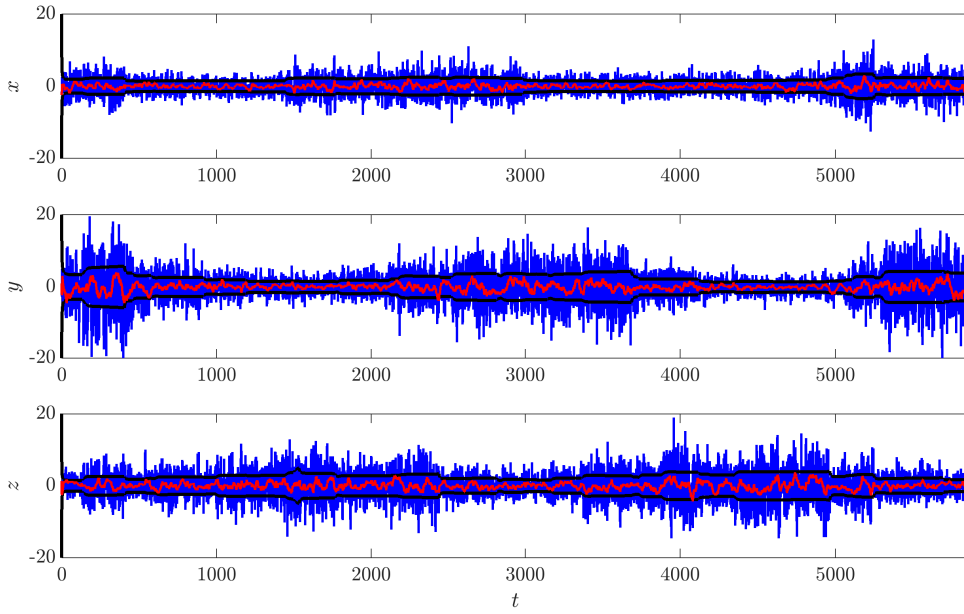
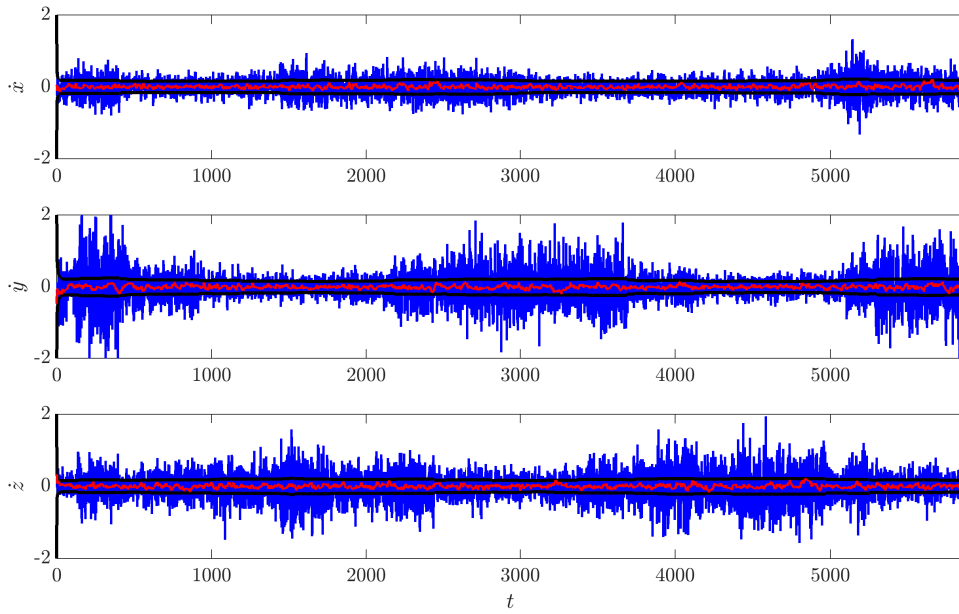


Figura D.4: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

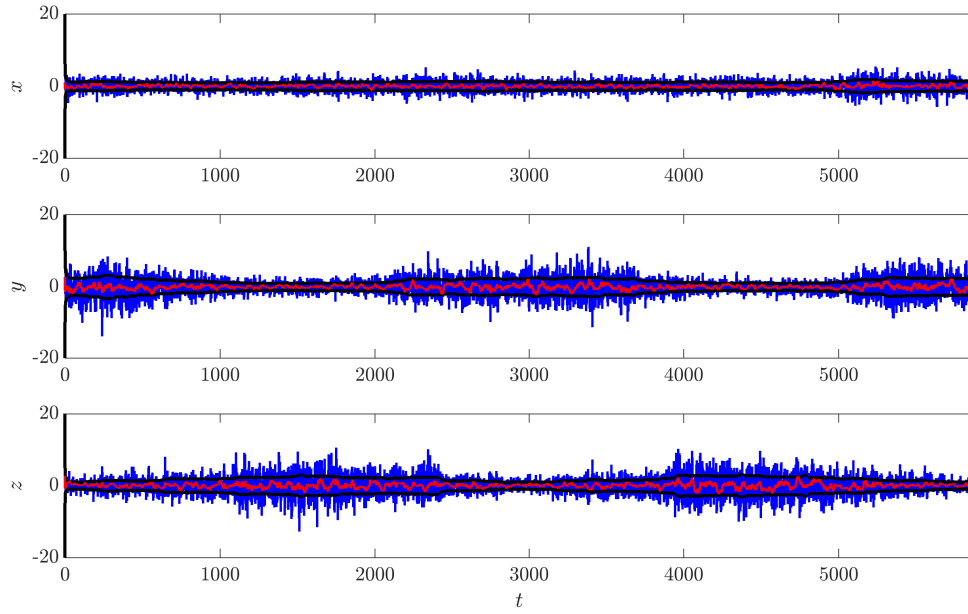


(a) Posición.

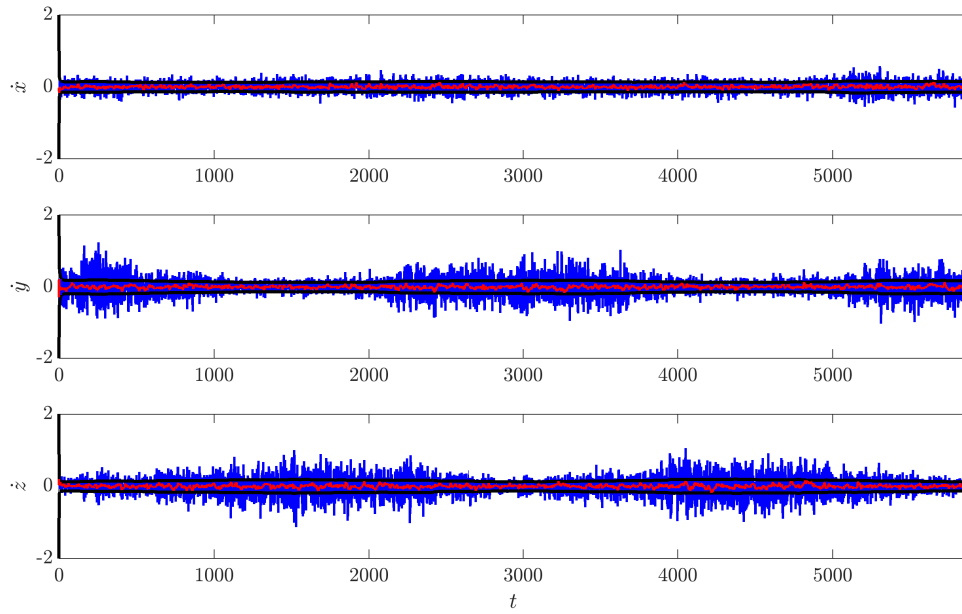


(b) Velocidad.

Figura D.5: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\vec{b}} = 0,01$, $\sigma_{\vec{x}} = \sigma_{\vec{y}} = \sigma_{\vec{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.6: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\vec{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

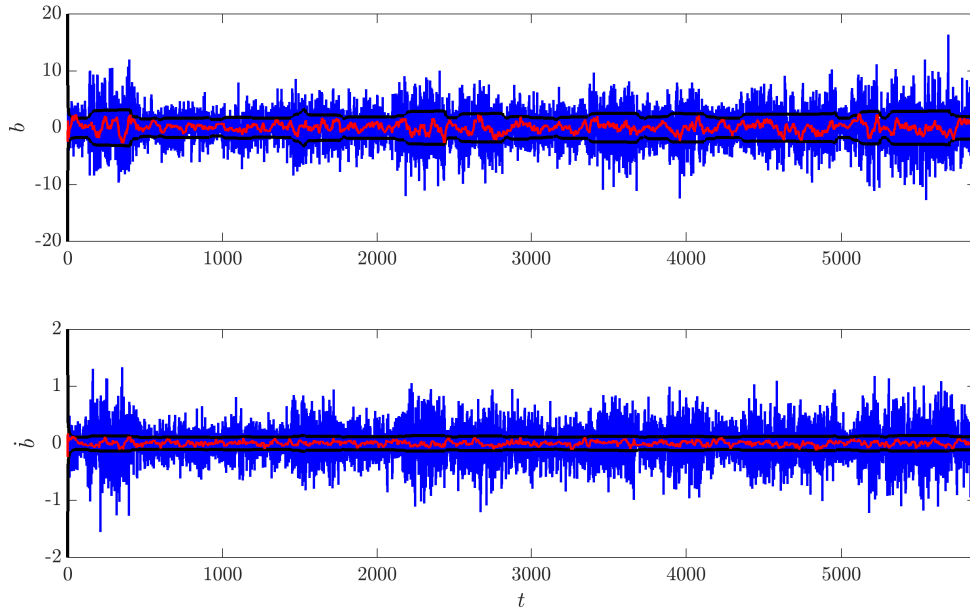


Figura D.7: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

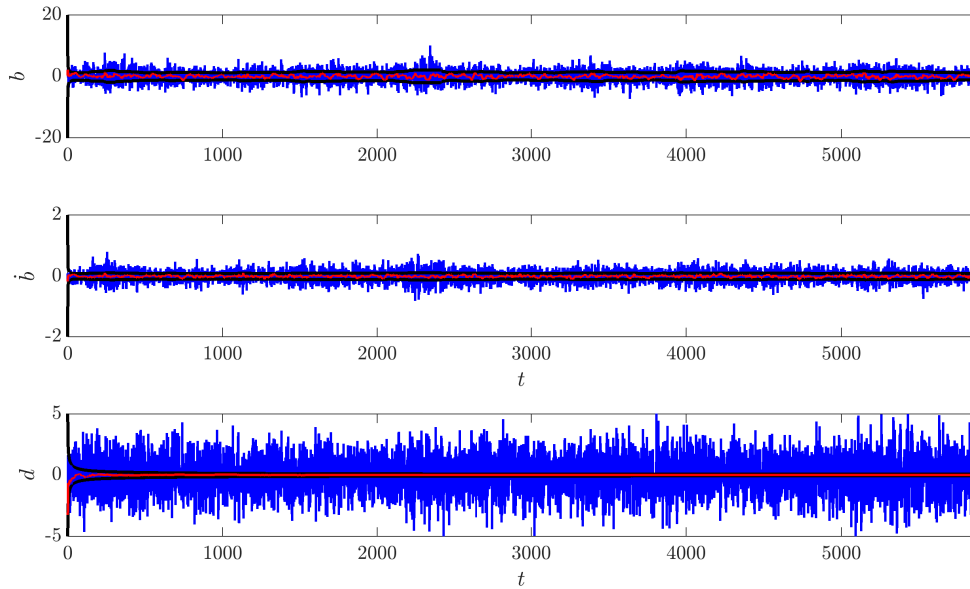
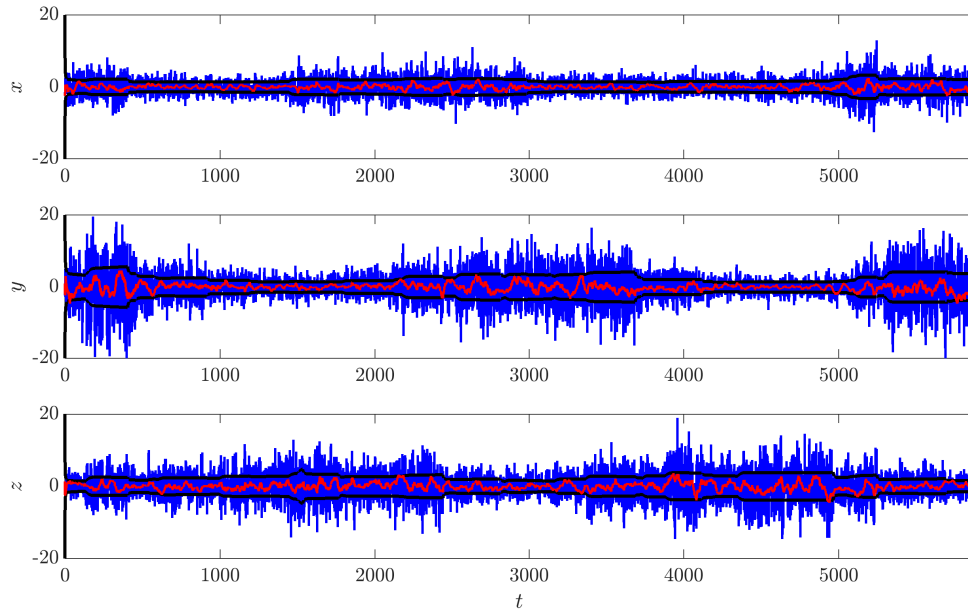
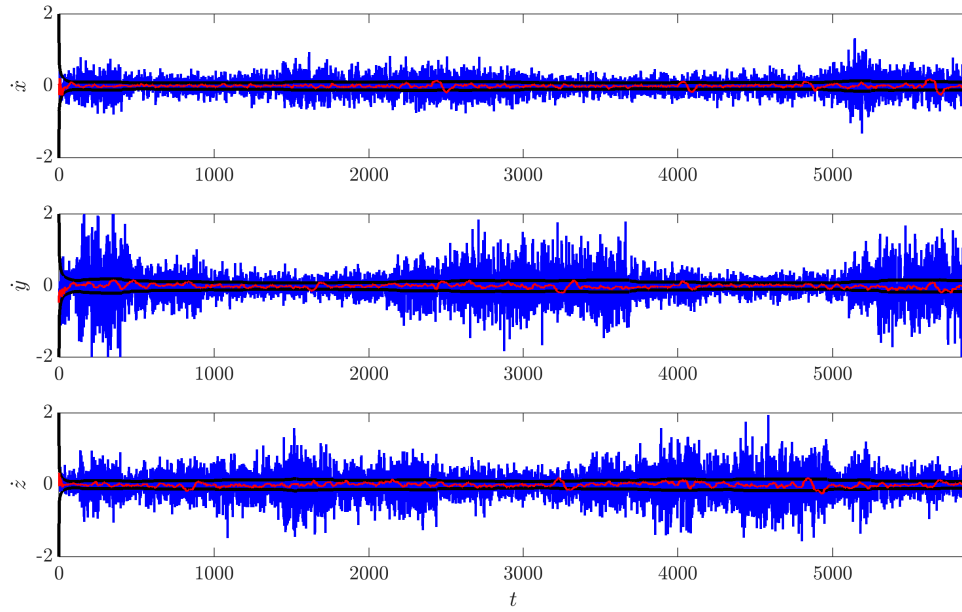


Figura D.8: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,0 \times 10^{-2}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.9: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

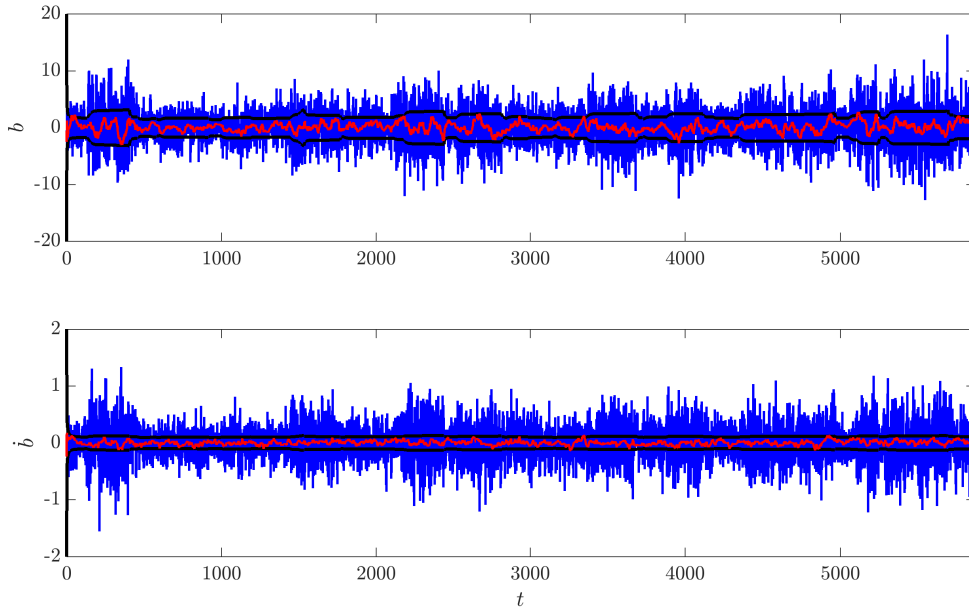


Figura D.10: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

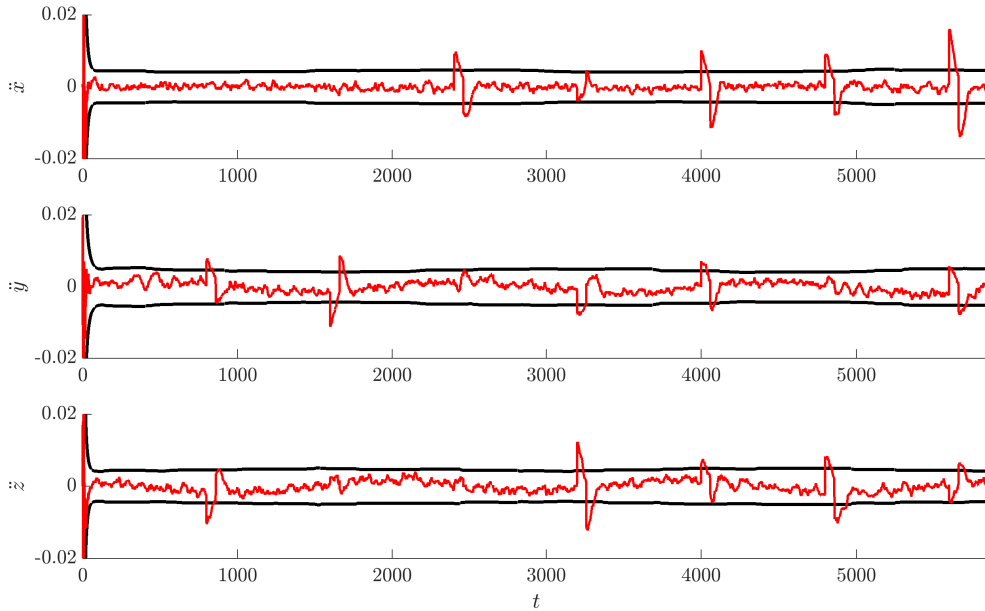
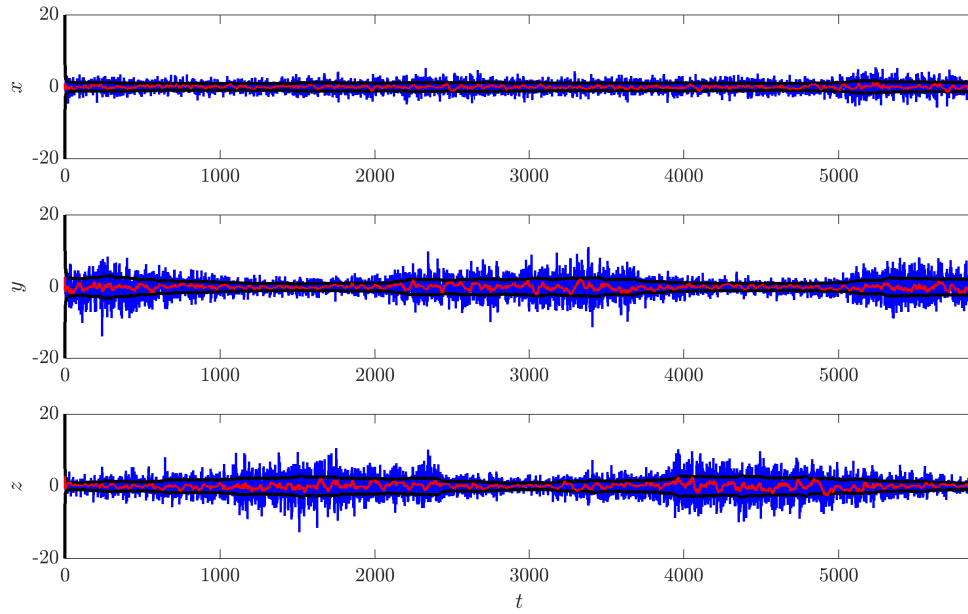
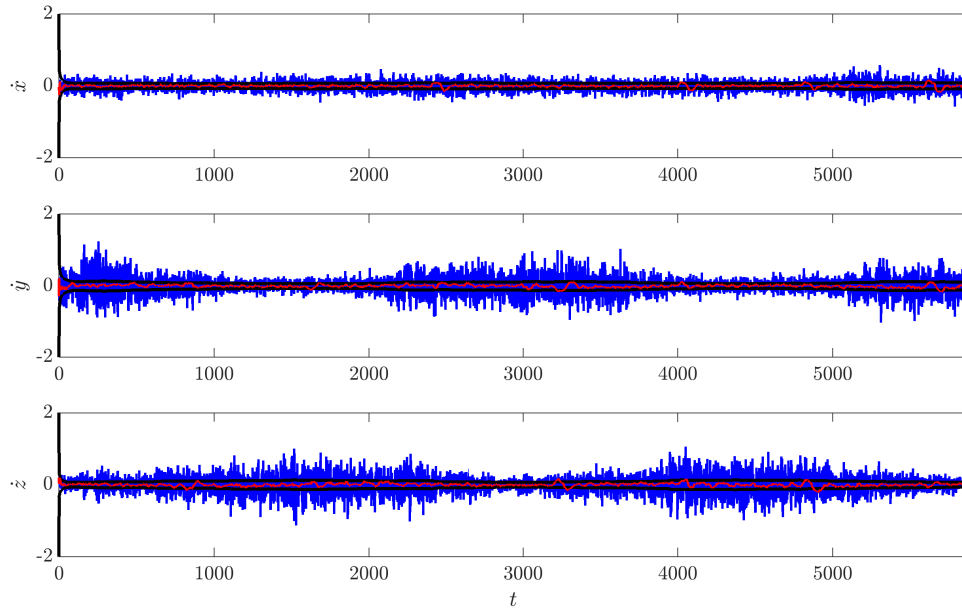


Figura D.11: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.12: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

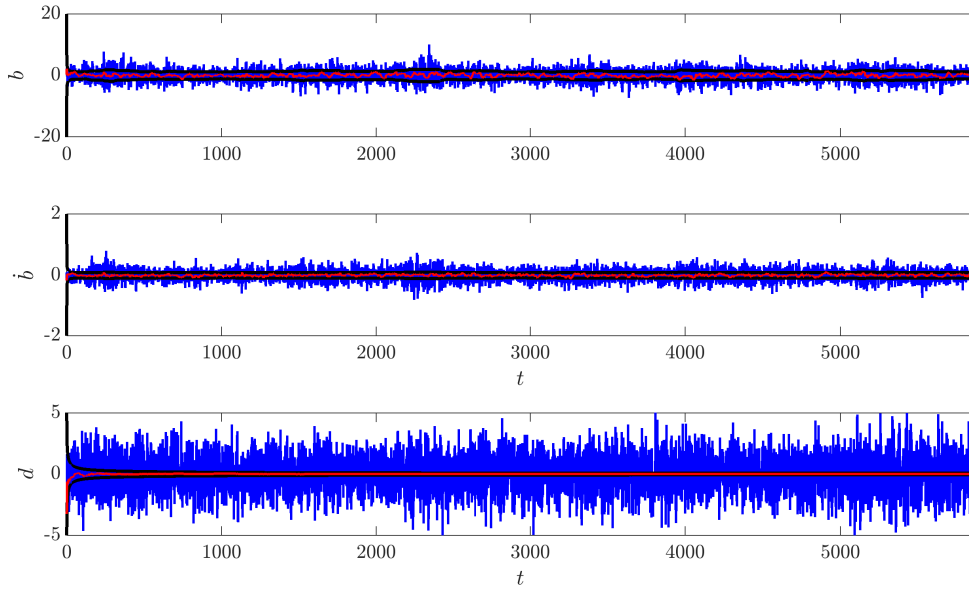


Figura D.13: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

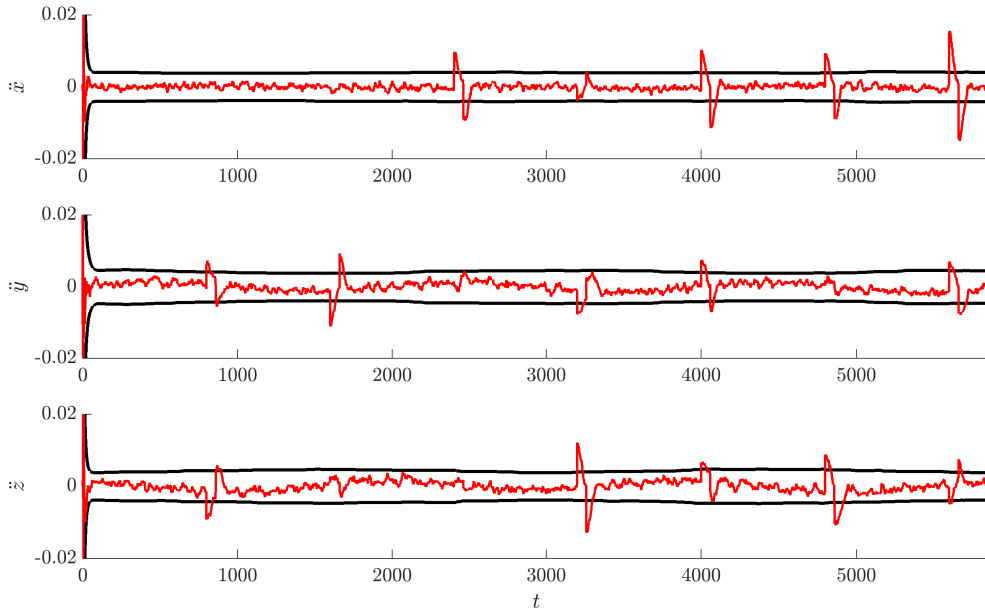
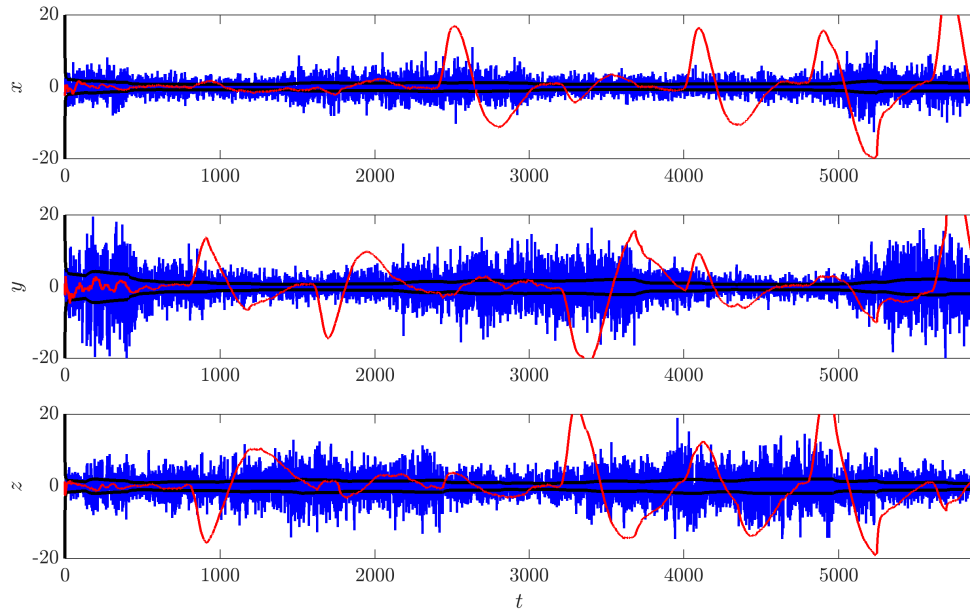
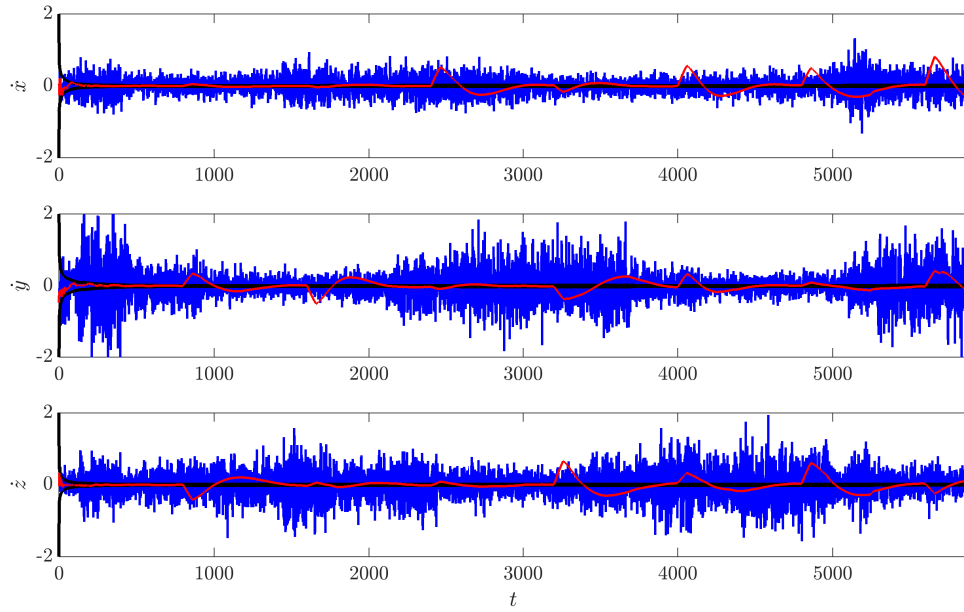


Figura D.14: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.15: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

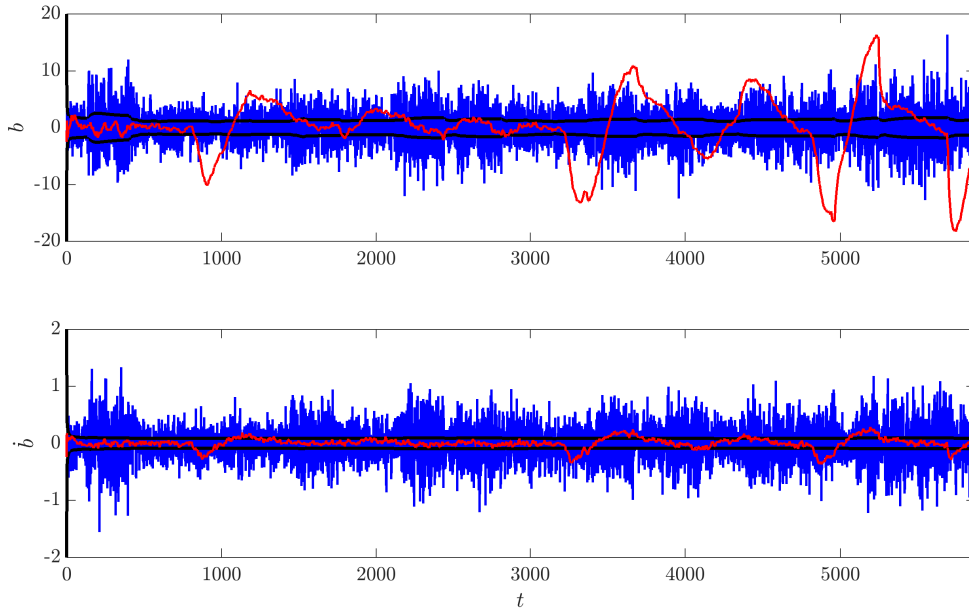


Figura D.16: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

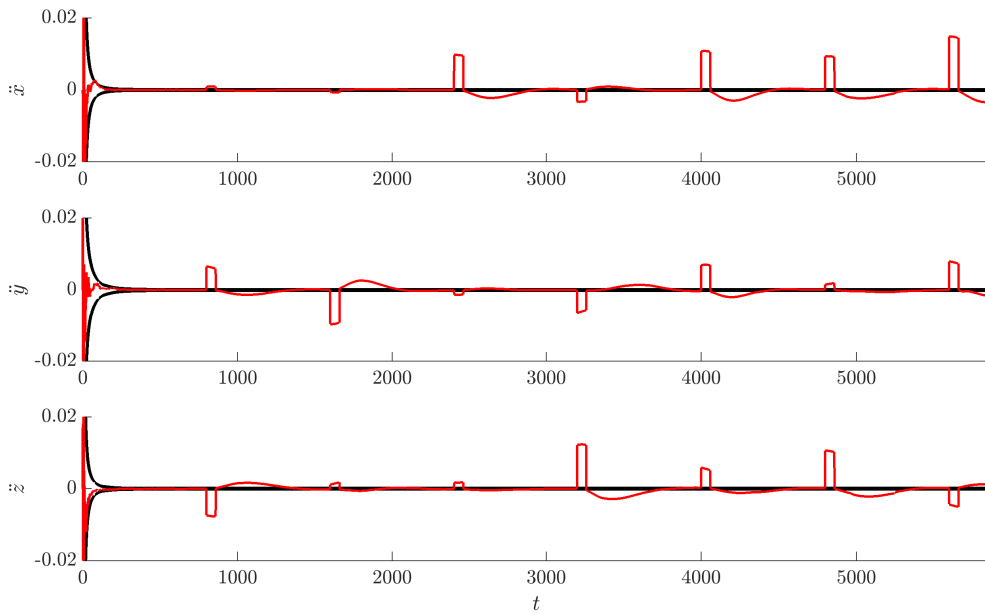
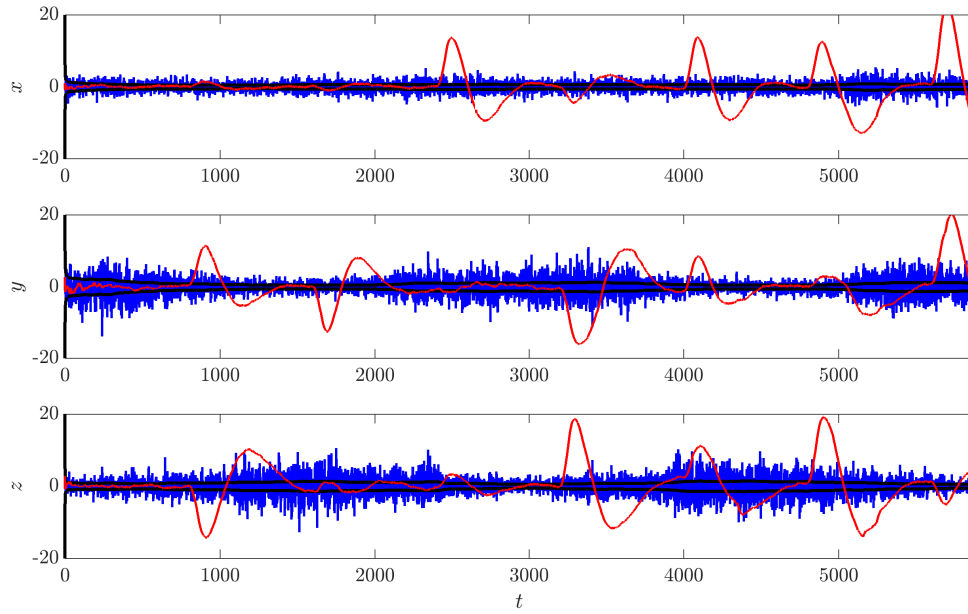
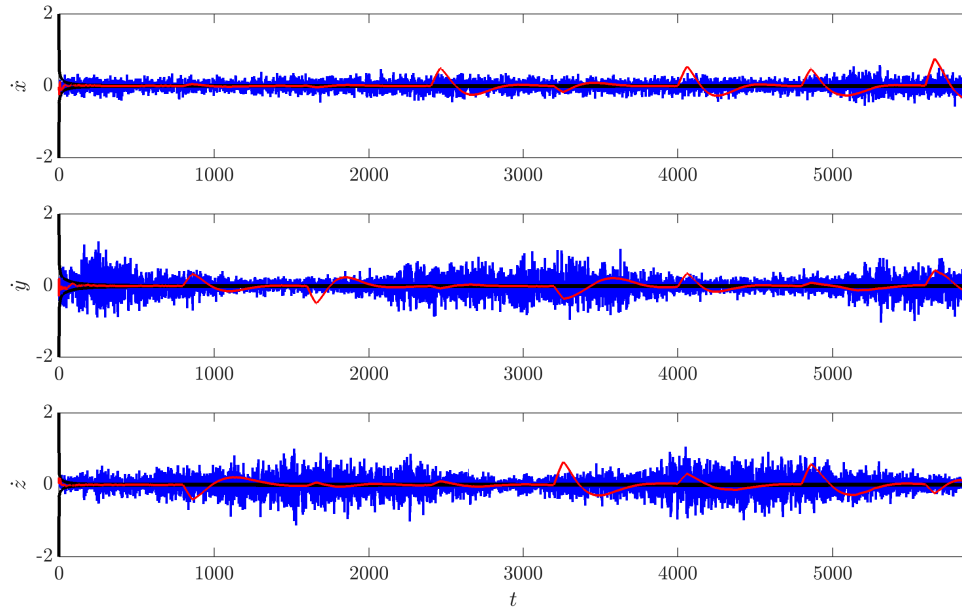


Figura D.17: Error en las soluciones aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.18: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (---); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

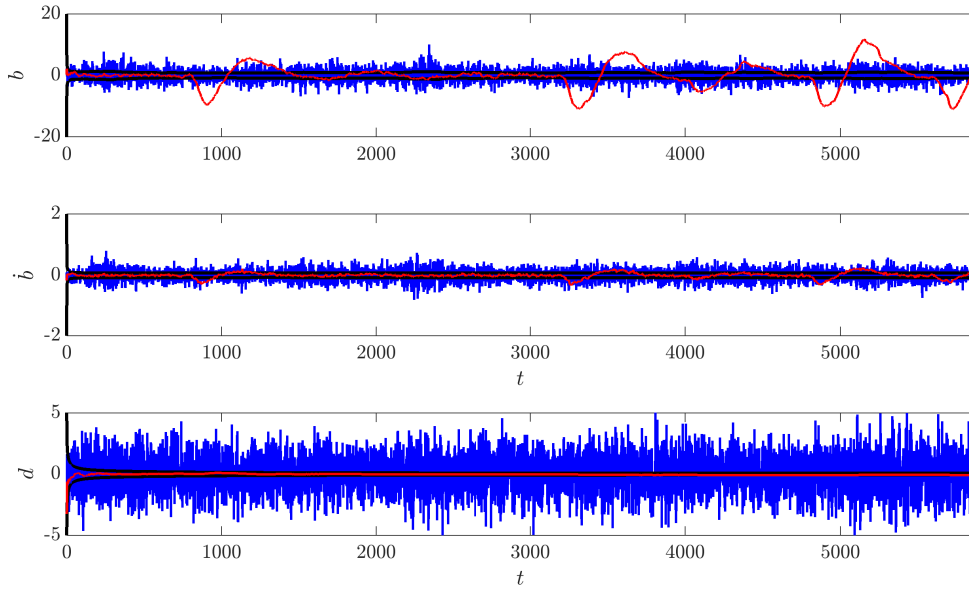


Figura D.19: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

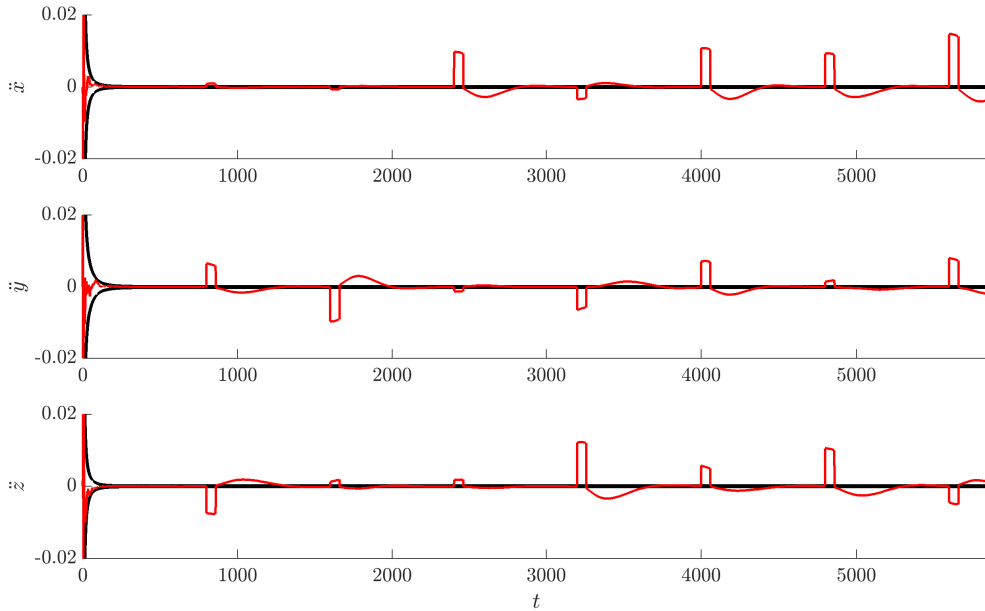
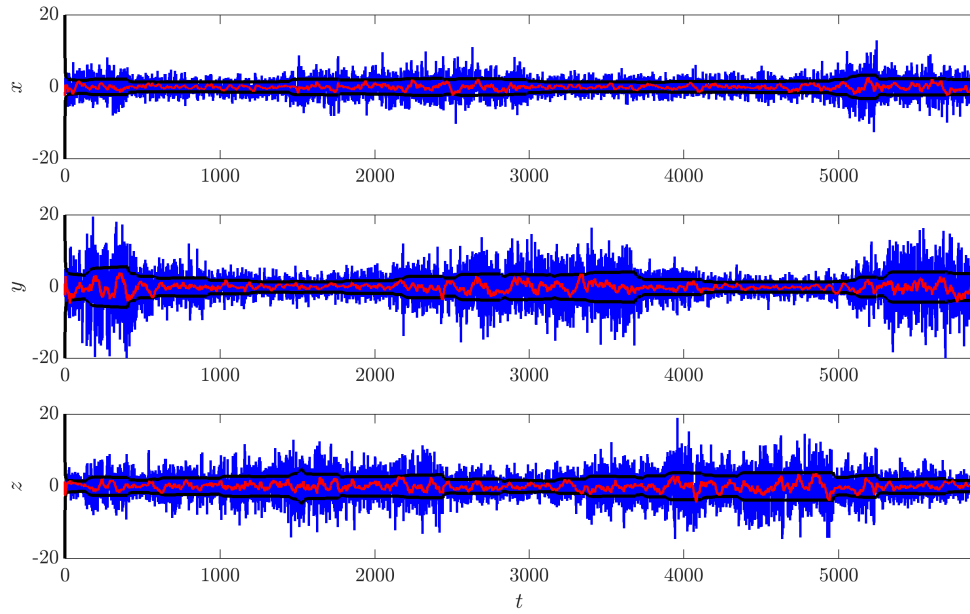
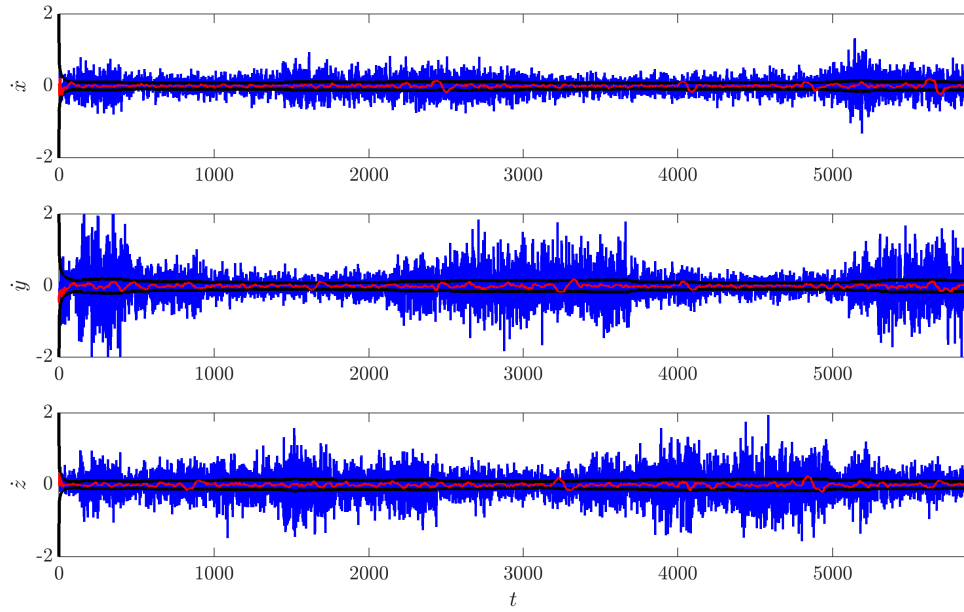


Figura D.20: Error en las soluciones aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.21: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

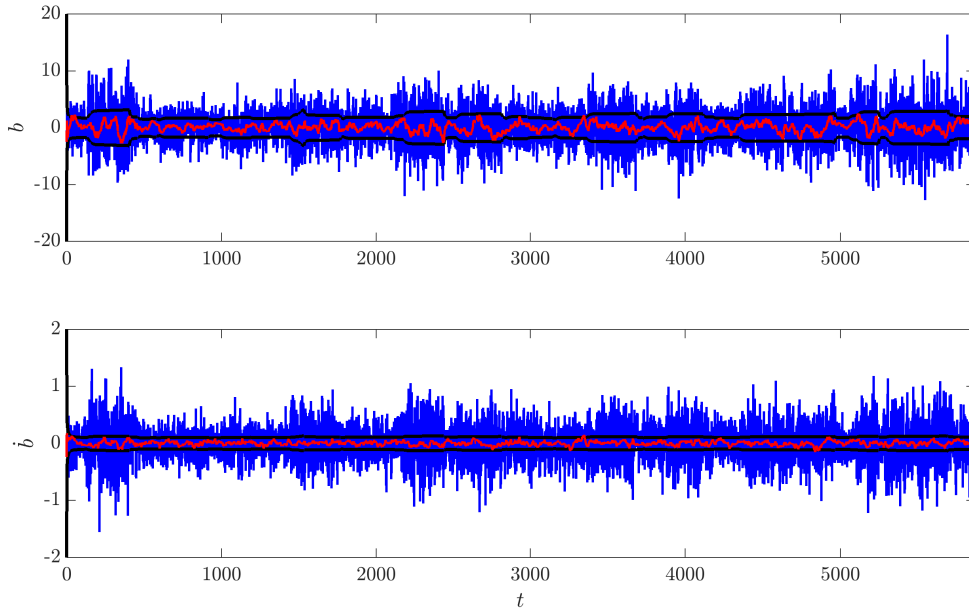


Figura D.22: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

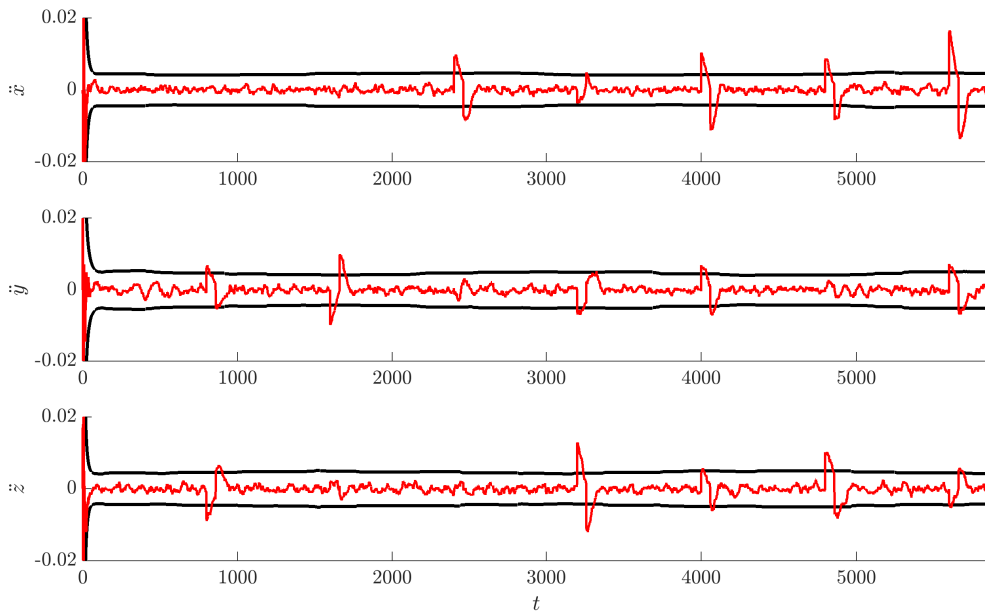
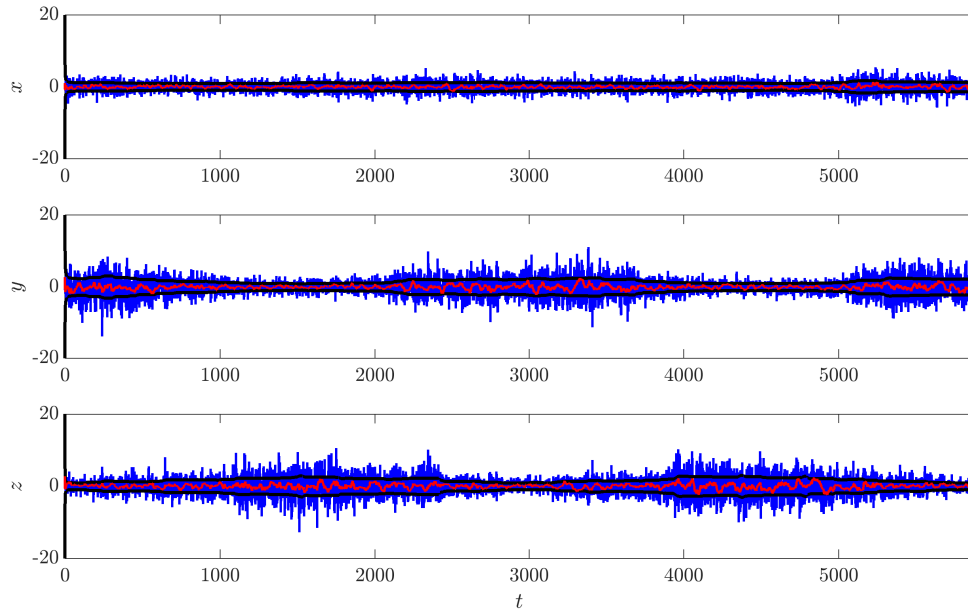
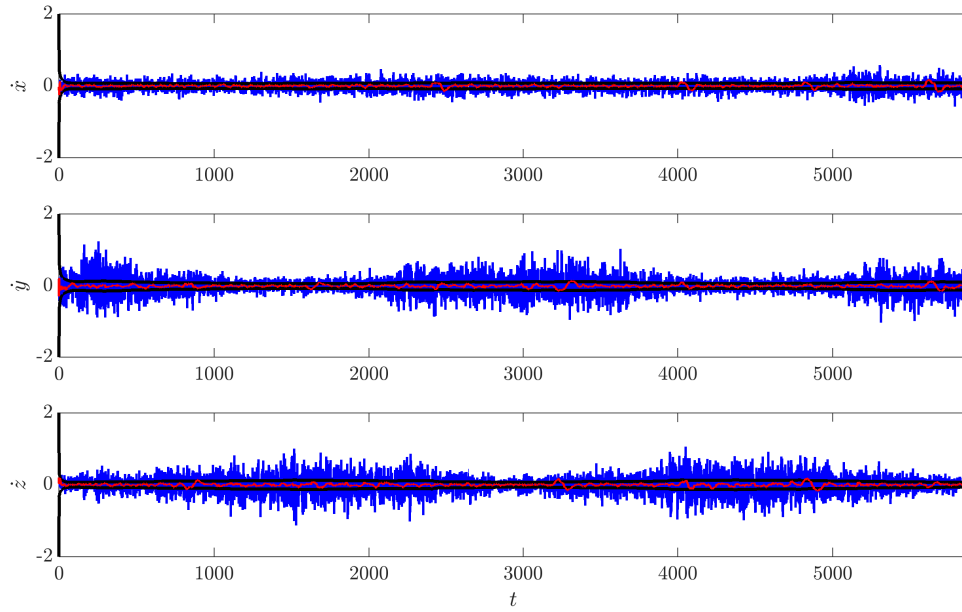


Figura D.23: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.24: Error en las soluciones de posición y velocidad con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

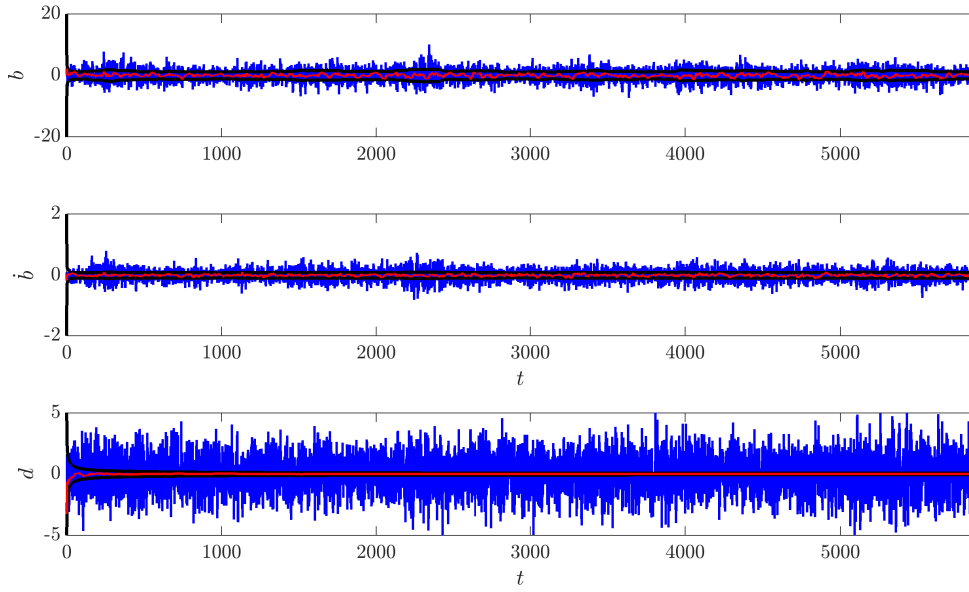


Figura D.25: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

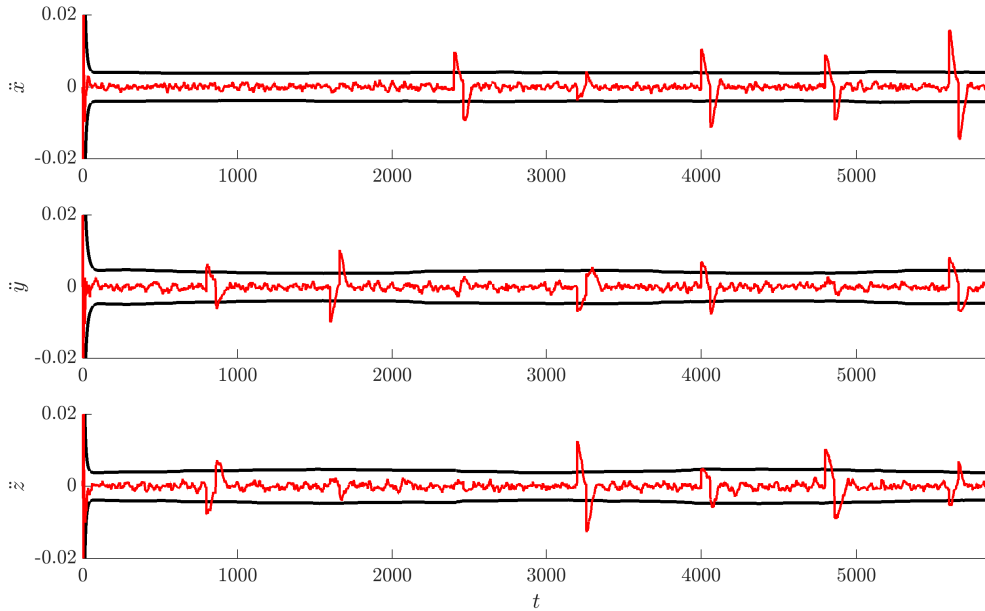


Figura D.26: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de perturbaciones de *thrust*.

D.3. Pérdida de Satélites. Caso GLONASS

Al igual que lo analizado en el caso de utilizar mediciones de únicamente el sistema GPS, sección 9.2, analizaremos como operan las estrategias de filtrado en situaciones de pérdida de satélites en el caso de utilizar mediciones del sistema GLONASS. Para ello se plantea un escenario en el que se cuenta con un máximo de tan solo cuatro satélites GLONASS disponibles en todo instante. Además, en determinados instantes se reduce la cantidad de satélites por debajo de este número, como se muestra en la figura D.27.

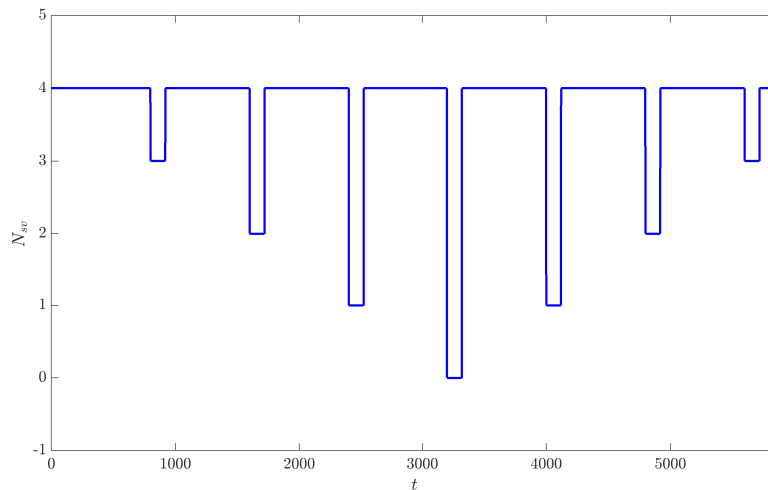


Figura D.27: Cantidad de satélites visibles del sistema GLONASS.

En las figuras D.28 y D.29 se presentan los resultados de error de estimación que se obtienen utilizando el modelo Cinemático I en esta situación. A modo de comparación, también se incluye el resultado de solución puntual, pero considerando en este caso que en todos los instantes se cuenta con cuatro satélites², ya que en caso contrario no sería posible obtener la solución puntual.

Se observa que en los intervalos en los que se tiene pérdida de satélites el error de estimación se incrementa notoriamente. Únicamente en los casos en los que se cuenta con 3 satélites podemos considerar que el error resulta aceptable (se prefiere no aumentar los límites de graficación para que se note en detalle este caso).

En las figuras D.30, D.31 y D.32 se presentan los resultados para el modelo Cinemático II. Se observa que si bien el error es menor que en el caso anterior, el comportamiento resulta poco aceptable.

En las figuras D.33 y D.34 se presentan los resultados para el modelo Dinámico I. Se observa que en este caso el desempeño es muy superior, manteniéndose el error de velocidad prácticamente por debajo del error en la solución puntual.

Finalmente, en las figuras D.35, D.36, D.37, D.38, D.39, D.40, D.41 y D.42 se presentan

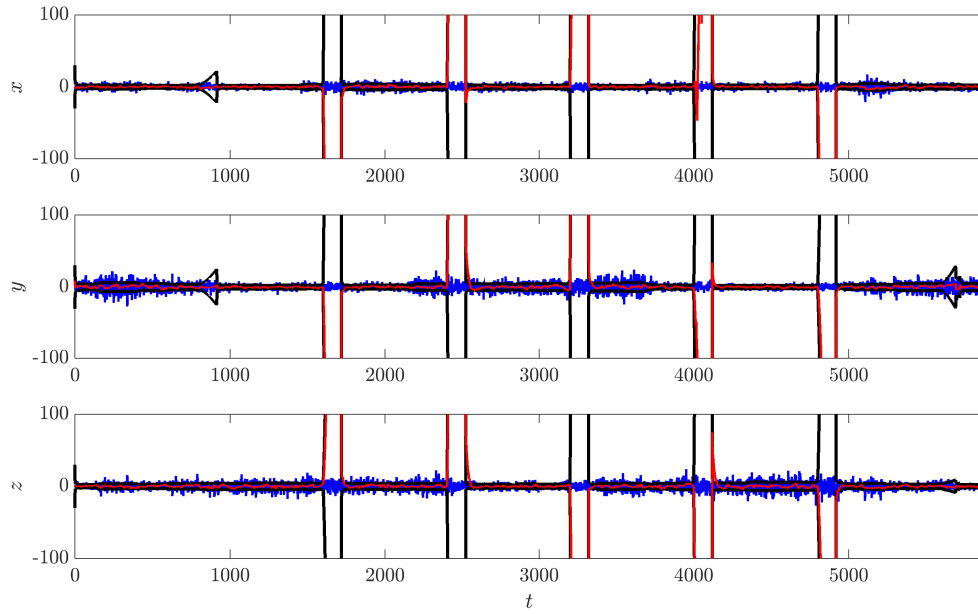
²En caso que para el EKF se utilicen cuatro satélites, son los mismos que los utilizados en la solución puntual. En caso que en el EKF se cuente con menos de cuatro satélites, estos son un subconjunto de los cuatro utilizados en la solución puntual.

los resultados para los modelos Dinámico II, Dinámico III y Dinámico IV. En primer lugar se puede observar que mientras en los modelos Dinámico II y Dinámico IV prácticamente no se altera el comportamiento, quedando casi en todos los casos el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico por debajo del error en la solución puntual. El comportamiento observado se explica en función de la mayor exactitud del modelo implementado en el EKF, que permite confiar en el mismo aún en ausencia de mediciones.

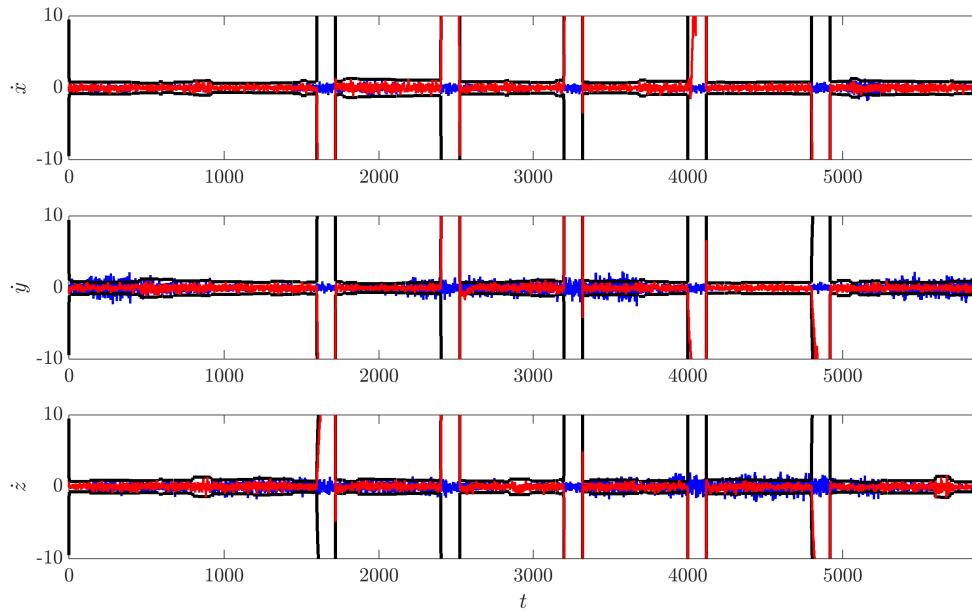
En segundo lugar se observa que si bien el modelo Dinámico III presenta un peor comportamiento que estos dos anteriores, su desempeño es mucho mejor que el logrado por el modelo Dinámico I. Si bien en este caso el modelo es de menor exactitud, contar con una estimación de la aceleración permite propagar los estados con un error menor (durante un intervalo corto de tiempo), aún en ausencia de mediciones.

Para apreciar mejor el comportamiento de la solución filtrada, en las figuras [D.43](#), [D.44](#), [D.45](#), [D.46](#) y [D.47](#) se muestra el error para los modelos Dinámico II y Dinámico IV con otros márgenes de graficación.

A partir de este análisis se evidencia un comportamiento similar al observado en la sección [9.2](#) para el caso de utilizar el sistema GPS.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.28: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 5,5$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

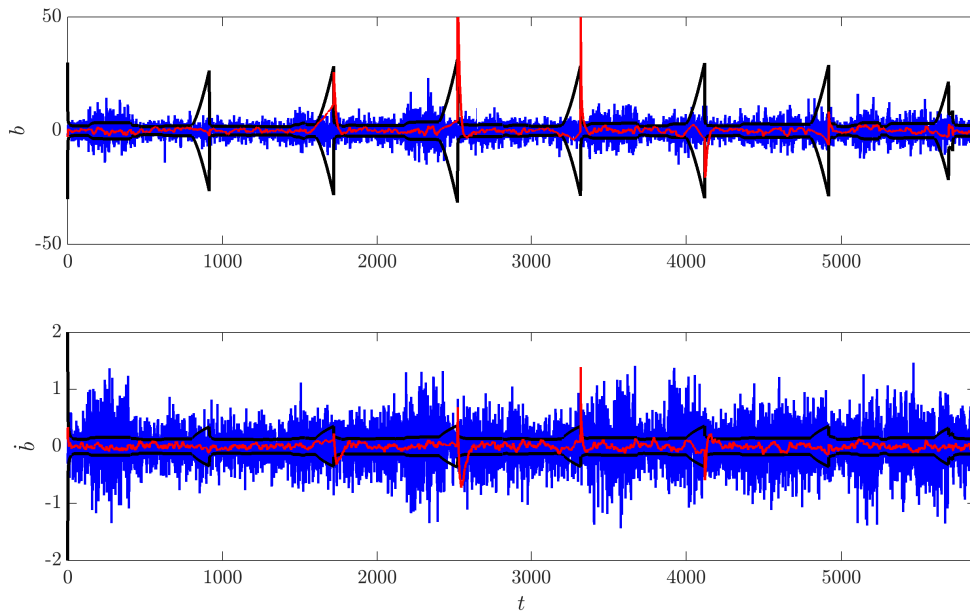
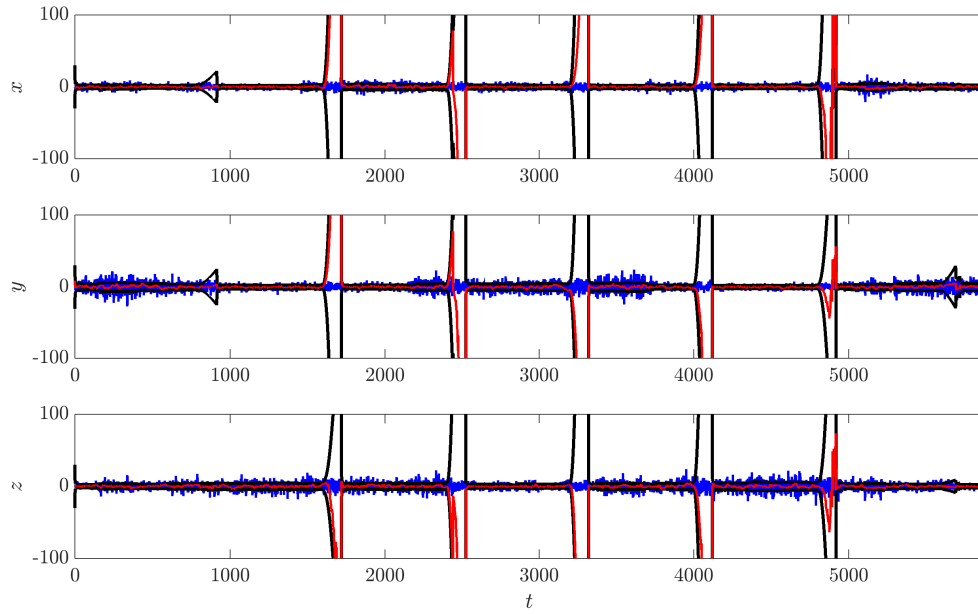
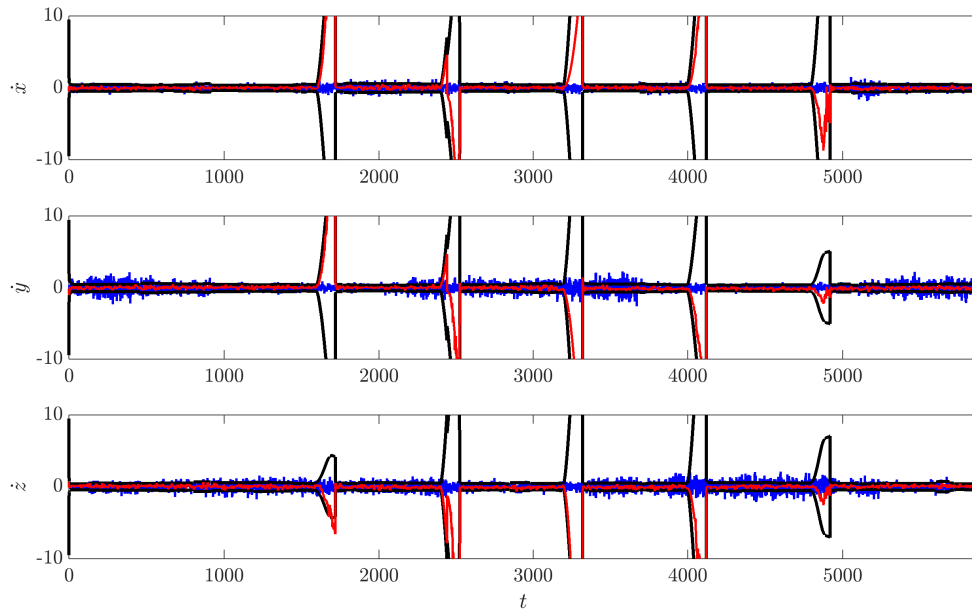


Figura D.29: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 5,5$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.30: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{y}} = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

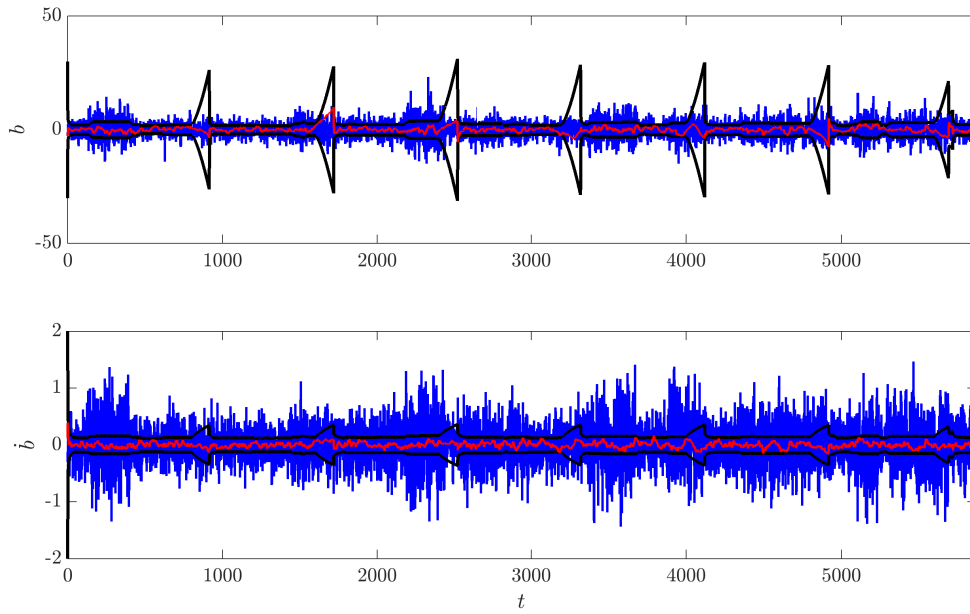


Figura D.31: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

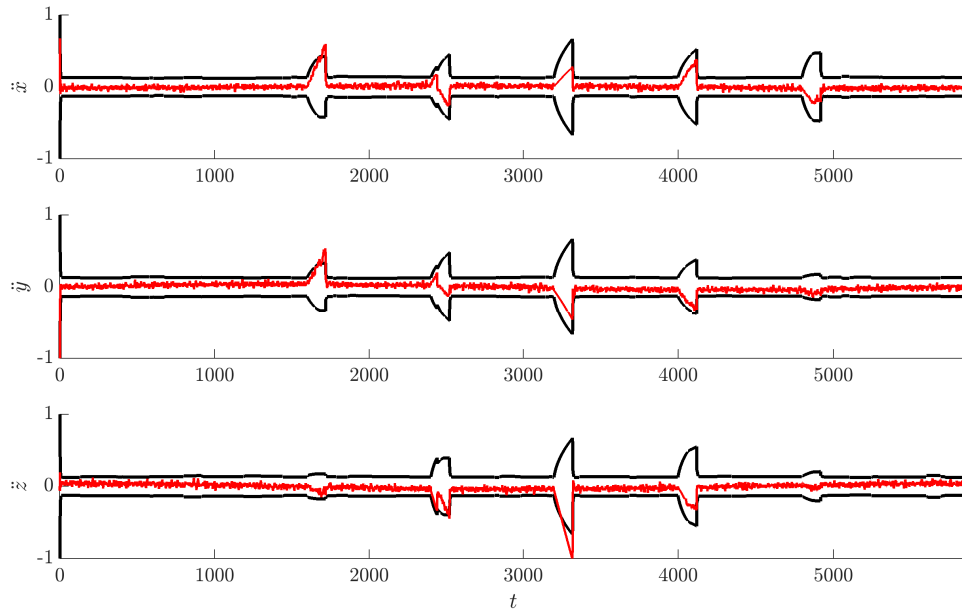
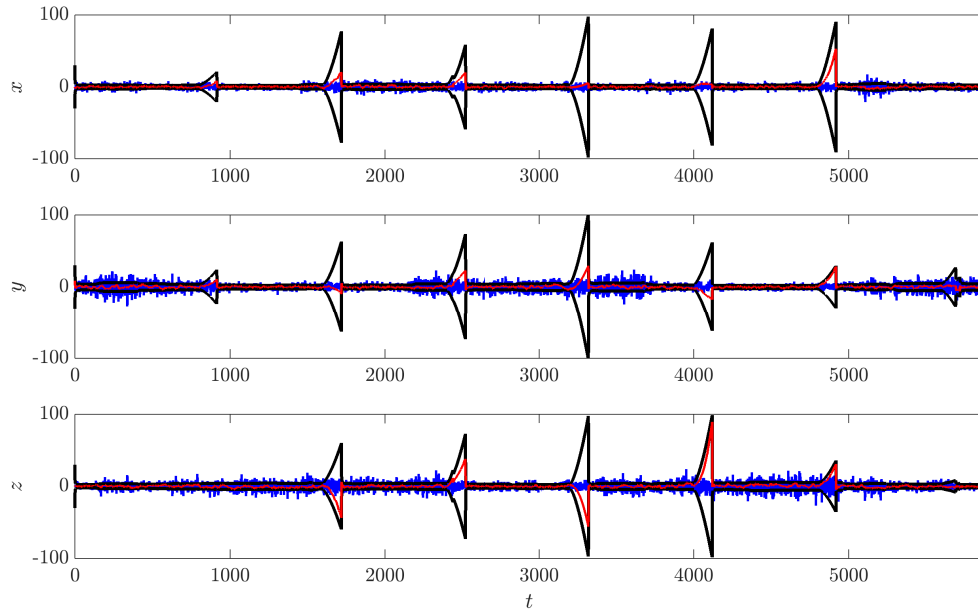
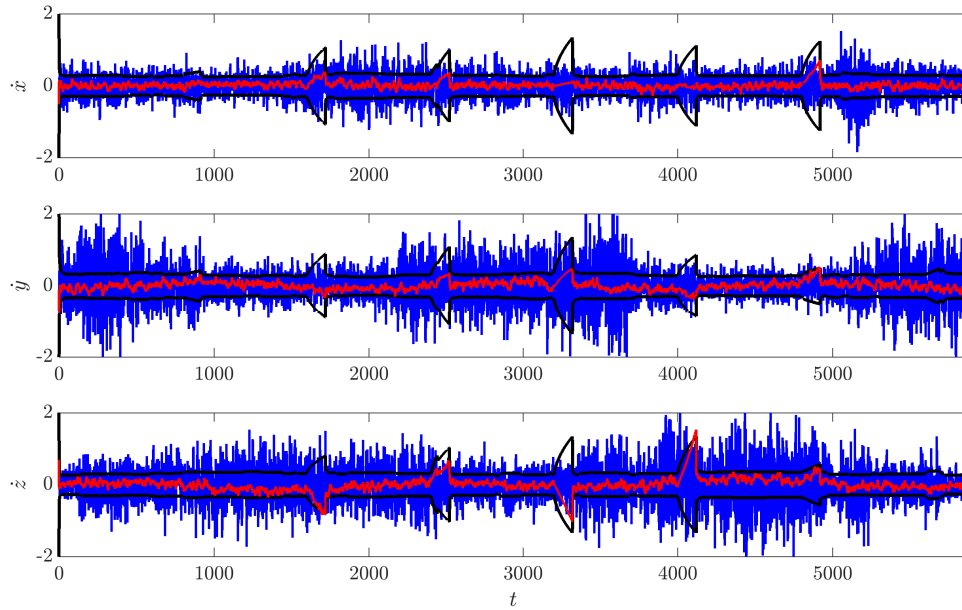


Figura D.32: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,02$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.33: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

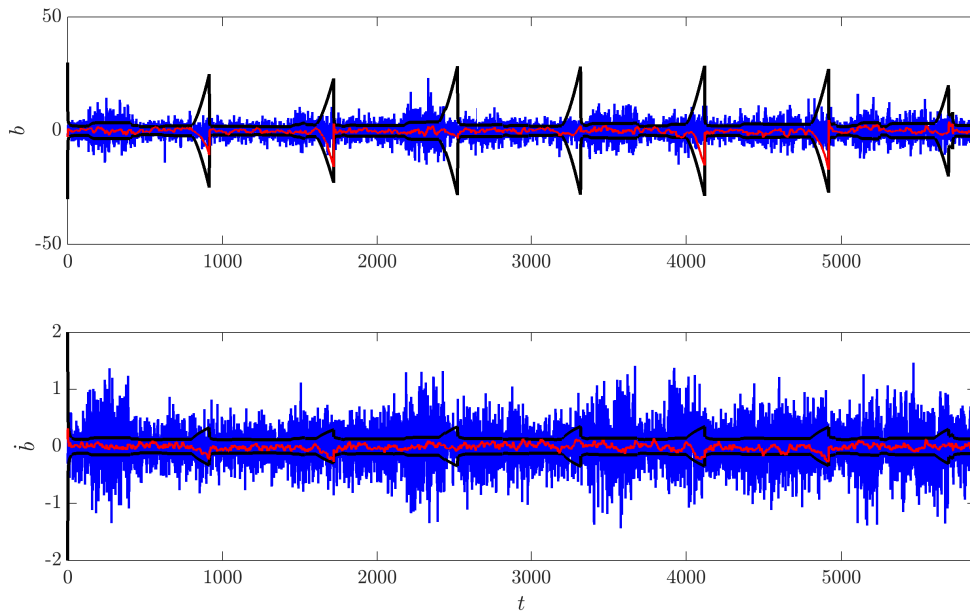
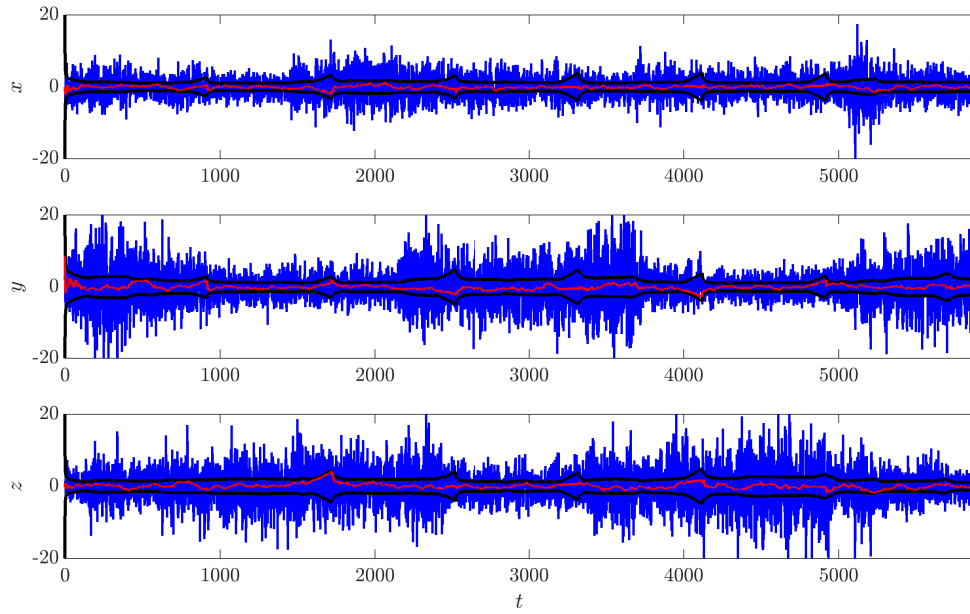
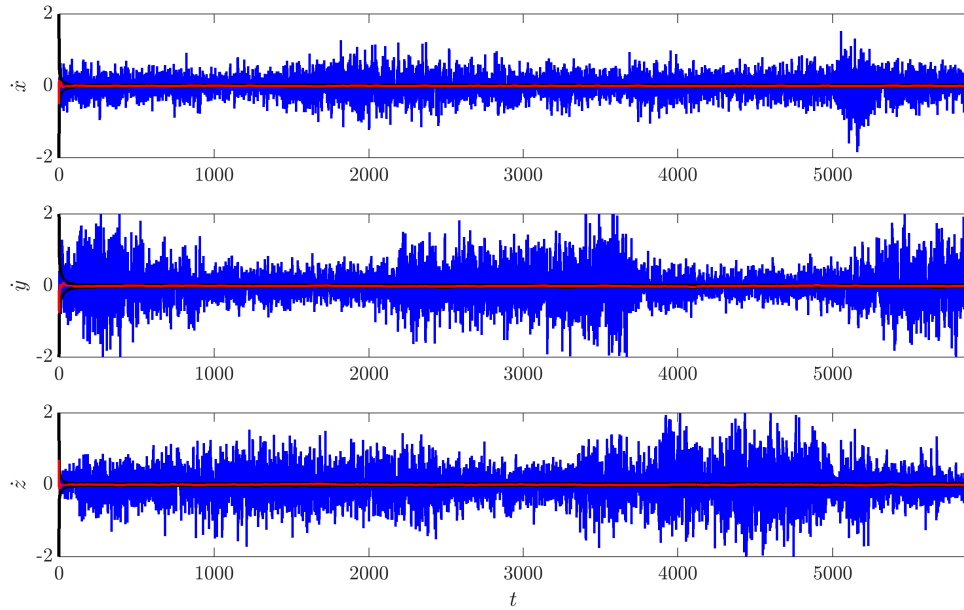


Figura D.34: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,04$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.35: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\tilde{b}} = 0,01$, $\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{\tilde{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

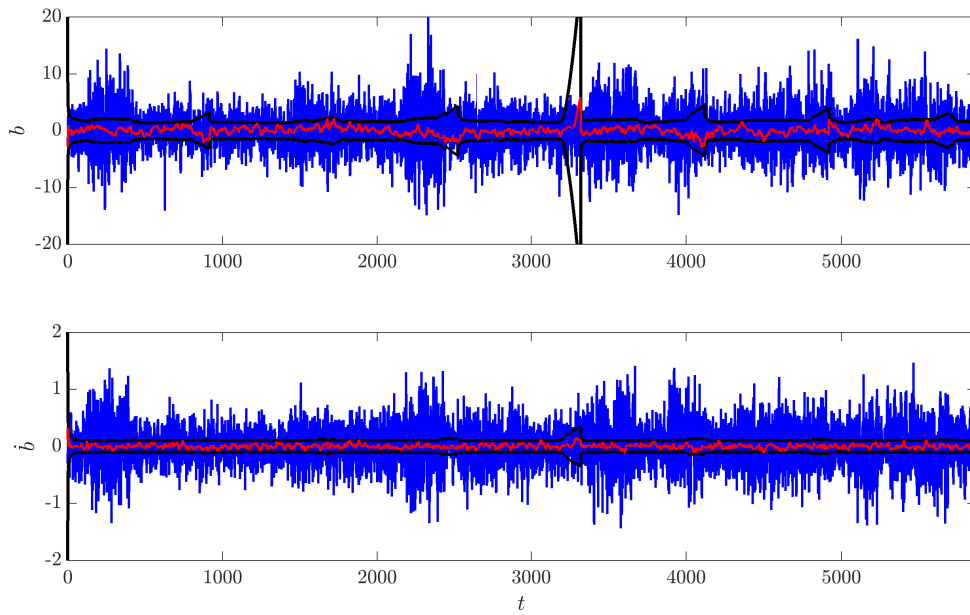
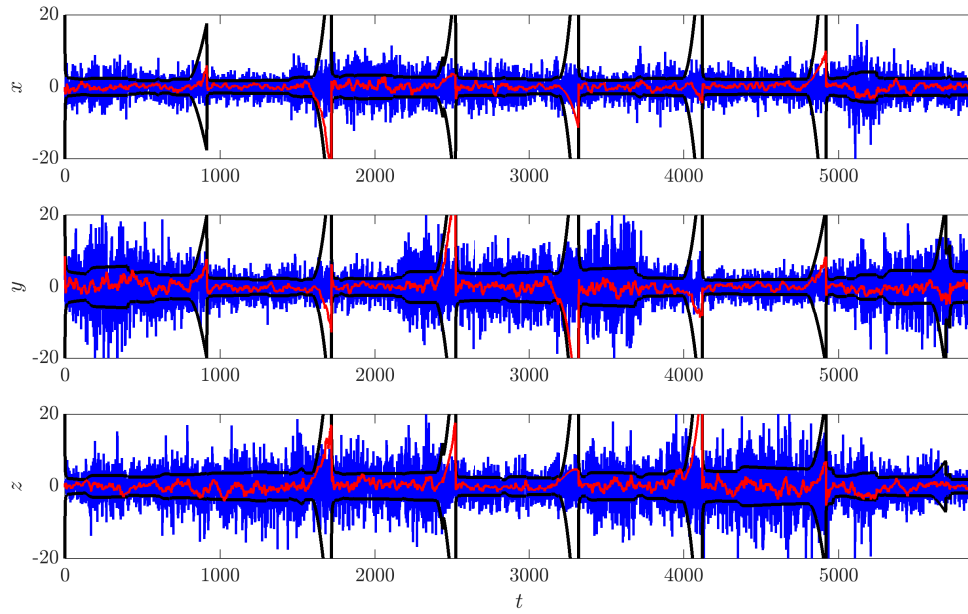
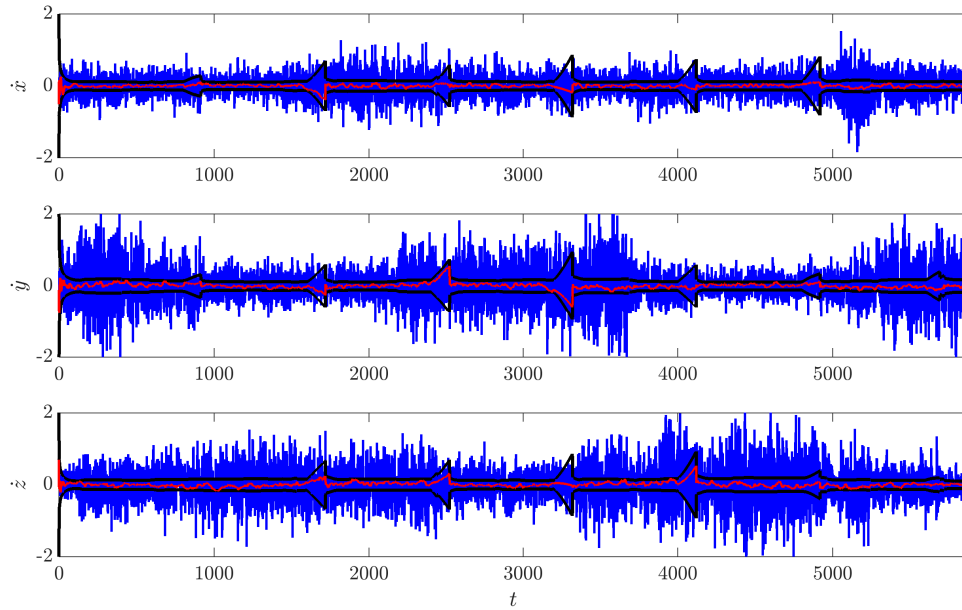


Figura D.36: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.37: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{i}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

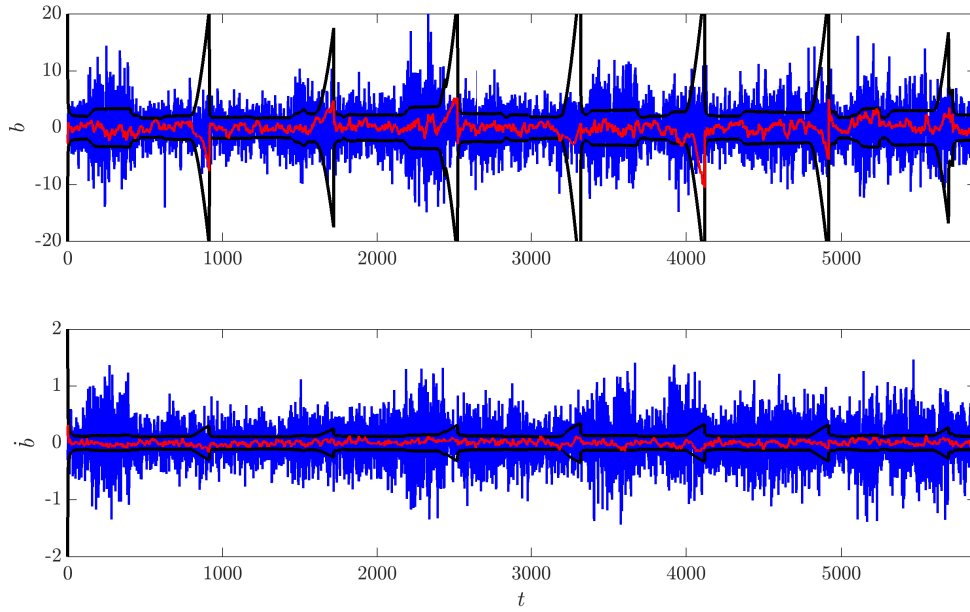


Figura D.38: Error en las soluciones de sesgo y deriva con la solución puntual (—) y con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

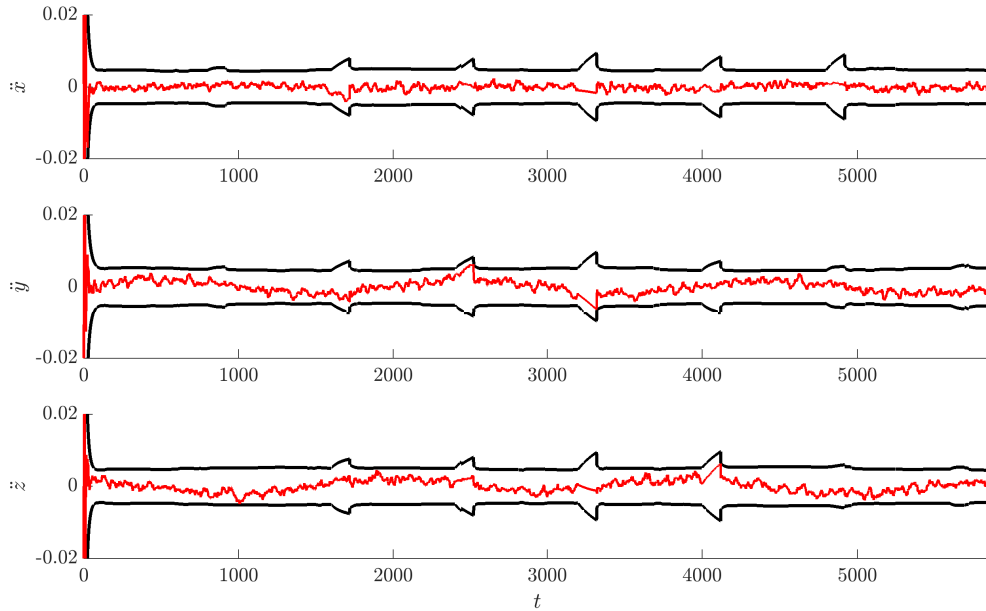
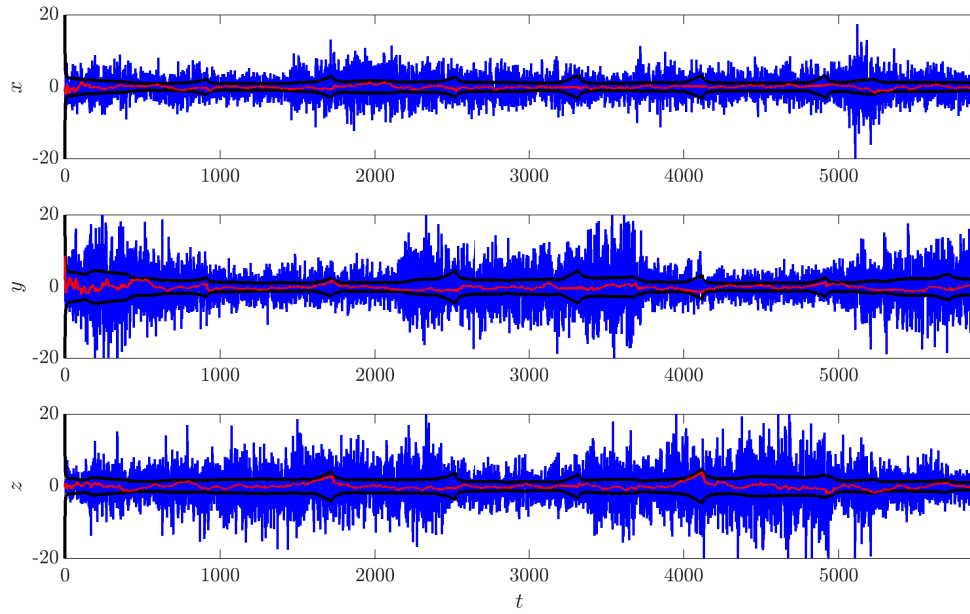
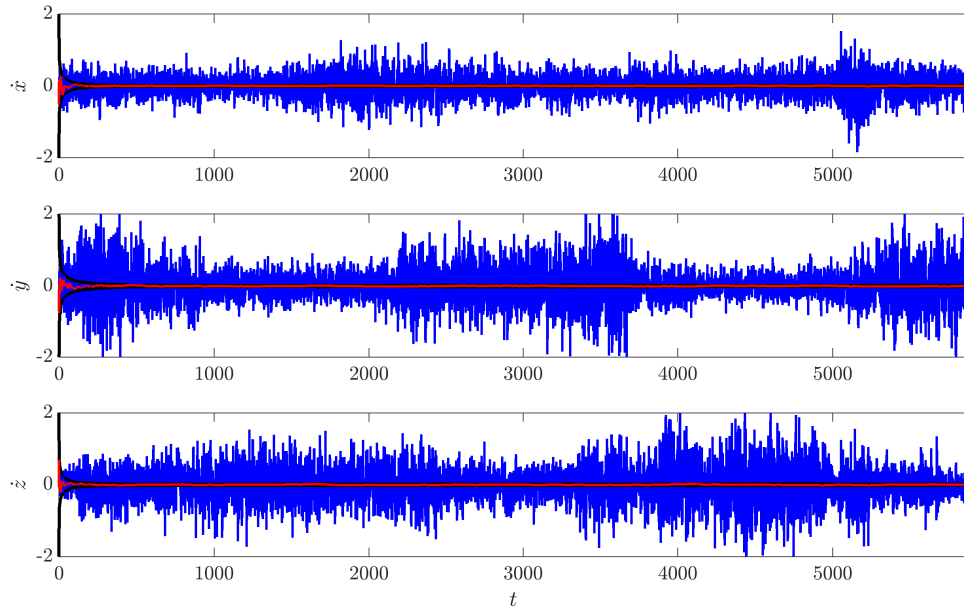


Figura D.39: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.40: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{i}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

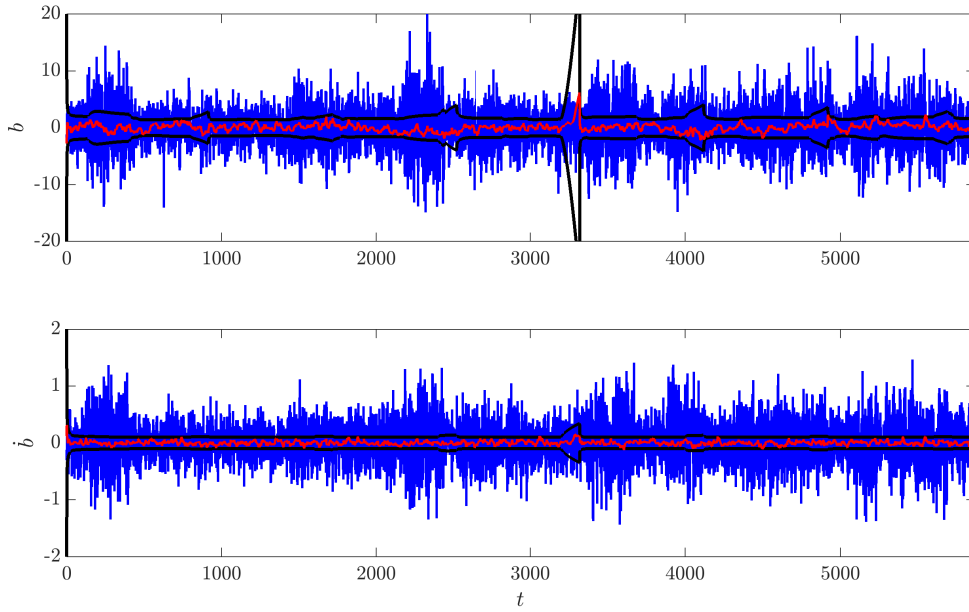


Figura D.41: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 4 satélites (—).

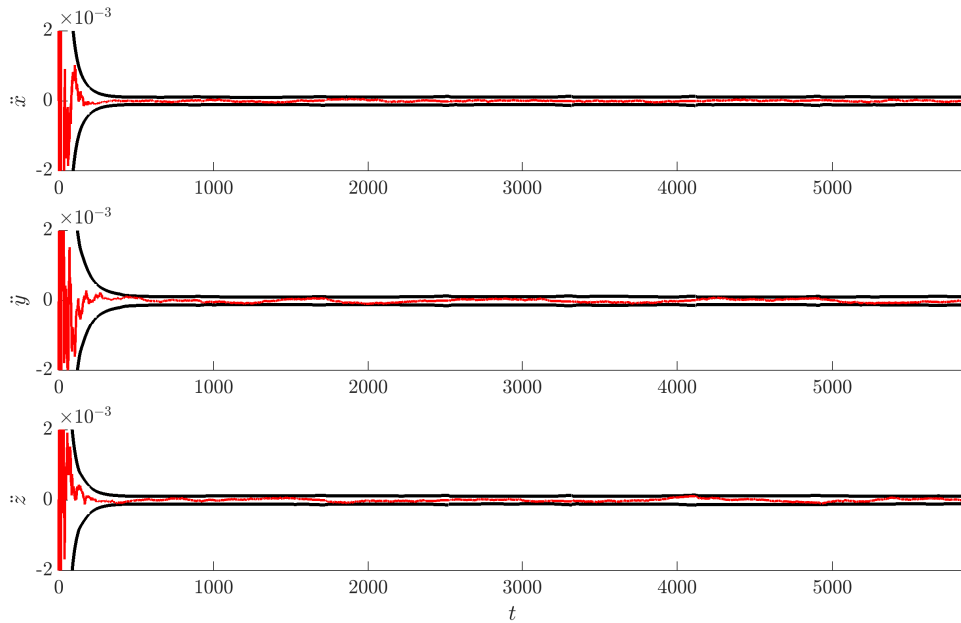
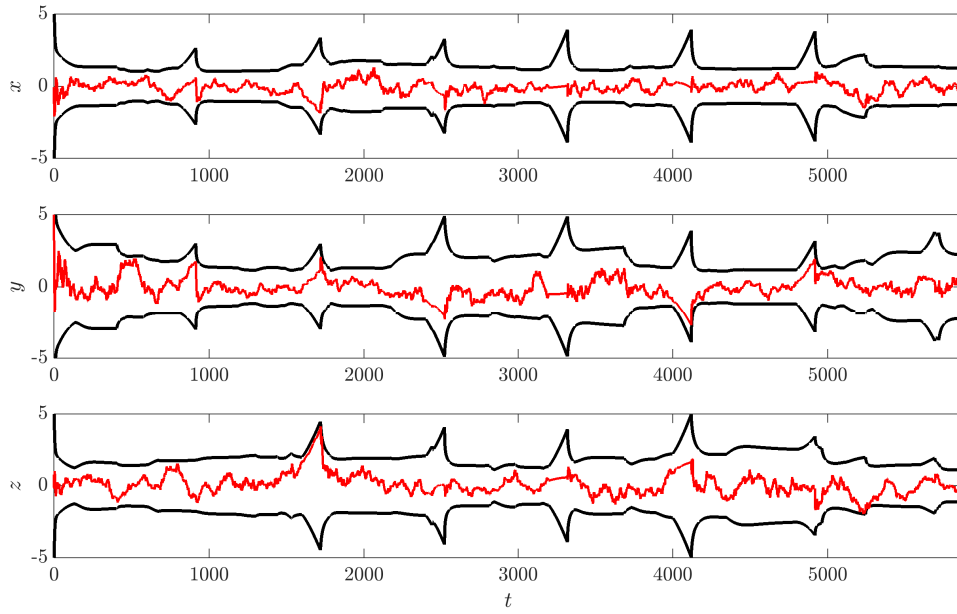
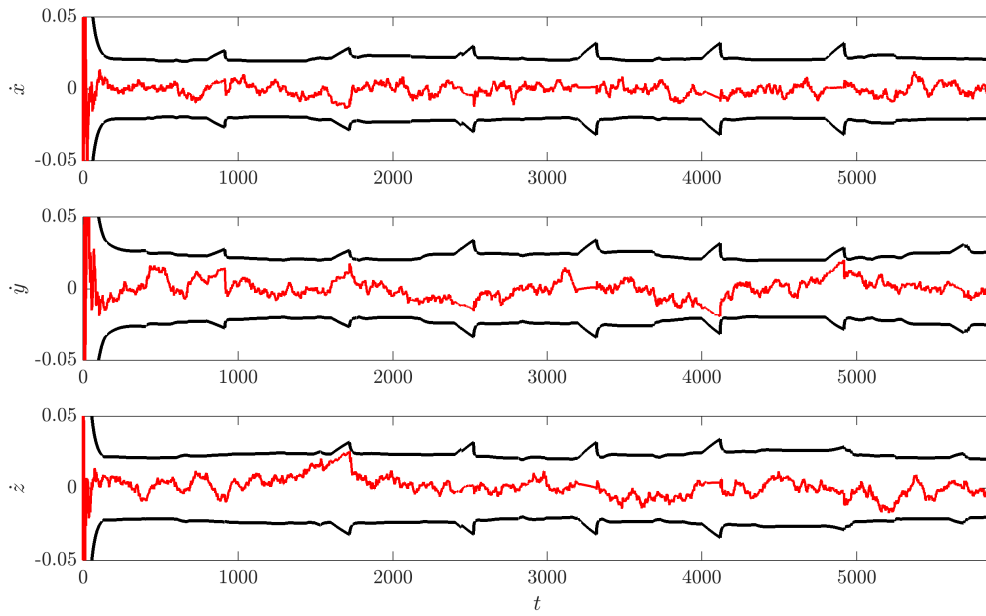


Figura D.42: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.43: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

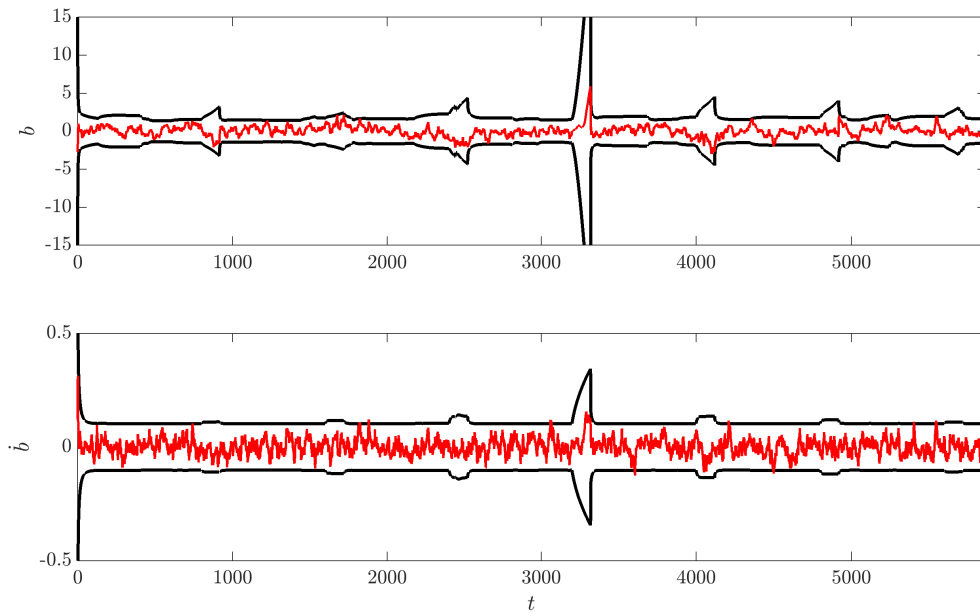
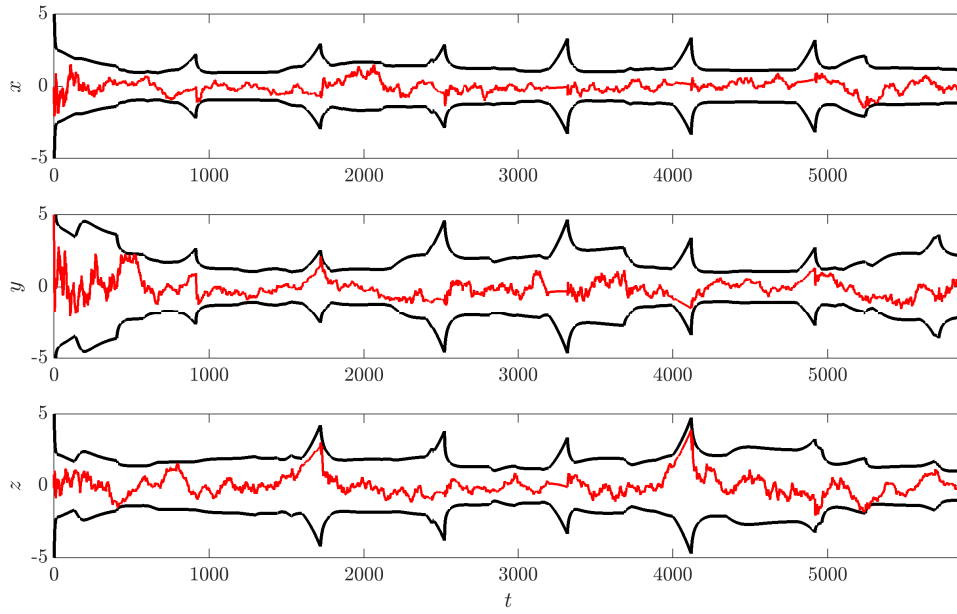
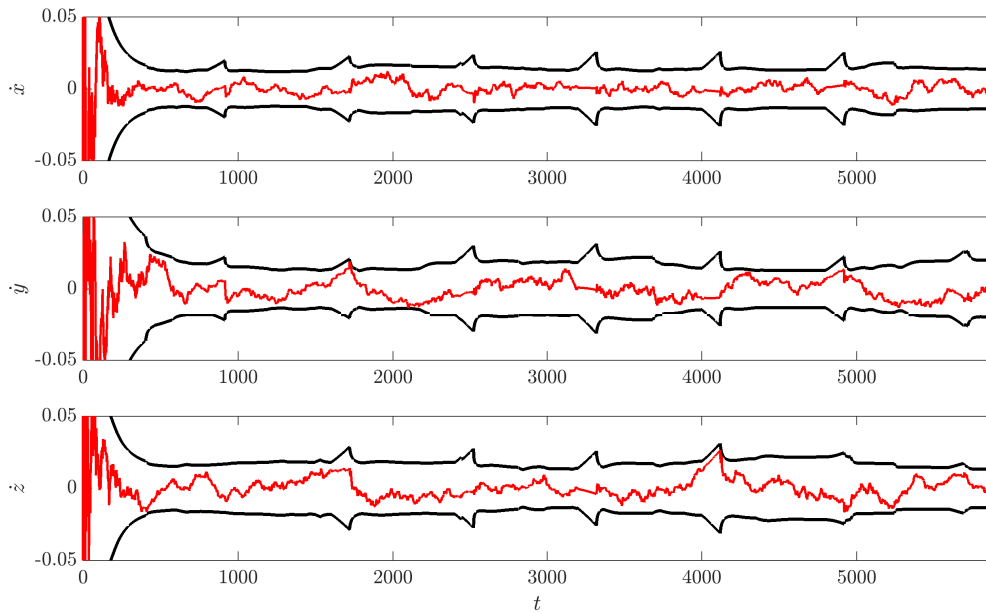


Figura D.44: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistema GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.45: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\hat{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación).

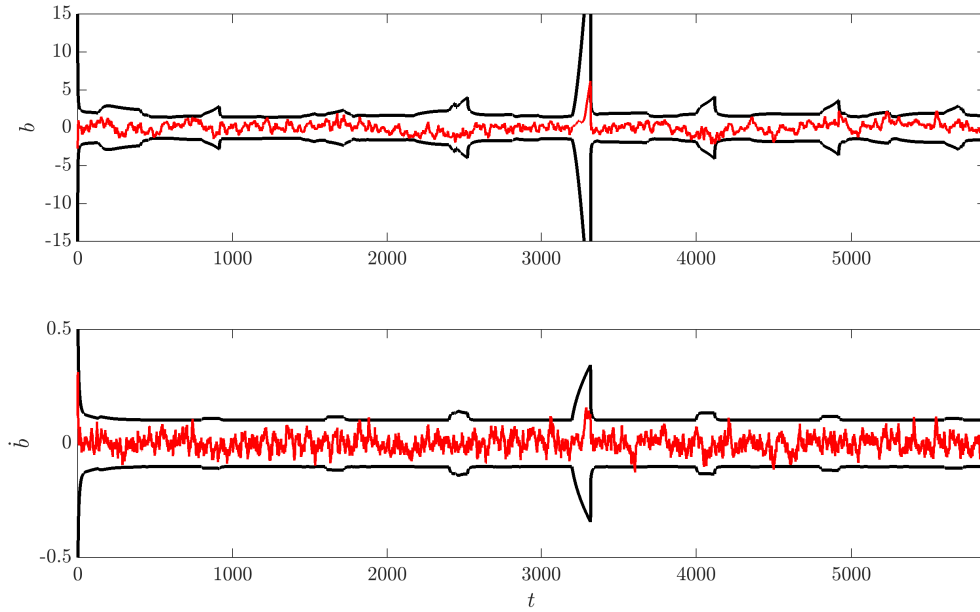


Figura D.46: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

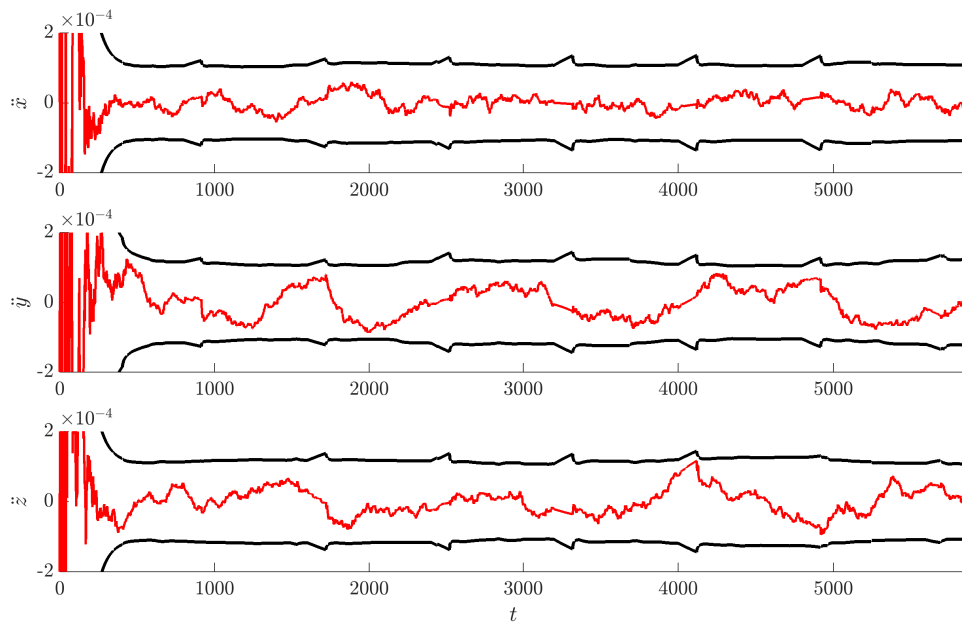


Figura D.47: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistema GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

D.4. Pérdida de Satélites. Caso GPS y GLONASS

Al igual que lo analizado en el caso de utilizar mediciones de únicamente el sistema GPS, sección 9.2, o en caso de utilizar mediciones de únicamente el sistema GLONASS, sección D.3, analizaremos como operan las estrategias de filtrado en situaciones de pérdida de satélites en el caso de utilizar mediciones conjuntas de los sistemas GPS y GLONASS. Para ello se plantea un escenario en el que se cuenta con un máximo de tan solo cinco satélites, tres de GPS y dos de GLONASS disponibles en todo instante. Además, en determinados instantes se reduce la cantidad de satélites por debajo de este número, como se muestra en la figura D.48.

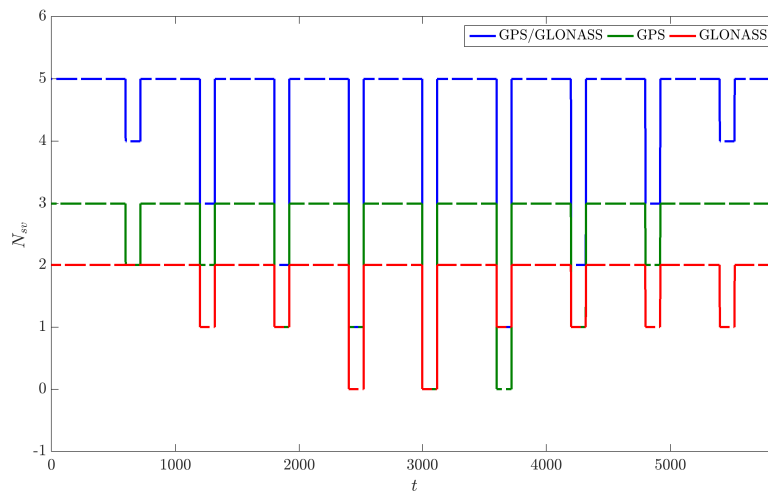


Figura D.48: Cantidad de satélites visibles de los sistemas GPS y GLONASS.

En las figuras D.49 y D.50 se presentan los resultados de error de estimación que se obtienen utilizando el modelo Cinemático I en esta situación. A modo de comparación, también se incluye el resultado de solución puntual, pero considerando en este caso que en todos los instantes se cuenta con cinco satélites³, ya que en caso contrario no sería posible obtener la solución puntual.

Se observa que en los intervalos en los que se tiene pérdida de satélites el error de estimación se incrementa notoriamente. Únicamente en los casos en los que se cuenta con 4 ó 3 satélites podemos considerar que el error resulta aceptable (se prefiere no aumentar los límites de graficación para que se note en detalle este caso).

En las figuras D.51, D.52 y D.53 se presentan los resultados para el modelo Cinemático II. Se observa que si bien el error es menor que en el caso anterior, el comportamiento resulta poco aceptable.

En las figuras D.54 y D.55 se presentan los resultados para el modelo Dinámico I. Se observa que en este caso el desempeño es muy superior, manteniéndose el error de velocidad prácticamente por debajo del error en la solución puntual.

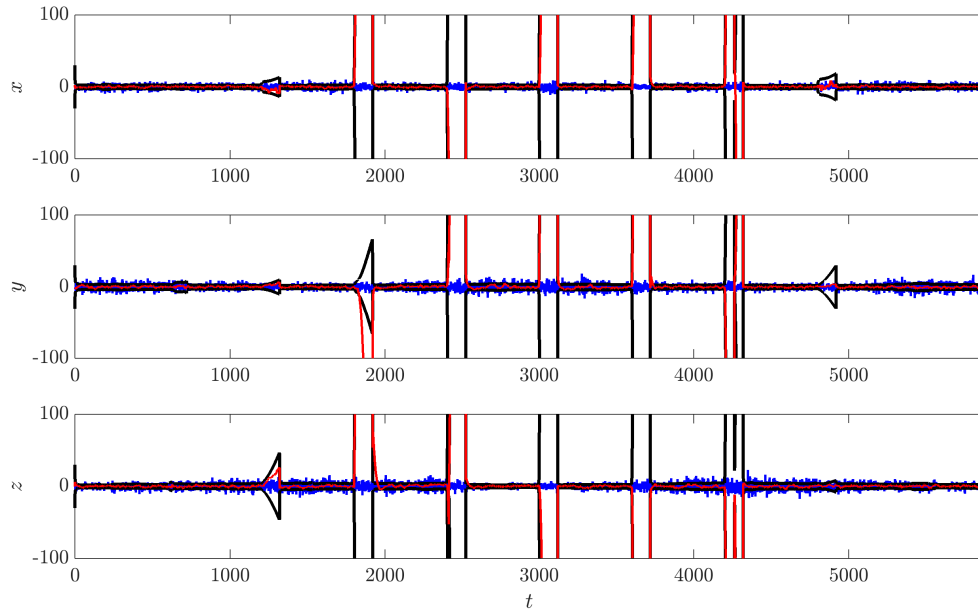
³En caso que para el EKF se utilicen cinco satélites, son los mismos que los utilizados en la solución puntual. En caso que en el EKF se cuente con menos de cinco satélites, éstos son un subconjunto de los cinco utilizados en la solución puntual.

Finalmente, en las figuras [D.56](#), [D.57](#), [D.58](#), [D.59](#), [D.60](#), [D.61](#), [D.62](#) y [D.63](#) se presentan los resultados para los modelos Dinámico II, Dinámico III y Dinámico IV. En primer lugar se puede observar que mientras en los modelos Dinámico II y Dinámico IV prácticamente no se altera el comportamiento, quedando casi en todos los casos el intervalo $\pm 3\sigma$ teórico por debajo del error en la solución puntual. El comportamiento observado se explica en función de la mayor exactitud del modelo implementado en el EKF, que permite confiar en el mismo aún en ausencia de mediciones.

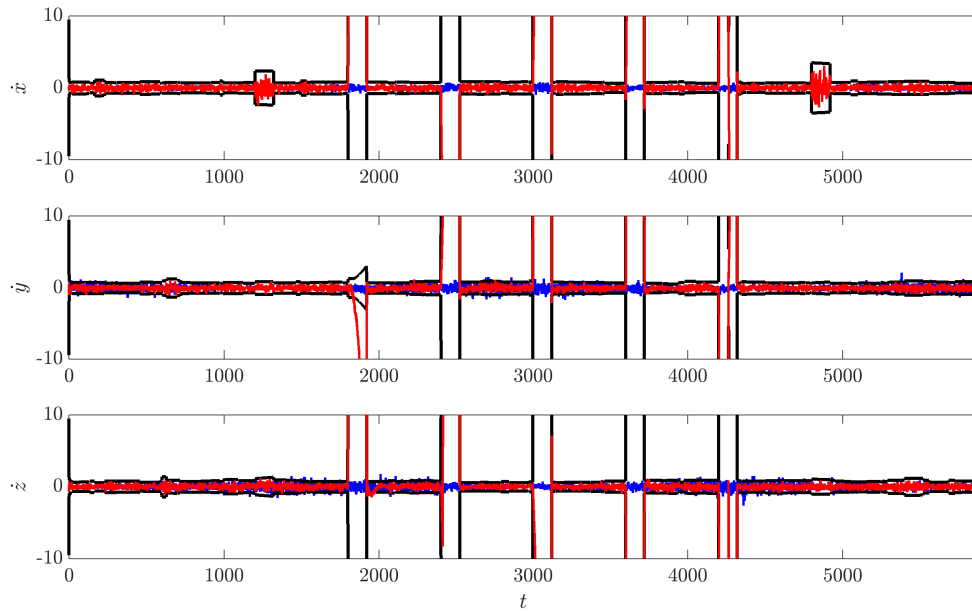
En segundo lugar se observa que si bien el modelo Dinámico III presenta un peor comportamiento que estos dos anteriores, su desempeño es mucho mejor que el logrado por el modelo Dinámico I. Si bien en este caso el modelo es de menor exactitud, contar con una estimación de la aceleración permite propagar los estados con un error menor (durante un intervalo corto de tiempo), aún en ausencia de mediciones.

Para apreciar mejor el comportamiento de la solución filtrada, en las figuras [D.64](#), [D.65](#), [D.66](#), [D.67](#) y [D.68](#) se muestra el error para los modelos Dinámico II y Dinámico IV con otros márgenes de graficación.

A partir de este análisis se evidencia un comportamiento similar al observado en la sección [9.2](#) para el caso de utilizar el sistema GPS, y [D.3](#) para el caso de utilizar el sistema GLONASS.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.49: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,0$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

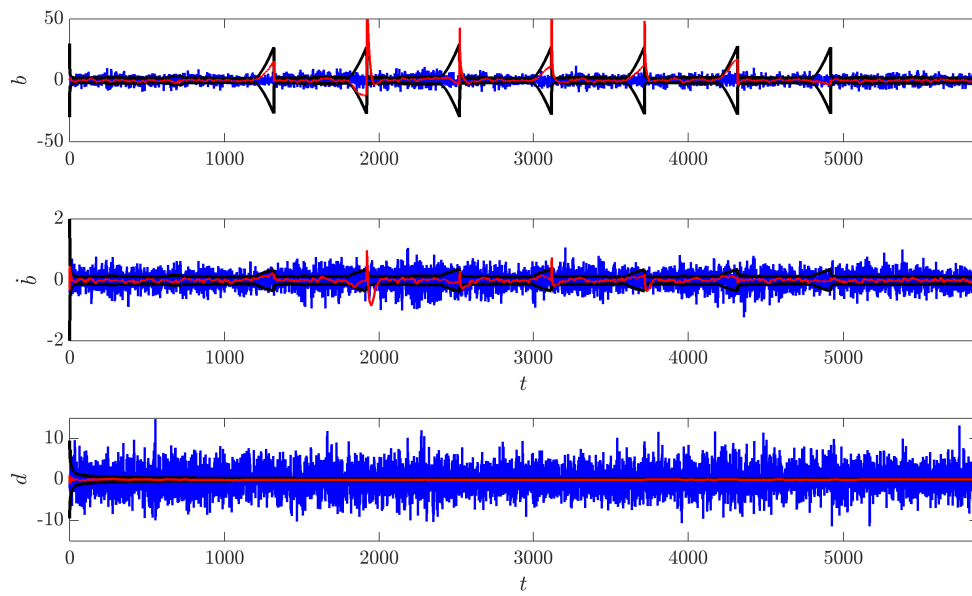
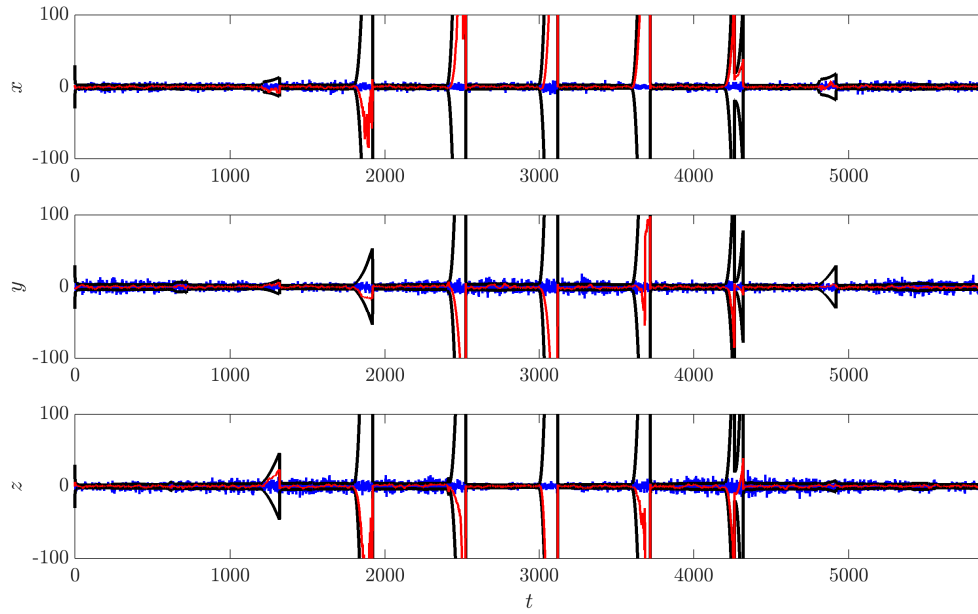
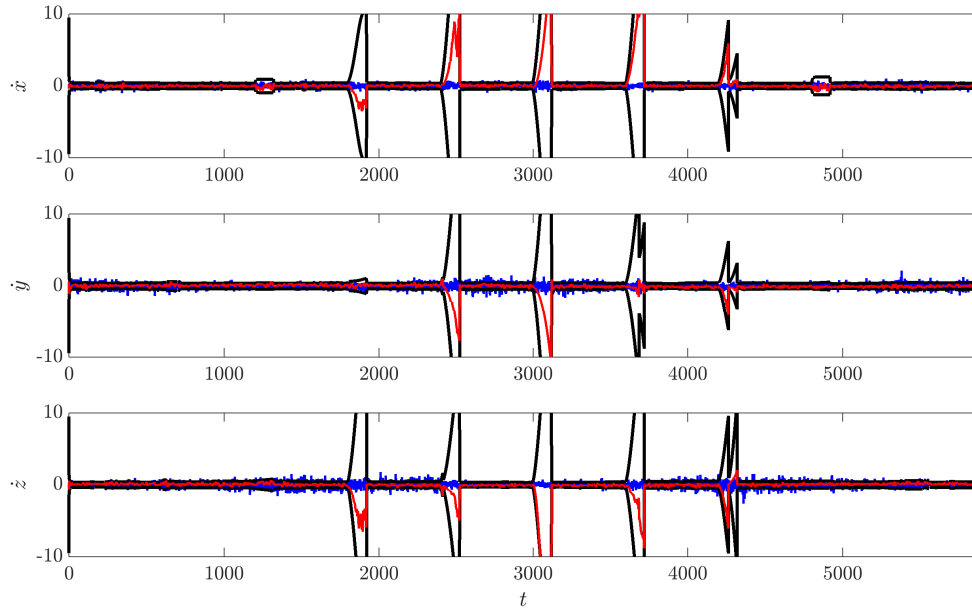


Figura D.50: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\dot{b}} = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,0$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.51: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

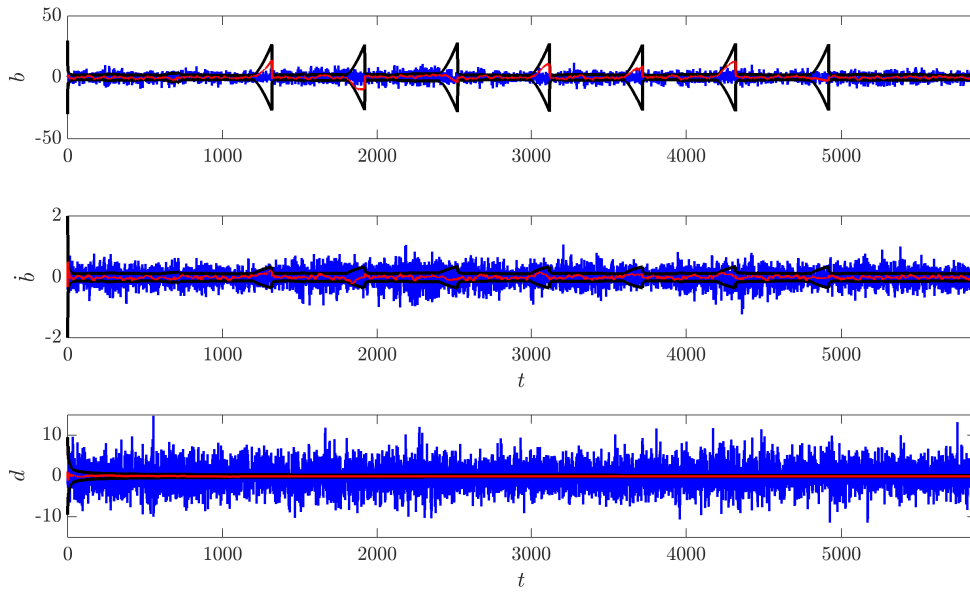


Figura D.52: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

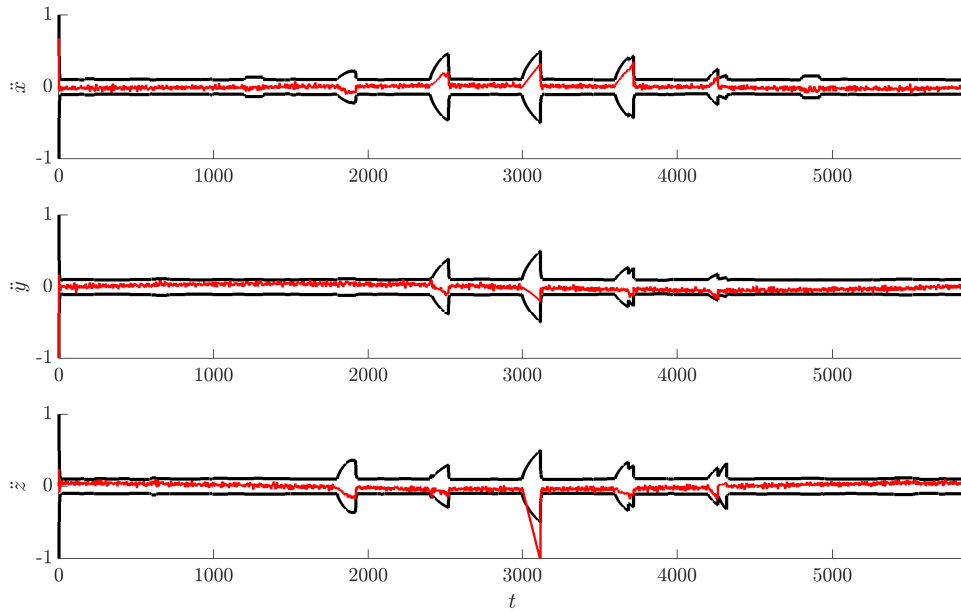
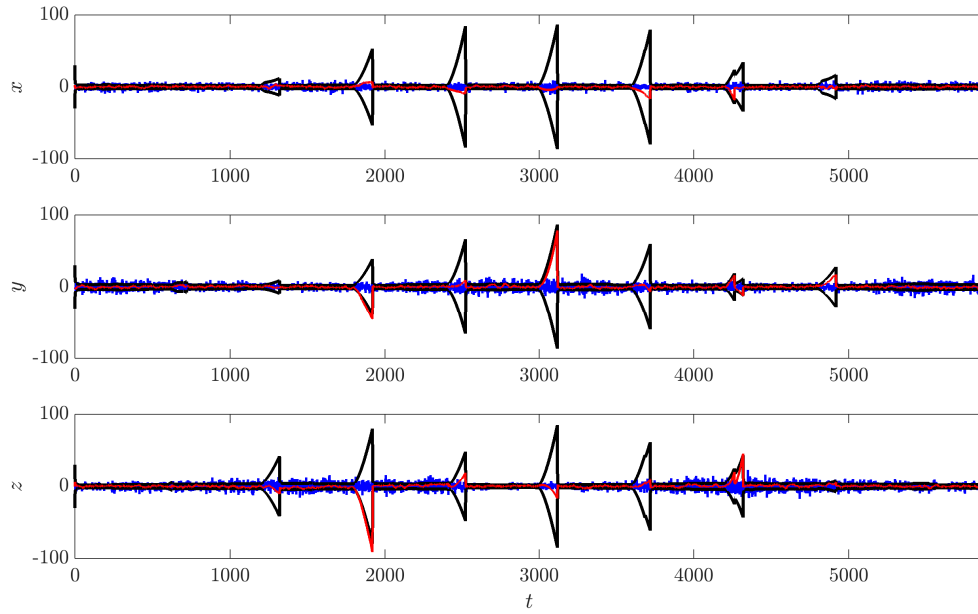
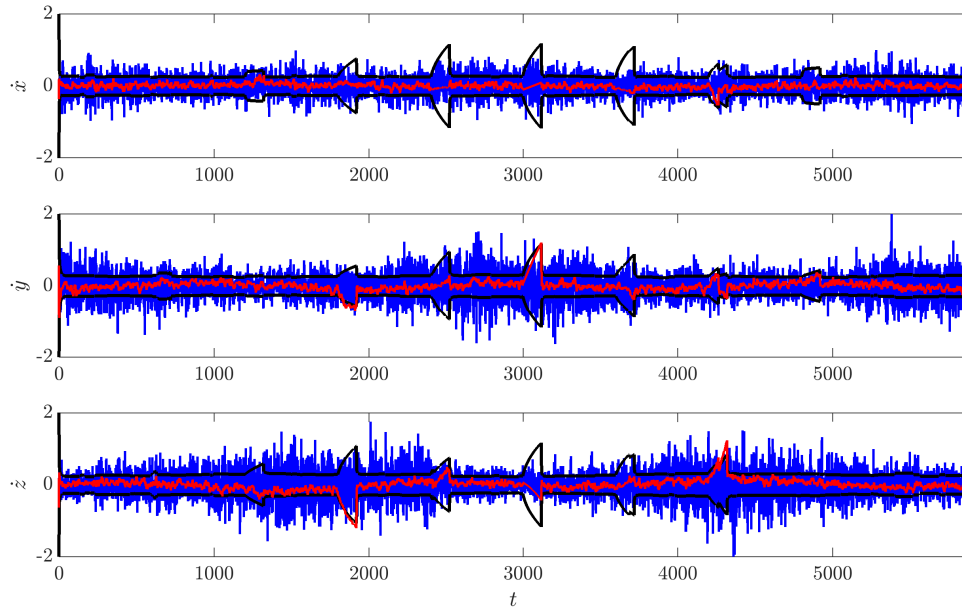


Figura D.53: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Cinemático II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,015$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.54: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 0,035$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

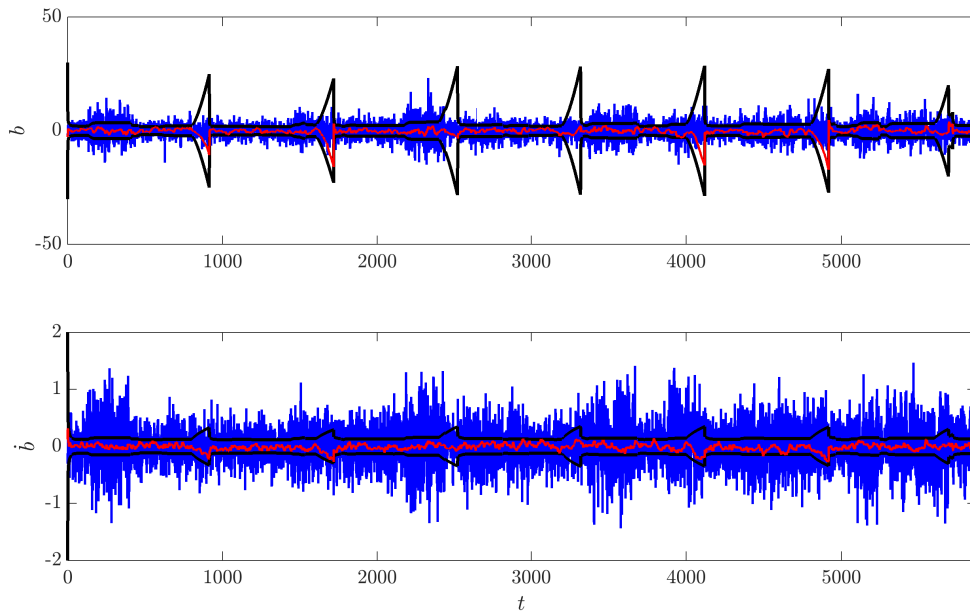
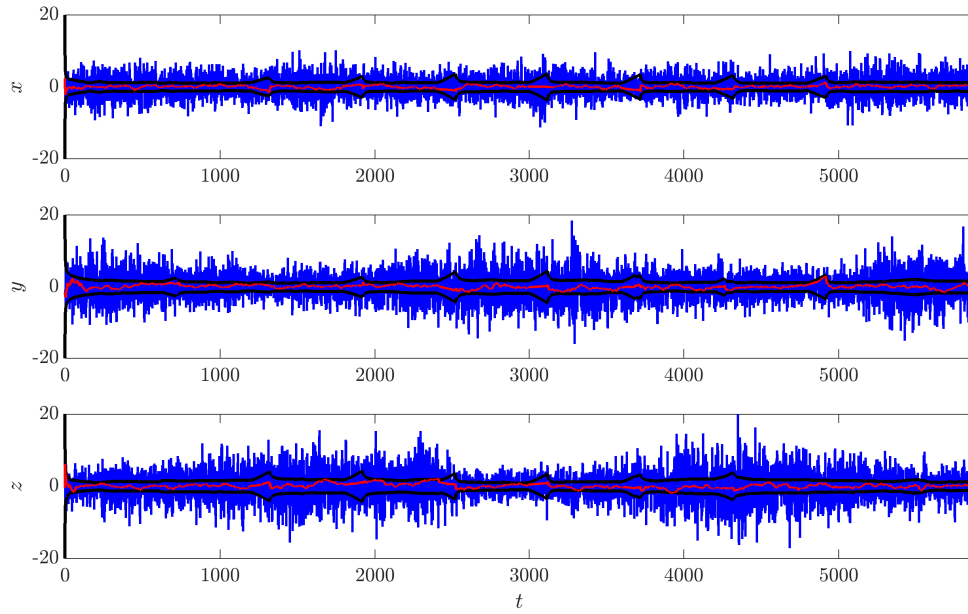
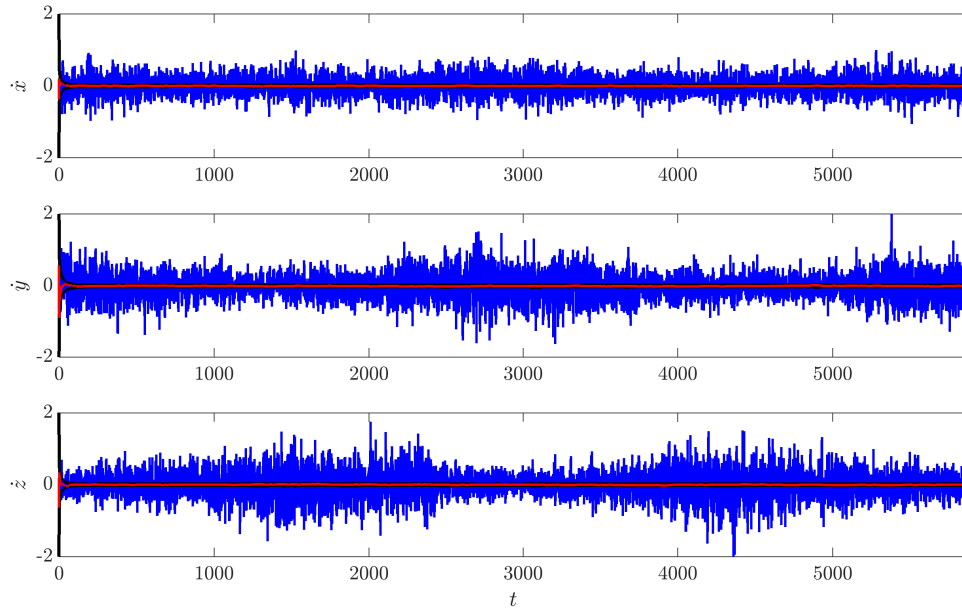


Figura D.55: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 0,035$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.56: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

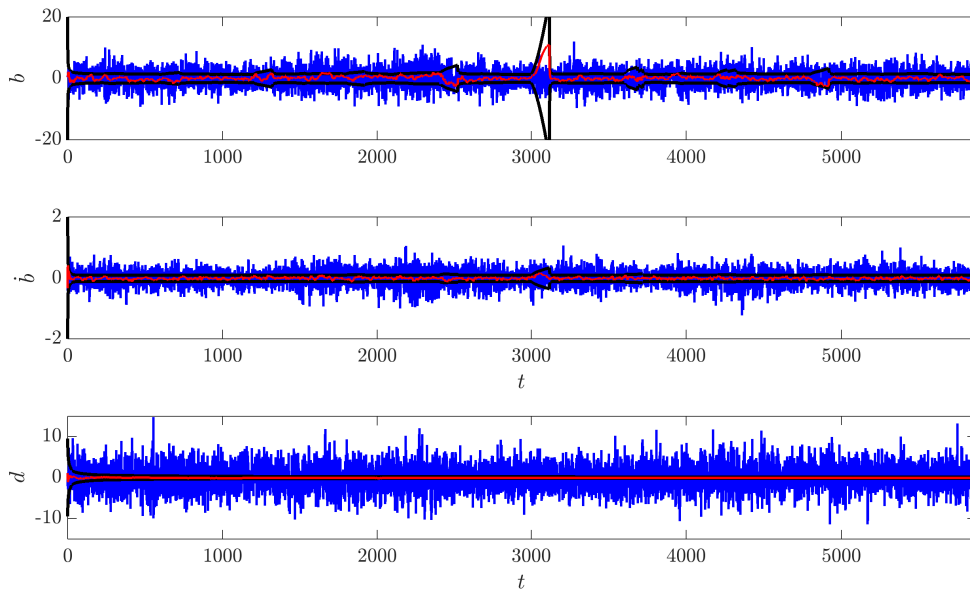
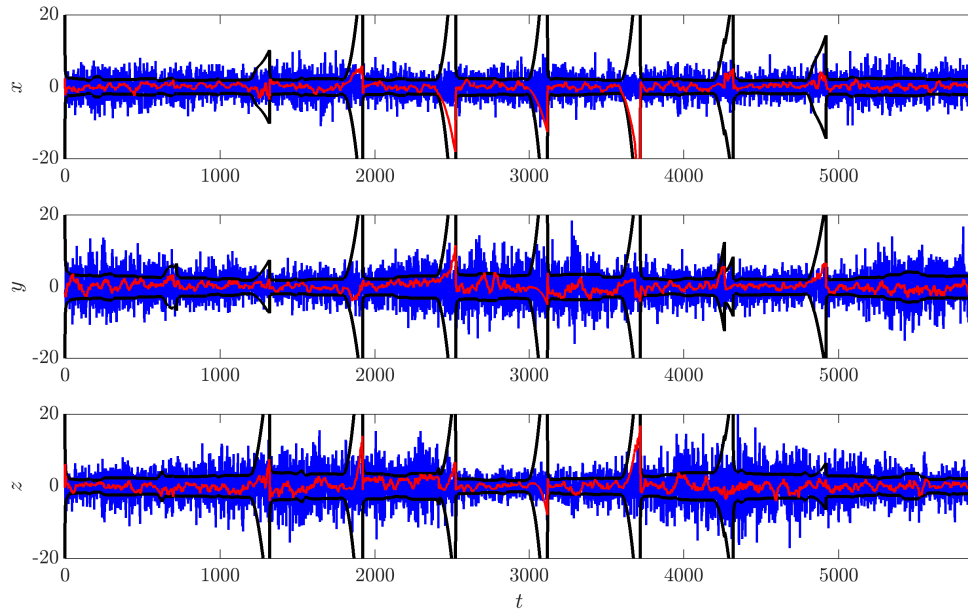
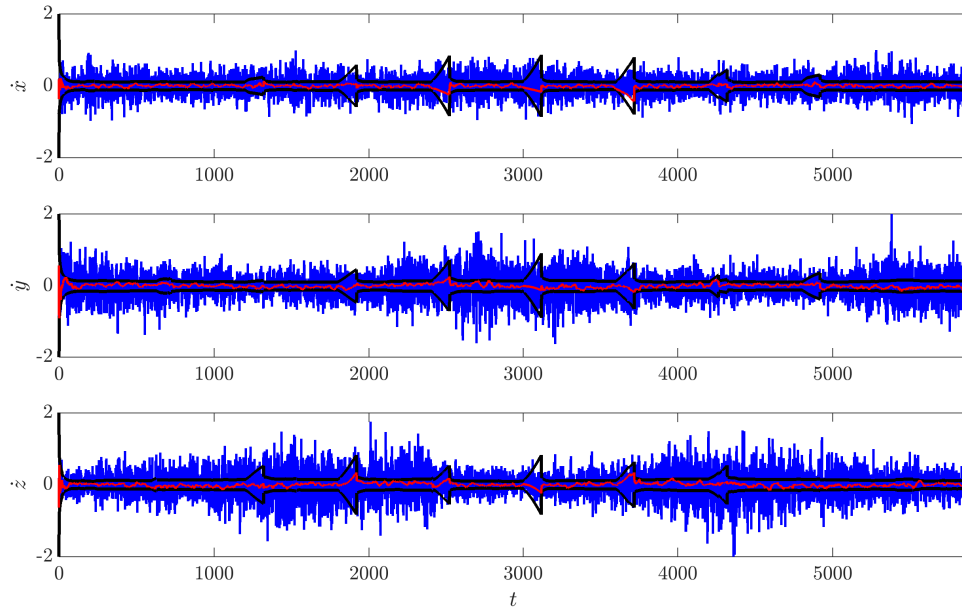


Figura D.57: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.58: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

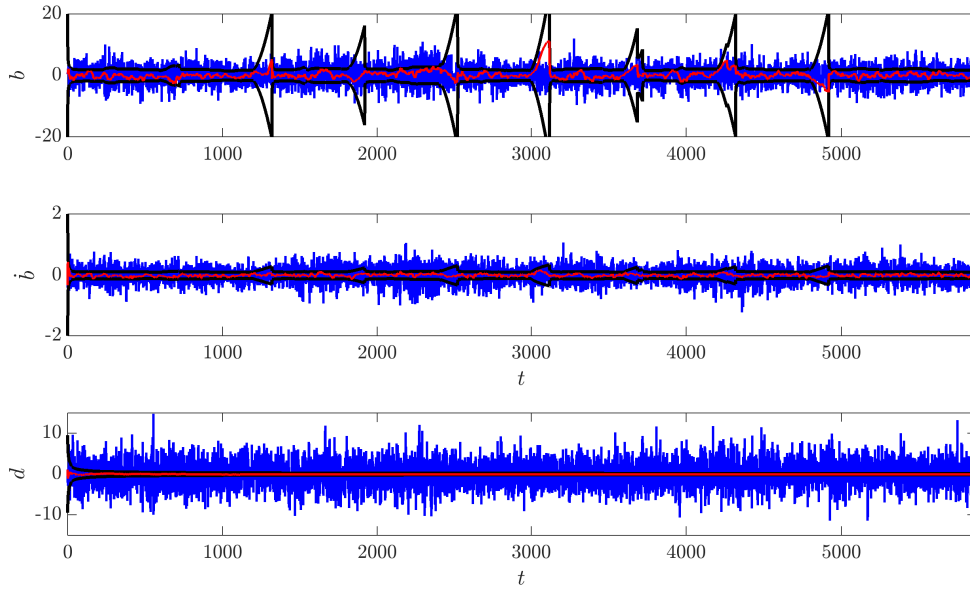


Figura D.59: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

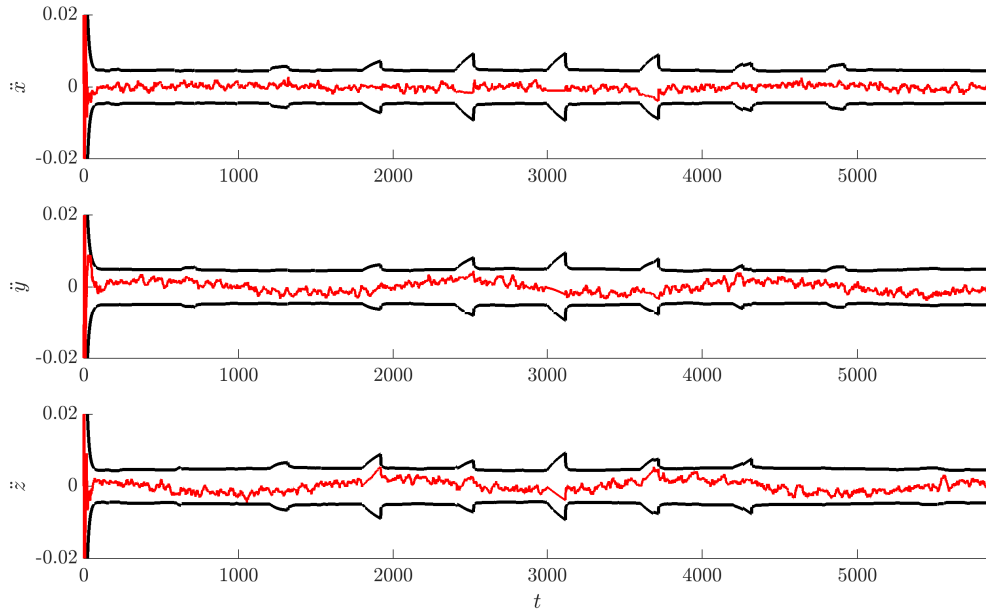
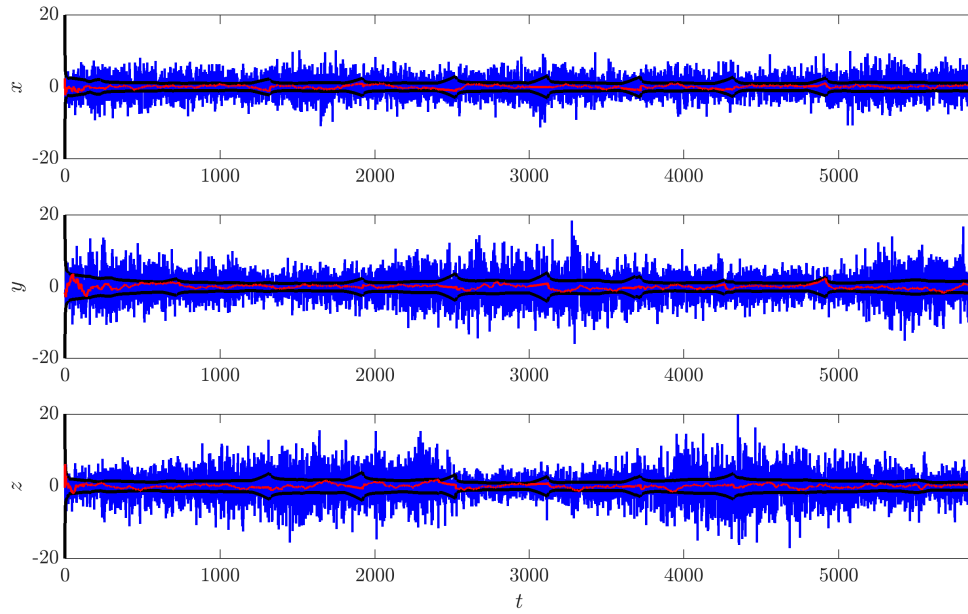
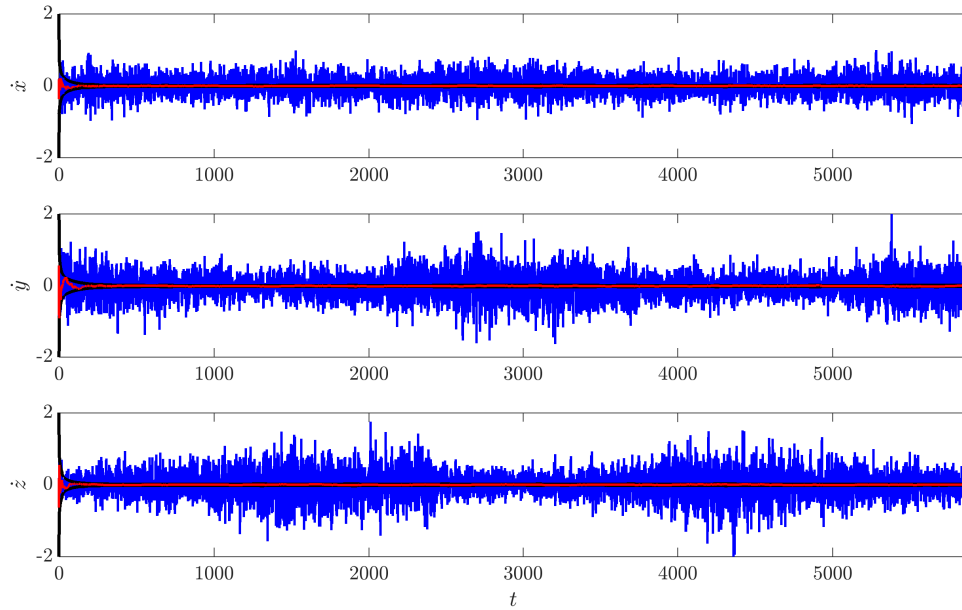


Figura D.60: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico III, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-4}$; ; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.61: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

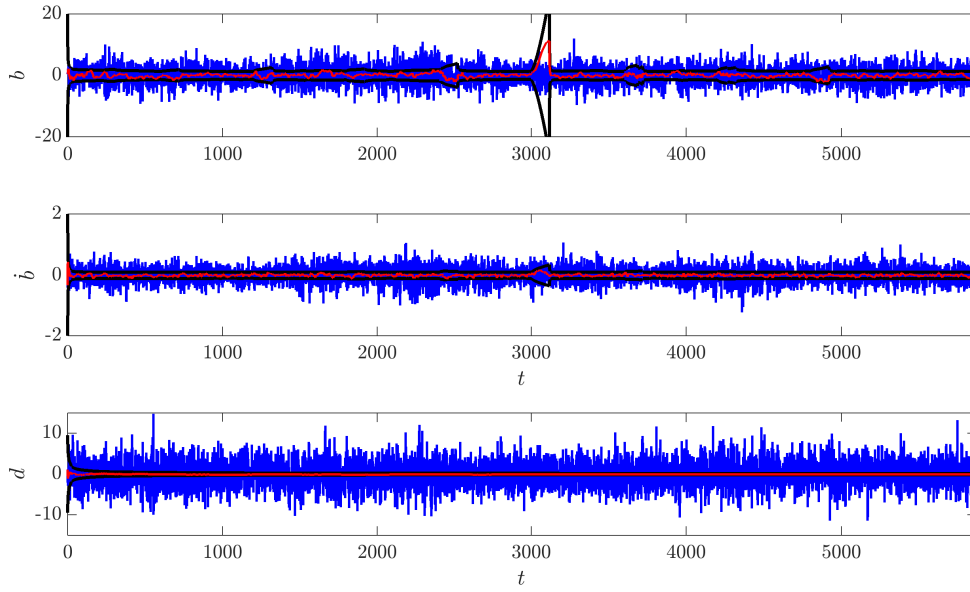


Figura D.62: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. Se muestra también el error obtenido con la solución puntual con 5 satélites (—).

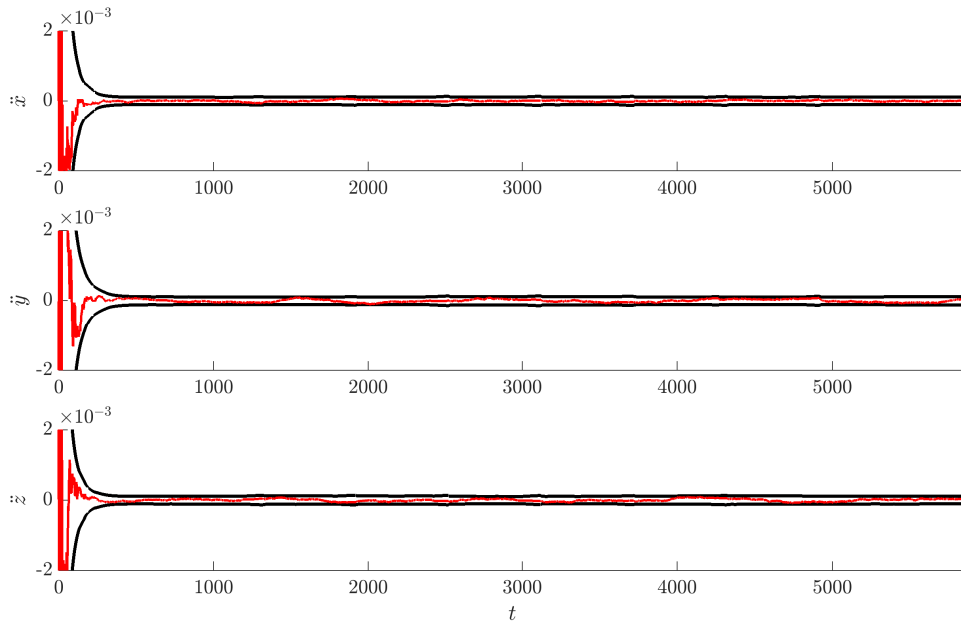
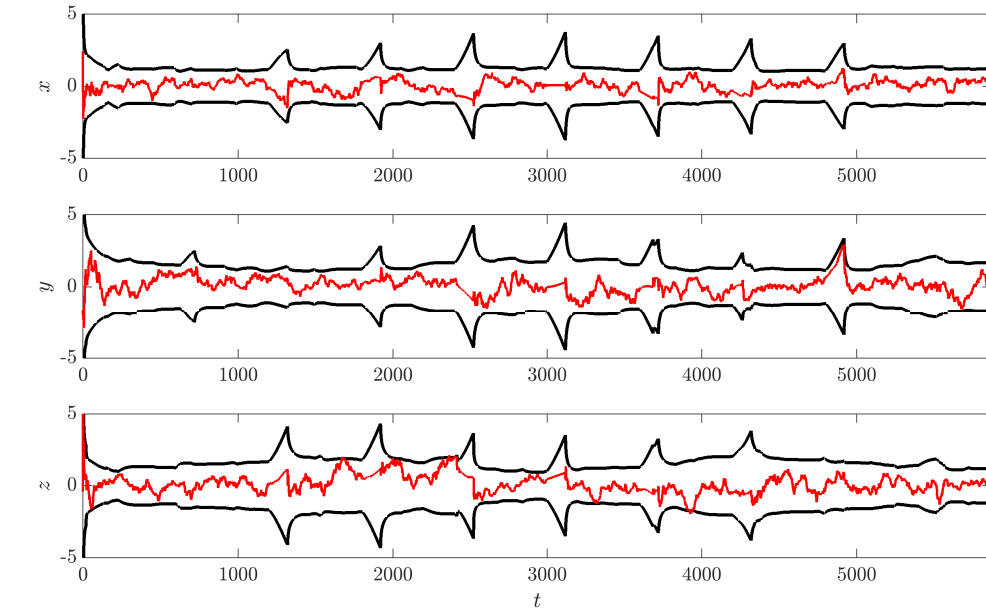
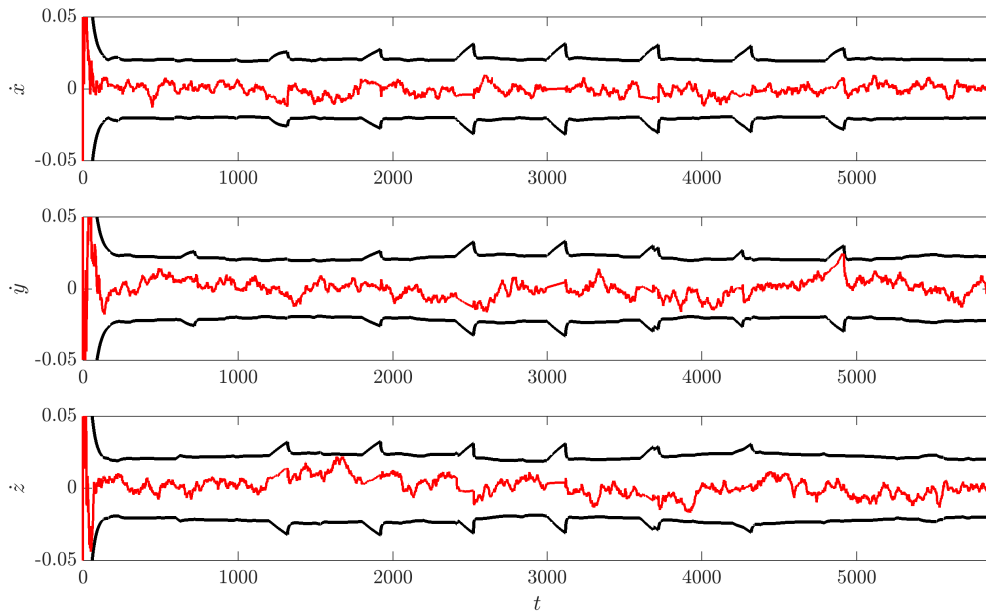


Figura D.63: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites.



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.64: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico II, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

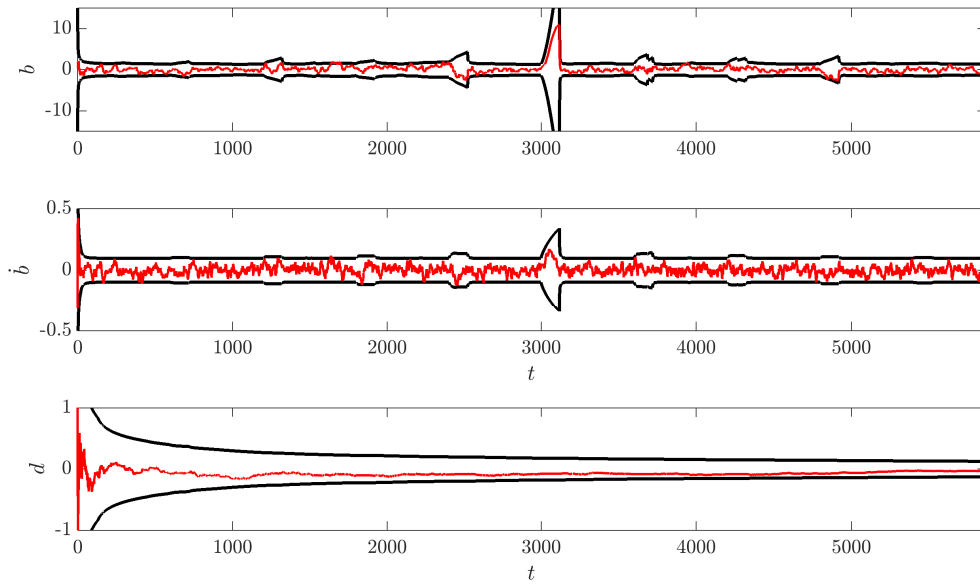
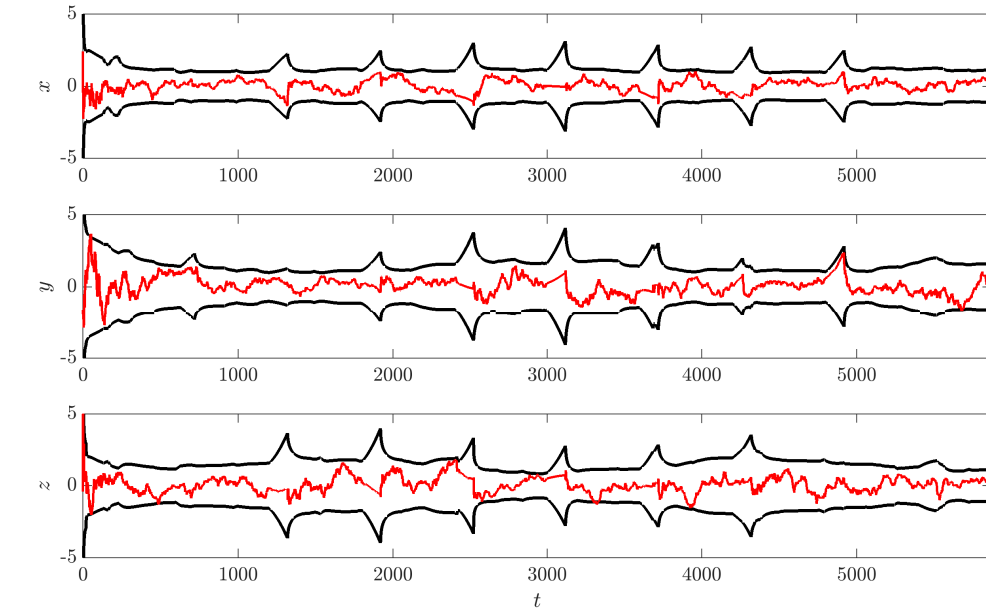
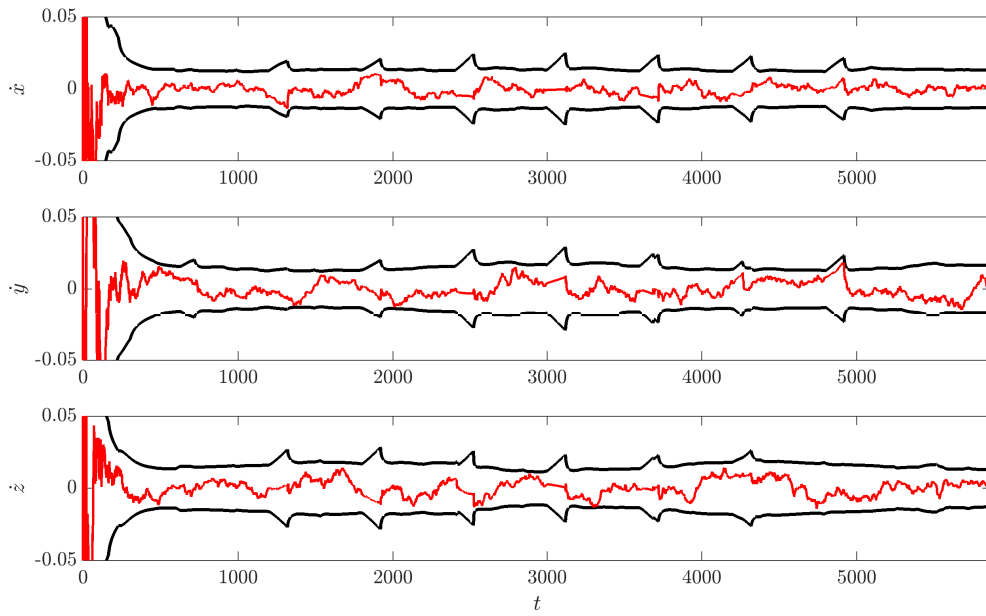


Figura D.65: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico I, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 7,5 \times 10^{-4}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).



(a) Posición.



(b) Velocidad.

Figura D.66: Error en las soluciones de posición y velocidad con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_b = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{y}} = \sigma_{\dot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites. (Ampliación).

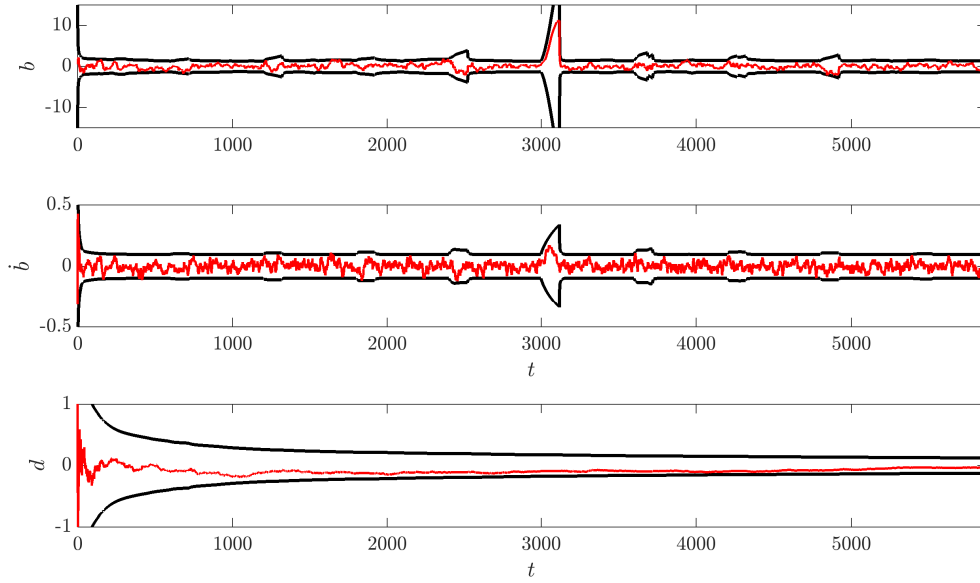


Figura D.67: Error en las soluciones de sesgo y deriva con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

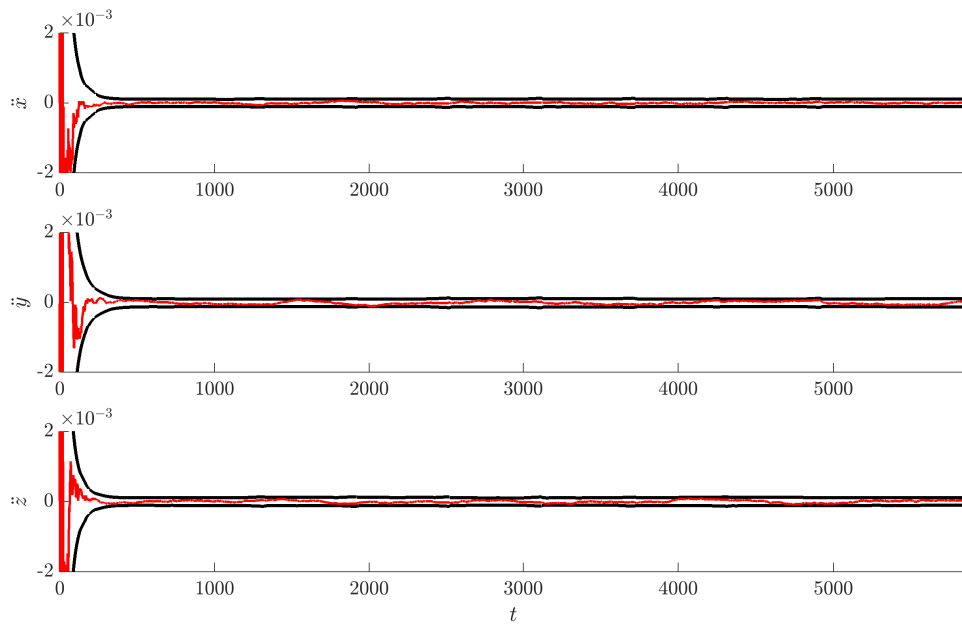


Figura D.68: Error en las soluciones de aceleración con EKF (—), e intervalo $\pm 3\sigma$ teórico del error de estimación (—); para el modelo Dinámico IV, sistemas GPS y GLONASS, tomando $\sigma_{\ddot{b}} = 0,01$, $\sigma_j = \sigma_{\ddot{x}} = \sigma_{\ddot{y}} = \sigma_{\ddot{z}} = 2,5 \times 10^{-6}$; en caso de pérdida de satélites (Ampliación).

BIBLIOGRAFÍA

- AATE. Asociación Argentina de Tecnología Espacial. <http://www.aate.org/satarg.htm> (2016). Accedido: 15/08/2016.
- Aghav, S. y S. A. Gangal. Use of Spaceborne GPS Navigation Sensor for Autonomous LEO Orbit Determination. En *Physics and Technology of Sensors (ISPTS), 2012 1st International Symposium on*, págs. 70–73 (2012).
- Argentina, S. Space Generation Advisory Council Argentina. <http://spacegeneration.org/en/sgac-regions/south-america/argentina.html> (2016). Accedido: 14/08/2016.
- ARSAT. Satélites ARSAT. <http://satelitesarsat.com.ar/> (2016). Accedido: 15/08/2016.
- Ashby, N. Relativistic Effects in the Global Positioning System. *Systems Engineering and Electronics, Journal of*, 6(4):199–237 (1995).
- Bancroft, S. An Algebraic Solution of the GPS Equations. En *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, tomo AES-21, págs. 56–59 (1985).
- Bar-Shalom, Y., X. Li, y T. Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. Wiley (2004). ISBN 9780471465218.
- Bates, R. J. *Broadband Telecommunications Handbook*. McGraw-Hill telecom professional. McGraw-Hill (2002). ISBN 9780071398510.
- Bertiger, W. I., Y. E. Bar-Sever, E. J. Christensen, E. S. Davis, J. R. Guinn, B. J. Haines, R. W. Ibanez-Meier, J. R. Jee, S. M. Lichten, W. G. Melbourne, R. J. Muellerschoen, T. N. Munson, Y. Vigue, S. C. Wu, T. P. Yunck, B. E. Schutz, P. A. M. Abusali, H. J. Rim, M. M. Watkins, y P. Willis. GPS Precise Tracking of TOPEX/POSEIDON: Results and Implications. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 99(C12):24449–24464 (1994). ISSN 2156-2202.
- Beutler, G., G. Hein, W. Melbourne, y G. Seeber, eds. *GPS Trends in Precise Terrestrial, Airborne, and Spaceborne Applications: Symposium No. 115 Boulder, CO, USA, July 3–4, 1995*, tomo 115. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1996).

- Bisnath, S. y R. Langley. Precise a posteriori geometric tracking of low earth orbiters with GPS. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 45(3):245–252 (1999).
- Bock, H., U. Hugentobler, T. Springer, y G. Beutler. Efficient precise orbit determination of leo satellites using gps. *Advances in Space Research*, 30(2):295 – 300 (2002). ISSN 0273-1177.
- Bock, H., A. Jäggi, D. Švehla, G. Beutler, U. Hugentobler, y P. Visser. Precise Orbit Determination for the GOCE Satellite using GPS. *Advances in Space Research*, 39(10):1638 – 1647 (2007).
- Burden, R. y J. Faires. *Análisis Numérico*. International Thomson Editores (2002).
- CelesTrak. Almanagues Yuma GPS. <http://www.celestrak.com/GPS/almanac/Yuma> (1990-2016). Accedido: 01/03/2016.
- CelesTrak. Almanagues Yuma GPS. <http://www.celestrak.com/GPS/almanac/Yuma/1994> (1994). Accedido: 09/12/2013.
- Chaffee, J. y J. Abel. The GPS Filtering Problem. En *Position Location and Navigation Symposium, 1992. Record. 500 Years After Columbus - Navigation Challenges of Tomorrow. IEEE PLANS '92.*, IEEE, págs. 12–20 (1992).
- Chebotaiev, V. Navigation Satellite System. En *Information Satellite System Magazine* (2007).
- Chiaradia, A., H. Kuga, y A. Prado. Single Frequency GPS Measurements in Real-Time Artificial Satellite Orbit Determination. *Acta Astronautica*, 53(2):123 – 133 (2003). ISSN 0094-5765.
- Chiaradia, A. P. M., E. Gill, O. Montenbruck, H. K. Kuga, y A. F. B. A. Prado. Algorithms for on-board orbit determination using GPS OBODE-GPS (2000).
- Chiaradia, A. P. M., H. K. Kuga, y A. F. B. de Almeida Prado. Onboard and Real-Time Artificial Satellite Orbit Determination using GPS. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013:8 (2013).
- Choi, E.-J., J.-C. Yoon, B.-S. Lee, S.-Y. Park, y K.-H. Choi. Onboard orbit determination using GPS observations based on the unscented kalman filter. *Advances in Space Research*, 46(11):1440 – 1450 (2010). ISSN 0273-1177.
- Cogo, J., J. G. García, y C. H. Muravchik. GNSS multi-constellation positioning problem: A numerical optimization approach. En SADIO, ed., *13th Argentine Symposium on Technology (AST 2012)* (2012).
- Cogo, J., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Navegación en Receptores de GPS para Cohetes Sonda. En *AADECA 2010 - XXII Congreso Argentino de Control Automático* (2010).
- Cogo, J., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Estimación Conjunta de Posición y Orientación en Receptores de GPS con Múltiples Antenas. En *XIV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (XIV RPIC)*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Entre Ríos (2011).

- Cogo, J., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Análisis de la Operación en órbita de un Receptor de GPS para Aplicaciones Aeroespaciales. En *Proceedings XV RPIC* (2013a).
- Cogo, J., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Comparación de Métodos de Filtrado Estadístico para Navegación de Satélites LEO con Señales GNSS. En *Argencon 2014* (2014).
- Cogo, J., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. An Statistical Filtering Models Comparison for GNSS LEO Satellite Navigation. En *2016 Argentine Conference of Micro-Nanoelectronics, Technology and Applications - CAMTA 2016*, págs. 44 – 49 (2016).
- Cogo, J., R. G. López La Valle, G. L. Puga, J. A. Smidt, J. G. Díaz, J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Receptor GNSS Multiantena para Aplicaciones Aeroespaciales. En UNLP, F., ed., *Segundas Jornadas de Investigación y Transferencia* (2013b).
- Cogo, J., G. L. Puga, J. A. Smidt, J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Diseño e Implementación del Software para un Receptor de GPS para Aplicaciones Aeroespaciales. En *Proceedings XIII RPIC* (2009).
- Cohen, C. E., E. G. Lightsey, B. W. Parkinson, y W. A. Feess. Space flight tests of attitude determination using GPS. *International Journal of Satellite Communications*, 12:427–433 (1994).
- Commission, E. Constelación Completa de Galileo. http://www.ec.europa.eu/enterprise/policies/satnav/galileo/satellite-launches/index_en.htm (2012). Accedido: 27/02/2014.
- CONAE. Misión Aquarius SAC-D. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sac-d/objetivos> (2016a). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SABIA-Mar. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sabiamar/objetivos> (2016b). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SAC-A. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sac-a/objetivos> (2016c). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SAC-B. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sac-b/objetivos> (2016d). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SAC-C. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sac-c/objetivos> (2016e). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SAOCOM. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/saocom/objetivos> (2016f). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Misión SARE. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/misiones-satelitales/sare/objetivos> (2016g). Accedido: 15/08/2016.
- CONAE. Proyecto Tronador II. <http://www.conae.gov.ar/index.php/espanol/acceso-al-espacio/tronador-ii> (2016h). Accedido: 15/08/2016.
- Curtis, H. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Aerospace Engineering. Elsevier Science, second edición (2009).

- Daly, P. Navstar GPS and GLONASS: Global Satellite Navigation Systems. *Electronics Communication Engineering Journal*, 5(6):349–357 (1993). ISSN 0954-0695.
- D’Amico, S., J.-S. Ardaens, y O. Montenbruck. Navigation of formation flying spacecraft using GPS: the PRISMA technology demonstration. En *Proceedings of the 22th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS)* (2009).
- de León, P. *Historia de la Actividad Espacial en la Argentina*. Lulu.com (2008). ISBN 9780557017829.
- Erdoğan, E. *GPS-Based Real-Time Orbit Determination of Artificial Satellites Using Kalman, Particle, Unscented Kalman and H-Infinity Filters*. Tesis de Maestría, Middle East Technical University (2011).
- ESA. Primer Solución Puntual de Galileo. http://www.esa.int/Our_Activities/Navigation/Galileo_fixes_Europe_s_position_in_history (2013). Accedido: 12/09/2016.
- España, M. *Fundamentos de la Navegación Integrada*. AADECA (2010).
- Fu, L.-L., E. J. Christensen, C. A. Yamarone, M. Lefebvre, Y. Ménard, M. Dorrer, y P. Escudier. TOPEX/POSEIDON Mission Overview. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 99(C12):24369–24381 (1994). ISSN 2156-2202.
- García, J. G., R. P.A., G. R. López La Valle, J. Cogo, G. L. Puga, J. A. Smidt, y C. H. Muravchik. Receptor de GPS Experimental para Satélites de Órbita Baja. En *Primeras Jornadas de Investigación y Transferencia, Facultad de Ingeniería, UNLP* (2011).
- Gill, E., O. Montenbruck, K. Arichandran, S. Tan, y T. Bretschneider. High-precision onboard orbit determination for small satellites - the GPS-based XNS on X-SAT. En *Proceedings of The 4S Symposium: 6th Small Satellites, Systems and Services*, pág. 6. La Rochelle, France (2004).
- Gill, E., O. Montenbruck, y H. Kayal. The bird satellite mission as a milestone toward gps-based autonomous navigation. *Navigation*, 48(2):69–75 (2001). ISSN 2161-4296.
- Gleason, S. y D. Gebre-Egziabher. *GNSS Applications and Methods*. GNSS technology and applications series. Artech House (2009). ISBN 9781596933309.
- GLONASS. Glonass almanac. <ftp://ftp.glonass-iac.ru/MCC/ALMANAC/> (2005-2016). Accedido: 01/03/2016.
- GLONASS. Interface Control Document. Russian Institute of Space Device Engineering. Edition 5.1 (2008).
- GLONASS. GLONASS IAC. <https://glonass-iac.ru/en/GLONASS/ephemeris.php> (2014). Accedido: 07/01/2014.
- GLONASS. GLONASS IAC. <https://glonass-iac.ru/en/archive/> (2016). Accedido: 12/09/2016.
- GNSS, I. News. <http://www.insidegnss.com/node/4066> (2014). Accedido: 01/03/2016.
- Goldstein, D. B. *Real-time, autonomous precise satellite orbit determination using the global positioning system*. Tesis Doctoral, University of Colorado (2000).

- GPS. Interface specification. IS-GPS-200H (2014).
- GPS. GPS Space. <http://www.gps.gov/systems/gps/space/> (2016). Accedido: 12/09/2016.
- GPS World. 14 Galileo Satellites Now in Orbit. <http://gpsworld.com/14-galileo-satellites-now-in-orbit/> (2016). Accedido: 12/09/2016.
- Grewal, M. y A. Andrews. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley & Sons, second edición (2001). ISBN 9780471392545.
- Gruss, M. Launch of First GPS 3 Satellite Now Not Expected Until 2017. <http://spacenews.com/launch-of-first-gps-3-satellite-now-not-expected-until-2017/> (2015). Accedido: 21/09/2016.
- Guasch, J. R., R. Weigand, G. L. R. no, y P. Silvestrin. AGGA-4 Core Device for GNSS Space-Receiver of the Next Decade. En *NAVITEC 2008*, pág. 8 (2008).
- Hart, R. C., A. C. Long, y T. Lee. Autonomous navigation of the SSTI/lewis spacecraft using the global positioning system (GPS). En *Flight Mechanics Symposium 1997* (1997).
- Hofmann-Wellenhof, B., K. Legat, y H. Lichtenegger. *Navigation: Principles of Positioning and Guidance*. Springer Vienna (2003). ISBN 9783211008287.
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, y E. Wasle. *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer (2007). ISBN 9783211730171.
- Juang, J.-C. y Y. F. Tsai. On Exact Solutions of the Multi-Constellation GNSS Navigation Problem. *GPS Solutions*, 13(1):57–64 (2008). ISSN 1521-1886.
- Kaplan, E. y C. Hegarty. *Understanding GPS: Principles and Applications*. Artech House mobile communications series. Artech House (2005). ISBN 9781580538954.
- Kramer, H. *Observation of the Earth and Its Environment: Survey of Missions and Sensors*. Springer Berlin Heidelberg (2012). ISBN 9783642976780.
- Krauss, P. A., C. Köhl, M. Mitnacht, J. Heim, y E. Gottzein. Modernized spaceborne gnss receivers. En *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, págs. 4707–4712. Seoul, Korea (2008).
- Kuang, J., S. Tan, y Y. Wang. Gps-based on-board orbit determination of a satellite using extended h_∞ filtering algorithms. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 88(2):103–122 (2004).
- Leapsecond. Escalas de Tiempo. <http://www.leapsecond.com/java/gpsclock.htm> (2016). Accedido: 01/03/2016.
- Leung, S. y O. Montenbruck. Real-time navigation of formation-flying spacecraft using global-positioning-system measurements. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 28(2):226–235 (2005).
- Li, X., M. Ge, X. Dai, X. Ren, M. Fritsche, J. Wickert, y H. Schuh. Accuracy and reliability of multi-gnss real-time precise positioning: Gps, glonass, beidou, and galileo. *Journal of Geodesy*, 89(6):607–635 (2015).

- Lightsey, E. G., C. Cohen, y B. Parkinson. Development of a GPS receiver for reliable real-time attitude determination in space. En *Proceedings of the 7th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS)* (1994).
- Lopez La Valle, R. G. *Cabezal de Radiofrecuencia de un Receptor GNSS Multibanda*. Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (2014).
- Luthcke, S. B., D. D. Row, F. G. Lemoine, N. P. Zelensky, y T. A. Williams. The slr contribution to precise orbit determination in the gps era. En *13th International Workshop on Laser Ranging: Proceedings from the Science Session* (2003).
- López La Valle, G. R., J. G. García, P. A. Roncagliolo, y C. H. Muravchik. Diseño e implementación de un receptor de GPS para aplicaciones aeroespaciales. En *Proceedings XIII RPIC* (2009).
- Mander, A. y S. Bisnath. Gps-based precise orbit determination of low earth orbiters with limited resources. *GPS Solutions*, 17(4):587–594 (2013). ISSN 1521-1886.
- Montenbruck, O. y E. Gill. *Satellite Orbits: Models, Methods and Applications*. Springer Berlin Heidelberg (2012).
- Montenbruck, O., E. Gill, y M. Markgraf. Phoenix-XNS - a miniature real-time navigation system for LEO satellites. En *3rd ESA Workshop on Satellite Navigation User Equipment Technologies, NAVITEC'2006* (2006).
- Montenbruck, O., M. Markgraf, M. Garcia-Fernandez, y A. Helm. *GPS for Microsatellites – Status and Perspectives*, págs. 165–174. En *Sandau et al.* (2008) (2008).
- Montenbruck, O. y P. Ramos-Bosch. Precision real-time navigation of leo satellites using global positioning system measurements. *GPS Solutions*, 12(3):187–198 (2008).
- Montenbruck, O., T. van Helleputte, R. Kroes, y E. Gill. Reduced dynamic orbit determination using GPS code and carrier measurements. *Aerospace Science and Technology*, 9(3):261 – 271 (2005). ISSN 1270-9638.
- Motorola. *Addendum to Processor MC68340 Integrated with DMA. User's Manual. Rev. 1*. Motorola Semiconductors Inc. (1994).
- NAIC. National Astronomy and Ionospheric Center. <http://www.naic.edu/aisr/GPSTEC/Archive/> (2004-2016). Accedido: 01/03/2016.
- NASA-GSFC. Satellite formation flying concept becoming a reality. <http://spaceflightnow.com/news/n0106/04formation/> (2001). Accedido: 15/08/2016.
- Nocedal, J. y S. Wright. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag New York (2006).
- Papoulis, A. *Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos*. Eunibar (1980). ISBN 9788485257423.
- Parkinson, B. W. y J. J. Spilker, eds. *Global Positioning System: Theory and Applications*, tomo 2. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) (1996a).
- Parkinson, B. W. y J. J. Spilker, eds. *Global Positioning System: Theory and Applications*, tomo 1. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) (1996b).

- Pinto, P. C., M. Pardal, H. K. Kuga, y R. V. de Moraes. A discussion related to orbit determination using nonlinear sigma point kalman filter. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009 (2009).
- Polischuk, G., V. Kozlov, V. V. Ilitchov, A. G. Kozlov, V. A. Bartenev, V. E. Kossenko, N. A. Anphimov, S. G. Revnivikh, S. B. Pisarev, A. E. Tyulyakov, B. V. Shebshaevitch, A. B. Basevitch, y Y. L. Vorokhovsky. The Global Navigation Satellite System GLONASS: Development and Usage in the 21st Century. En *Proceedings of the 34th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Systems and Applications Meeting* (2002).
- Psiaki, M. L. Satellite orbit determination using a single-channel global positioning system receiver. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1):137–144 (2002).
- Puga, G. L. *Adquisición y Seguimiento en Tiempo Real para Receptores GNSS Multiantena*. Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata (2015).
- Roncagliolo, P. A., J. Cogo, y J. G. García. The two-loop tracking strategy for real-time multi-antenna GNSS receivers. En IARIA, ed., *The Fifth International Conference on Advances in Satellite and Space Communications (SPACOMM 2013)*, págs. 71 – 76 (2013).
- Roncagliolo, P. A. y J. G. García. High Dynamics and False Lock Resistant GNSS Carrier Tracking Loops. En *The 20th International Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*, págs. 2364–2375 (2007).
- Roselló, J., P. Silvestrin, R. Weigand, S. d’Addio, A. G. Rodríguez, y G. L. Risueño. Next generation of ESA’s GNSS receivers for earth observation satellites. En *Satellite Navigation Technologies and European Workshop on GNSS Signals and Signal Processing, (NAVITEC), 2012 6th ESA Workshop on*, págs. 1–8 (2012). ISSN 2325-5439.
- Roßbach, U. *Positioning and Navigation Using the Russian Satellite System GLONASS*. Tesis Doctoral, Universität der Bundeswehr München (2000).
- Rush, J. Current Issues in the Use of the Global Positioning System aboard Satellites. *Acta Astronautica*, 74(2-9):377–387 (2000).
- Samama, N. *Global Positioning: Technologies and Performance*. Wiley Survival Guides in Engineering and Science. Wiley (2008). ISBN 9780470241905.
- Sandau, R., H.-P. Roeser, y A. Valenzuela, eds. *Small Satellites for Earth Observation*. Springer Netherlands (2008).
- Scataglini, T., F. Pagola, J. Cogo, y J. G. García. Attitude Estimation Using GPS Carrier Phase Single Differences. *IEEE Latin America Transactions*, 12(5):847–852 (2014).
- Simon, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley (2006). ISBN 9780470045336.
- Sinander, P. y P. Silvestrin. Development of an Advanced GPS GLONASS ASIC. <ftp://estec.esa.nl/pub/vhdl/doc/AGGA2Intro.pdf> (1998).
- SiRF. *SiRF Technology Inc, SiRFstar I GPS Architecture GRF1/LX GPS RF Front End. Rev.1.1, Santa Clara, California, USA*. SiRF Technology Inc. (1999a).
- SiRF. *SIRFstar I GPS Architecture GSP1/LX GPS Signal Processor. Rev. 1.1, Santa Clara, California, USA*. SiRF Technology Inc. (1999b).

- Subirana, J. S., J. J. Zornoza, y M. Hernández-Pajares. *GNSS Data Processing. Volume I: Fundamentals and Algorithms*. European Space Agency (2013).
- Tewari, A. *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with MATLAB® and Simulink®*. Birkhäuser Boston (2007).
- Tsui, J. *Fundamentals of Global Positioning System Receivers: A Software Approach*. Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley (2005). ISBN 9780471712572.
- Uragan. Gunter's Space Page. http://space.skyrocket.de/doc_sdat/uragan.htm (2016). Accedido: 12/09/2016.
- Uragan-K. Gunter's Space Page. http://space.skyrocket.de/doc_sdat/uragan-k1.htm (2016). Accedido: 12/09/2016.
- Uragan-M. Gunter's Space Page. http://space.skyrocket.de/doc_sdat/uragan-m.htm (2016). Accedido: 12/09/2016.
- Vallado, D. A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. McGraw-Hill (1997).
- Weinbach, U. y S. Schön. Improved GPS receiver clock modeling for kinematic orbit determination of the GRACE satellites. En *European Frequency and Time Forum (EFTF), 2012*, págs. 157–160 (2012).
- Weiss, M. y N. Ashby. GPS receivers and relativity. En DC, N. O. W., ed., *29th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting* (1998).
- Wood, T. *The LANDSAT/Global Positioning System Project*. Informe técnico, NASA Goddard Space Flight Center (1988).
- Wu, S. C., T. P. Yunck, y C. L. Thornton. Reduced-dynamic technique for precise orbit determination of low earth satellites. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(1):24–30 (1991).
- Yu, Z. y Z. You. Real-time onboard orbit determination using gps navigation solutions. En *Instrumentation, Measurement, Computer, Communication and Control, 2011 First International Conference on*, págs. 949–952 (2011).
- Yunck, T. P. *Orbit determination*, capítulo 21, págs. 559–592. Tomo 2 de [Parkinson y Spilker \(1996a\)](#) (1996).
- Yunck, T. P. y W. G. Melbourne. *Spaceborne GPS for Earth Science*, págs. 113–122. Tomo 115 de [Beutler et al. \(1996\)](#) (1996).
- Yunck, T. P., W. G. Melbourne, y C. L. Thoenton. GPS-based satellite tracking system for precise positioning. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-23(4):450–457 (1985). ISSN 0196-2892.
- Zhou, N. *Onboard Orbit Determination using GPS Measurements for Low Earth Orbit Satellites*. Tesis Doctoral, Queensland University of Technology, Australia (2004).